第四章

多元函数的微积分

一、学习指南

1. 理解空间直角坐标系，掌握空间点的坐标表示及空间两点间的距离公式.

2. 了解曲面及其方程的概念，掌握常见平面、球面、柱面和二次曲面的方程及形状.

3. 理解多元函数的概念及二元函数的几何意义，了解二元函数极限连续性的概念及有界闭区域上连续函数的性质.

4. 理解偏导数与高阶偏导数的概念，熟练掌握偏导数与二阶偏导数的计算方法，掌握偏导数的经济意义.

5. 理解全微分的概念，掌握全微分的计算方法，了解全微分存在的必要条件和充分条件.

6. 掌握求多元复合函数偏导数的方法及隐函数的求偏导公式.

7. 理解多元函数极值与条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件、充分条件，能够求二元函数的极值，了解拉格朗日乘数法求条件极值的方法.

8. 能够求简单多元函数的最大值和最小值及解决一些简单的应用问题.

9. 理解二重积分的概念，掌握二重积分的性质.

10. 掌握两种坐标系下二重积分的计算方法.

二、典型例题解析

例 1　求函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域，并求 $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to 0}} f(x,y)$.

分析　二元函数的定义域与一元函数类似，根据分式的分母不能等于零、偶次被开方式非负、对数的真数大于零、反三角函数定义域的要求等，得到不等式组，从而求得函数的定义域.

解　当 $4x-y^2\geqslant 0$ 和 $1-x^2-y^2>0$ 且 $1-x^2-y^2\neq 1$ 时，函数才有定义. 解此

不等式组，得 $D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant 4x,0<x^2+y^2<1\}$.

由于$(\frac{1}{2},0)$是 $f(x,y)$定义域 D 内的点，所以 $f(x,y)$在点$(\frac{1}{2},0)$处连续，故

$$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ y\to 0}} f(x,y)=f(\frac{1}{2},0)=\frac{\sqrt{4\times\frac{1}{2}-0^2}}{\ln(1-\frac{1}{4}-0)}=\frac{\sqrt{2}}{\ln\frac{3}{4}}.$$

例 2 设函数 $z=f(x,y)$在(x_0,y_0)处有 $f'_x(x_0,y_0)$和 $f'_y(x_0,y_0)$存在，则(　　).

A. $f(x,y)$在(x_0,y_0)处连续　　B. $f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$及$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$都存在　D. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$存在

分析 $f'_x(x_0,y_0)$也可表示一元函数 $f(x,y_0)$对 x 的导数 $f'_x(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处的函数值，即 $f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'_x(x,y)\Big|_{\substack{y=y_0\\ x=x_0}}$.

解 根据偏导数的定义，$f'_x(x_0,y_0)$和 $f'_y(x_0,y_0)$存在，即一元函数$f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处可导和一元函数 $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处可导，故可推出一元函数 $f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处连续，一元函数 $f(x_0,y)$在 $y=y_0$ 处连续，从而$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y_0)$及$\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y)$存在. 故选 C.

例 3 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$.

分析 分段函数分段点的偏导数，需用偏导数的定义求解.

解 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$f'_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2};$$

当 $x^2+y^2=0$ 时，有

$$f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x}=0,$$

所以，$f'_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

同理可得，$f'_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

例 4 求 $u=xy+zf(\frac{y}{x})$的一阶偏导数,其中 f 具有一阶连续偏导数.

分析 对抽象的复合函数求偏导数时,先引入中间变量,再利用复合函数链式法则求偏导.

解 令$\frac{y}{x}=t$,则 $f(\frac{y}{x})=f(t)$. 因为

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'(\frac{y}{x}),\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(\frac{y}{x}).$$

所以,$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z\frac{\partial f}{\partial x}=y-\frac{yz}{x^2}f'(\frac{y}{x}),\frac{\partial u}{\partial y}=x+z\frac{\partial f}{\partial y}=x+\frac{z}{x}f'(\frac{y}{x}),\frac{\partial u}{\partial z}=f(\frac{y}{x})$.

