第一章　函　　数

第一节　函数及其性质

一、集合、区间和邻域

(一)集合

1. 集合:一般可以把集合理解为具有某种特定性质的事物的总体.用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示.

2. 元素:集合中的每个事物称为集合的元素(简称元),用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

3. 集合的表示方法:

(1) 列举法:把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内,例如:$A=\{1,2,3\}$.

(2) 描述法:把集合中所有元素的公共属性描述出来,例如:$A=\{x\mid 0<x<6\}$.

4. 子集:设 A,B 两个集合,若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

5. 集合的基本运算:

(1) 并:$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$;

(2) 交:$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$;

(3) 差:$A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,特别地,若 $B\subset A$ 时,则称 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的补集,记作 C_AB.通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时 $I\backslash A$ 为 A 的余集,记作 C_IA 或 A^C.

6. 集合的基本运算法则:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \backslash B) \cap C = (A \cap C) \backslash (B \cap C)$$

(4) 幂等律：$A \cup A = A, A \cap A = A$

(5) 吸收律：$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \cup B = B, A \cap B = A$，其中 $A \subset B$

$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$

(6) 对偶律：$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

7. 乘积集合：A, B 为任意两个非空集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，把有序对 (x, y) 作为新的元素，它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积，记作 $A \times B$. 即 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A$ 且 $y \in B\}$.

(二) 区间

1. 开区间：$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$；

2. 闭区间：$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$；

3. 半开区间：$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}, [a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$；

4. 无限区间：$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}, (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$，

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$，

$(-\infty, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}$.

(三) 邻域

1. H　：$a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 或 $\{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}$ 为点 a 的 δ H　，记作 $U(a, \delta)$，点 a 为邻域的中心，δ 为邻域的半径.

2. 去心邻域：点 a 的 δ 邻域去掉中心点 a 后的集合，称为点 a 的去心 δ H　. 记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，且 $\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

若 $a, \delta \in \mathbf{R}$，且 $\delta > 0$，则数集 $\{x \mid a < x < a + \delta\}$ 与 $\{x \mid a - \delta < x < a\}$ 分别为点 a 的右 δ 邻域与点 a 的左 δ H　，分别记作 $\mathring{U}_+(a, \delta), \mathring{U}_-(a, \delta)$.

二、函数的基本概念

函数定义：设 D 为一个给定的实数集，对于每个 $x \in D$，按照某种对应法则 f，总存在唯一确定的实数值 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个函数，习惯上也称 y 是 x 的函数，并记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域.

注：(1) 函数常用 $f, g, F, G, \varphi, \psi$ 等表示，如 $y = g(x), y = F(x), x = \varphi(t)$.

(2) 两个要素：定义域 D 和对应法则 f. 几个表达形式不同的函数是否为同一函数完全取决于这两个要素.

练习 1.1

1. 设 A,B 分别为下列两个给定的集合，试求 $A\cup B,A\cap B,A\backslash B,B\backslash A$.

(1) $A=\{1,3,5,7,8\},B=\{2,4,6,8\}$；

(2) $A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty),B=[-10,3)$；

(3) $A=\{0,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\},B=\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$.

2. 设 $A=\{x\mid x^2+x-6<0\},B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，试求 $A\cap B$.

3. 求下列各函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-1}$；　(2) $y=\arcsin(\frac{x-3}{2})$；　(3) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$；

(4) $y=\tan(x+1)$；　(5) $y=\ln(x+1)$；　(6) $y=\arcsin(\ln x)$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=2\ln x,g(x)=\ln x^2$；　(2) $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3},g(x)=x-3$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2},g(x)=x$；　(4) $f(x)=\sin^2x+\cos^2x,g(x)=1$；

(5) $f(x)=x,g(x)=\arcsin(\sin x)$；　(6) $f(x)=1,g(x)=\sec^2x-\tan^2x$.

5. 求下列函数的表达式.

(1) 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$；

(2) 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$，求 $f(x)$.

6. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x\sin x$；　(2) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

7. 设 $f(x)=ax+b$，若 $f(0)=-2,f(3)=5$，求 a 和 b.

8. 设 $f(x)=2x^2+2x-4$，求 $f(1)$、$f(x^2)$、$f(a)+f(b)$.

第二节　反函数与复合函数

一、反函数

定义　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，若对于任意 $y\in M$，由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好唯一确定出一个 $x\in D$ 与之对应，那么认为 x 是 y 的函数，记作 $x=g(y)$. 我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为反函数，习惯上将 $x=g(y)$ 记作 $x=f^{-1}(y)$.

注:习惯上,常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作 $y=f^{-1}(x)$.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W,若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 W 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在,且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是单调增加或单调减少的.

二、复合函数

复合函数:如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,就称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 称为中间变量.

注:函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,这样函数才能复合,否则复合就没有意义,如 $y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+2$ 就不能复合.