例 5 若 $z=xf(2x,\frac{y^2}{x})$,$f(u,v)$具有二阶连续偏导数,求$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

分析 利用混合偏导数连续时与求导次序无关的原理求混合偏导数时,要注意适当选择求导次序,以简化计算.

解 令 $u=2x,v=\frac{y^2}{x}$,则 $z=xf(u,v)$,根据函数 z 的表达式,可选择先对 y 求偏导,再对 x 求偏导. 由链式法则,得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})=2y\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}&=2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)=2y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=2y\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}-\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\\&=4y\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}-\frac{2y^3}{x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

例 6 设方程$\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$确定了隐函数 $z=f(x,y)$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

分析 隐函数的一阶偏导数的计算方法有三种:①直接法. 将 x,y 看作独立变量,z 是 x,y 的函数,方程两端分别对 x,y 求导,得到含$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$的两个方程,解出即可;②公式法;③全微分法. 对方程两端求全微分即可.

隐函数的二阶偏导数的计算方法有两种:①直接对原方程连续两次求偏导;②先求出一阶偏导数的表达式,再对一阶偏导数求偏导. 但在求二阶偏导数时,常采用第一种方法.

解法一 直接法. 方程两边同时对 x 求导,注意 y 是常数,z 是 x,y 的函数,得

$$\frac{z-xz'_x}{z^2}=\frac{1}{z}z'_x,$$

整理并解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$;同理可得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{(x+z)y}$.

解法二 公式法. 原方程可改写为 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}=\dfrac{x}{z}-\ln z+\ln y=0$,而

$$F'_x=\frac{1}{z},F'_y=\frac{1}{y},F'_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{z}=-\frac{x+z}{z^2}.$$

故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{z}{x+z}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{z^2}{(x+z)y}$.

解法三 全微分法. 方程两边微分,得

$$\frac{z\mathrm{d}x-x\mathrm{d}z}{z^2}=\frac{1}{z}\mathrm{d}z-\frac{1}{y}\mathrm{d}y,$$

整理并解得 $\mathrm{d}z=\dfrac{z}{x+z}\mathrm{d}x+\dfrac{z^2}{(x+z)y}\mathrm{d}y$,故$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x+z}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z^2}{(x+z)y}$.

再求二阶混合偏导数:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{x+z}\right)=\frac{z'_y(x+z)-z(0+z'_y)}{(x+z)^2}=\frac{xz'_y}{(x+z)^2}=\frac{xz^2}{y\,(x+z)^3}.$$

例 7 设 $f(x,y)$连续,$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$I_2=\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 a,b 为两正数. D_1:$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\-b\leqslant y\leqslant b\end{cases}$,$D_2$:$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b\end{cases}$,试用二重积分的几何意义说明:若 $f(x,y)=f(-x,y)=f(x,-y)$,则 $I_1=4I_2$.

分析 利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性证明.

解 若记 D_3:$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b\end{cases}$,由于 D_1 关于 x 轴对称,$f(x,y)$是关于 y 的偶函数,故

$$I_1=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又由于 D_3 关于 y 轴对称,$f(x,y)$是关于 x 的偶函数,故

$$I_1=2\iint\limits_{D_3}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\times 2\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4I_2.$$

例 8 计算由四个平面 $x=0$,$y=0$,$x=1$,$y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得立体的体积.

分析 要画出题设的柱体,先画出柱体在 xOy 面上的投影:$0\leqslant x\leqslant 1$,$0\leqslant y\leqslant 1$. 因为柱体的顶 $2x+3y+z=6$ 是平面,在投影正方形四个顶点上的高分别为 6,3,1,4,连接相应的交线即得柱体的草图(见图 4-1).

解 $V=\iint\limits_{D}(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(6-2x-3y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1\left[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2\right]_0^1\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\frac{9}{2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}.$$

例 9 设平面薄片所占的闭区域 D(见图 4-2)是由螺线 $r=2\theta$ 上一段弧($0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$)与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成的,它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$,求该薄片的质量.

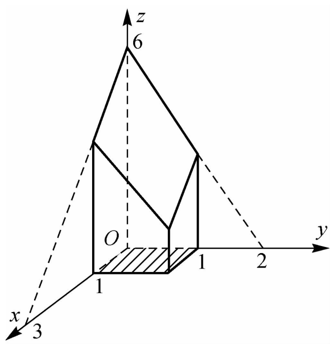

图 4-1

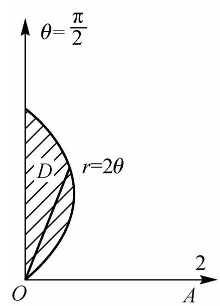

图 4-2

分析 利用二重积分的物理意义:当 $f(x,y)$ 表示平面薄片 D 的面密度时,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示 D 的质量,并选择适当的坐标系计算即可.

解 $M=\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}r^2\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\left[r^4\right]_0^{2\theta}\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^5}{40}.$

三、课后习题全解

习题 4-1

1. 解 (1)第 4 卦限;(2)第 5 卦限;(3)第 8 卦限;(4)第 3 卦限.

2. 解 (1)x 轴负方向上;(2)y 轴负方向上;(3)yOz 面上;(4)xOz 面上.

3. 解 (1)点 $P(x,y,z)$ 关于 xOy 面、yOz 面及 zOx 面的对称点为$(x,y,-z)$,$(-x,y,z)$,$(x,-y,z)$.

(2)点 $P(x,y,z)$关于 x 轴、y 轴与 z 轴的对称点为$(x,-y,-z)$,$(-x,y,-z)$,$(-x,-y,z)$.

(3)点 $P(x,y,z)$关于原点的对称点为$(-x,-y,-z)$.

4.解　点 $P(-3,4,-5)$与原点的距离为

$$d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{(-3)^2+4^2+(-5)^2}=5\sqrt{2},$$

过点 $P(-3,4,-5)$作 x 轴的垂线,垂足为 M,且 M 的坐标为$(-3,0,0)$,则点 P 到 x 轴的距离为

$$|PM|=\sqrt{(-3+3)^2+(4-0)^2+(-5-0)^2}=\sqrt{41},$$

同理,可求得点 P 到 y 轴与 z 轴的距离分别为 $\sqrt{34}$和 5.

5.解　设动点的坐标为(x,y,z),则根据题意,有

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+(z-z)^2},$$

即

$$z^2-2x-6y+2z+11=0.$$

6.解　设(x,y,z)为球面上的任一点,由于球面通过原点,因此原点到球心的距离为半径,即

$$r=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

故所求的球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14,$$

即

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z=0.$$

7.解　$x=1$ 表示过 xOy 面内的直线 $x=1$ 且平行于 yOz 面的平面;$x+y=1$ 表示过 xOy 面内的直线 $x+y=1$ 且平行于 z 轴的平面;$x^2+y^2=1$ 表示以 xOy 面内的圆 $x^2+y^2=1$ 为准线,母线平行于 z 轴的圆柱面.

8.解　(1)$x^2+y^2-3z=0$ 表示旋转抛物面.

(2)$x^2-y^2=0$ 表示过 xOy 面内的两条直线 $x\pm y=0$ 的两个相交平面.

(3)$x^2-y^2=1$ 表示母线平行于 z 轴的双曲柱面.

(4)$x^2=4y$ 表示母线平行于 z 轴的抛物柱面.

习题 4-2

1.解　(1)定义域为 $D=\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$(见图 4-3).

(2)定义域为$\{(x,y)\mid y\leqslant x^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$(见图 4-4).

(3)定义域为$\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1,|y|\geqslant 1\}$(见图 4-5).

(4)定义域为$\{(x,y)\mid x<y\leqslant -x 且 x<0\}$(见图 4-6).