例 设函数 $f(x)=\begin{cases} x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$,$g(x)=\mathrm{e}^x$,求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解 因为 $f(x)$,$g(x)$ 符合复合条件,所以 $f[g(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ -\mathrm{e}^x & -1\leqslant x<0 \end{cases}$,

$$g[f(x)]=\begin{cases} \mathrm{e}^x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \mathrm{e}^{-x} & -1\leqslant x<0 \end{cases}.$$

练习 1.2

1. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,$\varphi(x)=\sqrt{\sin x}$,求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

2. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x)$.

3. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f\{f[\cdots f(x)]\}}_{n\text{个}f}$.

4. 设 $f(x)=\arccos(\lg x)$,求 $f(10)$,$f(1)$,$f(10^{-1})$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(2) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\quad(ad-bc\neq 0)$;

(3) $y=1+\ln(x+2)$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt{1-\sin x}$; (2) $y=\sin x^2$; (3) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$;

(4) $y=(1+\lg x)^3$；　(5) $y=\sin(2+\ln x)$；　(6) $y=\dfrac{\tan^2 x}{2}$.

7. 设 $f(x+1)=x^2-3x+2$，求 $f(x)$ 及 $f(\sin x)$.

第三节　初等函数

基本初等函数有以下几种：

1. 幂函数：$y=x^a(a\in\mathbf{R})$，x 的取值范围由常数 a 确定.
2. 指数函数：$y=a^x$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
3. 对数函数：$y=\log_a x(x\in(0,+\infty))$，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$.
4. 三角函数：

正弦函数　$y=\sin x\quad(x\in\mathbf{R})$；

余弦函数　$y=\cos x\quad(x\in\mathbf{R})$；

正切函数　$y=\tan x\quad\left(x\in\left\{x\mid x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}\right)$；

余切函数　$y=\cot x\quad(x\in\{x\mid x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\})$.

5. 反三角函数：

反正弦函数　$y=\arcsin x\quad(x\in[-1,1])$；

反余弦函数　$y=\arccos x\quad(x\in[-1,1])$；

反正切函数　$y=\arctan x\quad(x\in\mathbf{R})$；

反余切函数　$y=\operatorname{arccot} x\quad(x\in\mathbf{R})$.

6. 常量函数：$y=c$（c 为常数）

练习 1.3

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$；　(2) $y=\sqrt{9-x^2}$；

(3) $y=\ln(5x+1)$；　(4) $y=\arcsin(2x-3)$；

(5) $y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$.

2. 求下列函数值.

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(2)$；

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

3. 设 $f(x)=\arcsin x$，求 $f(0)$，$f(-1)$，$f(\frac{\sqrt{3}}{2})$，$f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$f(1)$ 的值.

4. 下列函数哪些是基本初等函数?哪些是初等函数?

(1)$y=\cos t$；　(2)$y=\cos(2t+\varphi)$；　(3)$y=e^x$；

(4)$y=\tan\frac{1}{x^2+1}$；　(5)$y=\arcsin\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+4}}$；　(6)$y=\ln(3+\cos e^{2x})$.

5. 已知 $f^{-1}(\log_a x)=x^2+1$，求 $f(x)$.

测　试　题

1. 填空题.

(1) 如果函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，那么函数 $f(x^2)$ 的定义域为________；

(2) 若 $f(x)=\begin{cases}x+1, x>0\\ \pi, x=0\\ 0, x<0\end{cases}$　则 $f\{f[f(-1)]\}=$ ________；

(3) 设 $f(\sin x)=\cos 2x+1$，则 $f(\cos x)=$ ________；

(4) 函数 $y=\sqrt{2-3x}$ 的复合过程是__________________；

(5) 设 $y=x-2\arctan x$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=$ ________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{1}{2})$.

3. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?

(1)$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$，$g(x)=\frac{1}{x+1}$；

(2)$f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，$g(x)=1-x$；

(3)$f(x)=x$，$g(x)=\ln e^x$.

4. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(2)$y=\ln(x^2-1)+\arcsin\frac{1}{x+1}$.

5. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1)$f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=x^4$；

(2)$f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

6. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50 kg 时按基本运费计算，如从

北京到某地收 0.30 元/kg，当超过 50 kg 时，超重部分按 0.45 元/kg 收费，试求某地的行李费 y（单元：元）与质量 x（单位：kg）之间的函数关系，并画出该函数的图形.

7. 设有一边长为 a 的正方形薄板，将它的四角剪去边长相等的小正方形制作一只无盖箱子，试将箱子的体积表示成小正方形边长的函数.

8. 某工厂生产某种产品 1 600 t，定价为 150 元/t，销售量在不超过 800 t 时，按原价出售，超过 800 t 时，超过部分按八折出售，试求销售收入与销售量之间的函数关系.

9. 某人持有 10 000 元想进行投资，现有两种投资方案：一种是一年支付一次红利，年利率是 12%；另一种是一年分 12 个月按复利支付红利，月利率 1%，问哪一种投资方案较为合算？