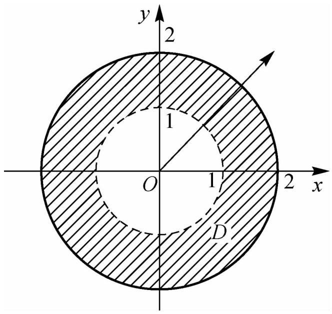

图 4-3

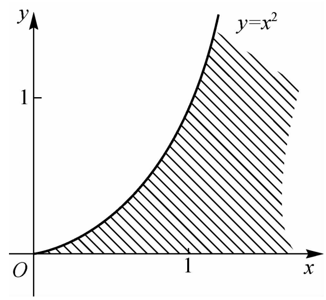

图 4-4

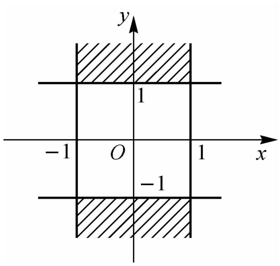

图 4-5

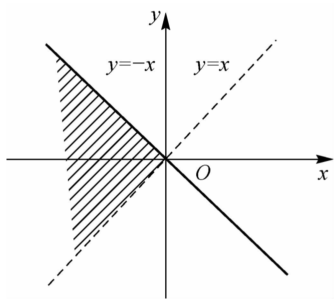

图 4-6

2. 解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}y=1\cdot 0=0.$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{(\sqrt{xy+4}-2)(\sqrt{xy+4}+2)}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+4}+2}=\dfrac{1}{4}.$

(3) 因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x=0$，且 $\left|\sin\dfrac{1}{x+y}\right|\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x\sin\dfrac{1}{x+y}=0.$

(4) 因为 $(1,0)$ 在初等函数 $\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 的定义域内，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2.$

3. 证明略.

4. 解 (1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2\cdot y-y^3=3x^2y-y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3\cdot 1-3y^2\cdot x=x^3-3xy^2.$

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cot\dfrac{x}{y}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y}\cot\dfrac{x}{y}\sec^2\dfrac{x}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cot\dfrac{x}{y}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot$

$\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{y^2}\cot\frac{x}{y}\sec^2\frac{x}{y}$.

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\cos\frac{y}{x}+\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\sin\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$.

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$，因为 $z=(1+xy)^y=e^{y\ln(1+xy)}$，所以 $\frac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right]$.

(5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x+y^2+z^3}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+x+y^2+z^3}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3}$.

(6) $\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\ln x\cdot zy^{z-1}=zx^{y^z}y^{z-1}\ln x$，$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x\cdot y^z\ln y=x^{y^z}y^z\ln x\ln y$.

5.解　因为 $f'_x(x,y)=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$f'_y(x,y)=1-\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=1-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，所以 $f'_x(3,4)=0.4$，$f'_y(3,4)=0.2$.

6.解　$\frac{\partial z}{\partial x}=20x^3y+20xy^3$，$\frac{\partial z}{\partial y}=5x^4+30x^2y^2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(20x^3y+20xy^3)=60x^2y+20y^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(5x^4+30x^2y^2)=60x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(20x^3y+20xy^3)=20x^3+60xy^2.$$

7.证明略.

8.解　(1)因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=y+\frac{1}{y}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=x-\frac{x}{y^2}$，所以 $dz=(y+\frac{1}{y})dx+x(1-\frac{1}{y^2})dy$.

(2)因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}$，所以 $dz=\frac{2(xdx+ydy)}{x^2+y^2}$.

(3)因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y}{x^2+y^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$，

所以 $\mathrm{d}z=\dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(4)因为$\dfrac{\partial u}{\partial x}=yzx^{yz-1}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x$,$\dfrac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x$,所以 $\mathrm{d}u=x^{yz}\left(\dfrac{yz}{x}\mathrm{d}x+z\ln x\mathrm{d}y+y\ln x\mathrm{d}z\right)$.

9.解　因为 $\Delta z=\dfrac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\dfrac{y}{x}$,$\mathrm{d}z=-\dfrac{y}{x^2}\Delta x+\dfrac{1}{x}\Delta y$,所以,当 $x=2$,$y=1$,$\Delta x=0.1$,$\Delta y=0.2$ 时,$\Delta z=\dfrac{1+0.2}{2+0.1}-\dfrac{1}{2}\approx 0.0714$,则 $\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{2^2}\times 0.1+\dfrac{1}{2}\times 0.2=0.075$.

10.解　设 $f(x,y)=x^y$,则 $\mathrm{d}f(x,y)=yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y$.

当 $x=1$,$y=2$,$\Delta x=-0.02$,$\Delta y=0.03$ 时,$(0.98)^{2.03}\approx 1^2+2\times 1^{2-1}\times(-0.02)+1^2\times\ln 1\times 0.03=0.96$.

11.解　设 $f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$,则 $\mathrm{d}f(x,y)=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta x+\dfrac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Delta y$.

当 $x=1$,$y=2$,$\Delta x=0.02$,$\Delta y=-0.03$ 时,$\sqrt{(1.02)^3+(1.97)^3}\approx\sqrt{1^3+2^3}+\dfrac{3\times 1^2}{2\sqrt{1^3+2^3}}\times 0.02+\dfrac{3\times 2^2}{2\sqrt{1^3+2^3}}\times(-0.03)=2.95$.

12.解　(1)因为$\dfrac{\partial z}{\partial u}=2u\ln v$,$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{u^2}{v}$,$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{y}$,$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}$,$\dfrac{\partial v}{\partial x}=3$,$\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2$,所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\dfrac{1}{y}+\dfrac{u^2}{v}\cdot 3=\dfrac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\dfrac{3x^2}{(3x-2y)y^2}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)+\dfrac{u^2}{v}\cdot(-2)=-\dfrac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\dfrac{2x^2}{(3x-2y)y^2}$.

(2)因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{x-2y}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2\mathrm{e}^{x-2y}$,$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=3t^2$. 所以$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{x-2y}\cos t-2\mathrm{e}^{x-2y}\cdot 3t^2=\mathrm{e}^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

(3)$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{1+x^2y^2}+\dfrac{x}{1+x^2y^2}\cdot\mathrm{e}^x=\dfrac{\mathrm{e}^x(1+x)}{1+x^2\mathrm{e}^{2x}}$.

(4)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=(2uv-v^2)\cos y+(u^2-2uv)\sin y=3x^2\sin y\cos y\cdot(\cos y-\sin y)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=(2uv-v^2)\cdot(-x\sin y)+(u^2-2uv)x\cos y=-2x^3\sin y\cos y(\sin y+\cos y)+x^3(\sin^3 y+\cos^3 y)$.

13. 解　(1)令 $u=x^2-y^2, v=e^{xy}$，则

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot e^{xy}y$；

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=f_1'\cdot(-2y)+f_2'\cdot e^{xy}x$.

(2)令 $t=x^2+y^2+z^2$，则

$\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2)$，$\frac{\partial u}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2)$.

14. 解　(1)解法一　两端对 x 求导(注意 y 是 x 的函数)，得

$$\cos y\cdot y'+e^x-y^2-x\cdot 2y\cdot y'=0,$$

解方程，得 $y'=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$.

解法二　令 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2$，则 $F_x'=e^x-y^2$，$F_y'=\cos y-2xy$，

所以 $y'=-\frac{F_x'}{F_y'}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}$.

(2)解法一　两端对 x 求导，得

$$\frac{1\cdot z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x},$$

解方程，得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{z+x}$.

两端对 y 求导，得

$$-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{z}\cdot\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2},$$

解方程，得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{(z+x)y}$.

解法二　令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则 $F_x'=\frac{1}{z}$，$F_y'=-\frac{y}{z}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y}$，$F_z'=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{z^2}x+\frac{1}{z}$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{z}{x+z};\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{z^2}{y(z+x)}.$$

习题 4-3

1. 解　(1)函数的定义域为整个 xOy 面.

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=2(x^2+y^2)\cdot 2x-4x=0 \\ f'_y(x,y)=2(x^2+y^2)\cdot 2y+4y=0 \end{cases},$$

得驻点分别为$(0,0)$,$(1,0)$,$(-1,0)$.求出二阶导数为

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2+4y^2-4, f''_{xy}(x,y)=8xy, f''_{yy}(x,y)=4x^2+12y^2+4.$$

在点$(0,0)$处,$B=0$,$A=-4$,$C=4$,$B^2-AC=16>0$,故在点$(0,0)$不取得极值.

在点$(1,0)$与点$(-1,0)$处,$B=0$,$A=8$,$C=8$,$B^2-AC=0^2-8\times 8=-64<0$,且$A=8>0$,故函数在点$(1,0)$与点$(-1,0)$处取得极小值,$f(1,0)=f(-1,0)=-1$.

(2)函数的定义域为整个 xOy 面.

解方程组

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{5}=0 \\ f'_y(x,y)=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}-\dfrac{y}{2}=0 \end{cases},$$

得驻点$(0,0)$,$(2,0)$.求出二阶导数为

$$f''_{xx}(x,y)=\frac{-2x^2+2y^2+2}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{2x}{5},$$

$$f''_{xy}(x,y)=\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}, f''_{yy}(x,y)=\frac{2x^2-2y^2+2}{(1+x^2+y^2)^2}-\frac{1}{2}.$$

在点$(0,0)$处,$B=0$,$A=2$,$C=\dfrac{3}{2}$,$B^2-AC=-3<0$,且$A=2>0$,故在点$(0,0)$处取得极大值,极大值为 $f(0,0)=1$.

在点$(2,0)$处,$B=0$,$A=-\dfrac{26}{25}$,$C=-\dfrac{1}{10}$,$B^2-AC=-\dfrac{13}{125}<0$,且$A=-\dfrac{26}{25}<0$,故在点$(2,0)$处取得极大值,$f(2,0)=\ln(1+2^2+0^2)+1-\dfrac{2^3}{15}+\dfrac{0^2}{4}=\ln 5+\dfrac{7}{15}$.

2.解　构造拉格朗日函数为

$$L(x,y,\lambda)=1-x^2-y^2+\lambda(y-2),$$

求$L(x,y,\lambda)$的偏导数,令其等于零,得:

$$\begin{cases} L'_x=-2x=0 \\ L'_y=-2y+\lambda=0. \\ L'_\lambda=y-2=0 \end{cases}$$

解方程组,得驻点为$(0,2)$.

又因为函数 $z=1-x^2-y^2$ 在定义域内只有极大值点,故点$(0,2)$就是所求的极大值点,即极大值为 $f(0,2)=-3$.

3.解　设长方形厂房的长、宽、高分别为 x、y、z,除前墙和屋顶外的墙身每单位面积的造价是 k 元,则根据题意,要求总造价函数 $R(x,y,z)=3kxz+1.5kxy+$

$k(2yz+xz)$在条件 $xyz=1\ 500\ 000$ 下的最小值. 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=3kxz+1.5kxy+k(2yz+xz)+\lambda(xyz-1\ 500\ 000).$$

解方程组$\begin{cases}L'_x=3kz+1.5ky+kz+\lambda yz=0\\L'_y=1.5kx+2kz+\lambda xz=0\\L'_z=3kx+k(2y+x)+\lambda xy=0\\L'_\lambda=xyz-1\ 500\ 000=0\end{cases}$,得驻点为 $x=100,y=200,z=75$.

由实际问题本身知,最省费用一定存在,且只有唯一的驻点(100,200,75),所以,当厂房前墙的长度和厂房的高度分别为 100 m 与 75 m 时,厂房的造价最小.

4. 解 (1)利润函数为 $L(x_1,x_2)=R-x_1-x_2=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$,则根据题意,解方程组$\begin{cases}R'_{x_1}=13-8x_2-4x_1=0\\R'_{x_2}=31-8x_1-20x_2=0\end{cases}$,得驻点 $x_1=0.75,x_2=1.25$.

由实际问题本身知,电台广告费用为 0.75 万元,报纸广告费用为 1.25 万元时利润最大,即为最优广告策略.

(2)根据题意,要求 $L(x_1,x_2)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2$ 在条件 $x_1+x_2=1.5$ 下的最大值. 构造拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,\lambda)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5),$$

解方程组$\begin{cases}L'_{x_1}=13-8x_2-4x_1+\lambda=0\\L'_{x_2}=31-8x_1-20x_2+\lambda=0\\L'_\lambda=x_1+x_2-1.5=0\end{cases}$,得驻点为 $x_1=0,x_2=1.5$.

由实际问题本身知,广告费用 1.5 万元全部用于报纸广告可使利润最大.

5. 解 根据题意,要求函数 $S(x,y)=0.005x^2y$ 在条件 $x+2y=150$ 下的最大值问题. 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=0.005x^2y+\lambda(x+2y-150).$$

解方程组$\begin{cases}L'_x=0.01xy+\lambda=0\\L'_y=0.005x^2+2\lambda=0\\L'_\lambda=x+2y-150=0\end{cases}$,得驻点(0,75)(不合题意,舍去),(100,25).

由问题本身的实际意义及驻点的唯一性可知,购进 A 原料 75 吨,B 原料 37.5 吨时,生产的数量最大,最大数量为 $S(100,25)=0.005\times100^2\times25=1\ 250$ 吨.

习题 4-4

1. 解 因为$\iint\limits_D k\,\mathrm{d}\sigma$ 表示以区域 D 为底,以 $f(x,y)=k$ 为高的柱体体积,即等于

区域 D 的面积 σ 乘以高 k. 所以 $\iint\limits_D k\,\mathrm{d}\sigma = k\sigma$.

2. 解 (1)因为在区域 D 上, $0\leqslant xy\leqslant 1$, $0\leqslant x+y\leqslant 2$, 即 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$, 且区域 D 的面积为 1, 所以根据二重积分的估值性, 有

$$0\leqslant I=\iint\limits_D xy(x+y)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant 2.$$

(2)因为在区域 D 上, $1\leqslant x+y+1\leqslant 4$, 区域 D 的面积为 2, 所以根据二重积分的估值性, 有

$$2\leqslant I=\iint\limits_D (x+y+1)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant 8.$$

(3)因为在区域 D 上, $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$, 所以 $9\leqslant x^2+4y^2+9\leqslant 4(x^2+y^2)+9\leqslant 25$, 且区域 D 的面积为 4π, 故根据二重积分的估值性, 有 $36\pi\leqslant\iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\,\mathrm{d}\sigma\leqslant 100\pi$.

3. 解 (1)因为在区域 D 上, 易知 $0\leqslant x+y\leqslant 1$, 故 $(x+y)^2\geqslant(x+y)^3$, 所以根据二重积分的保序性, 有 $\iint\limits_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\geqslant\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$.

(2)因为在区域 D 上, 有 $\mathrm{e}<3\leqslant x+y\leqslant 6$, 故 $\ln(x+y)>1$, 于是 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$, 所以根据二重积分的保序性, 有

$$\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma.$$

4. 解 (1)画出积分区域 D 的图形(见图 4-7). 将 D 表示成 X-型区域 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1\leqslant y\leqslant 1-x\end{cases}$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

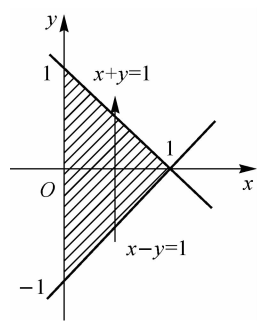

图 4-7

(2)画出积分区域 D 的图形(见图 4-8). 将 D 表示成 X-型区域 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 3\\ x\leqslant y\leqslant 3x\end{cases}$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_1^3\mathrm{d}x\int_x^{3x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(3)画出积分区域 D 的图形(见图 4-9). 用 $x=1$ 将区域 D 分为两个小的 X-型区域, 并表示为 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x\end{cases}$ 和 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ \dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant \dfrac{2}{x}\end{cases}$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

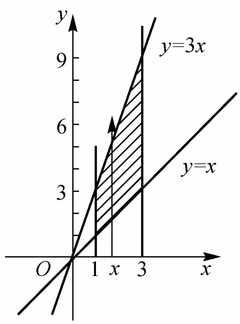

图 4-8

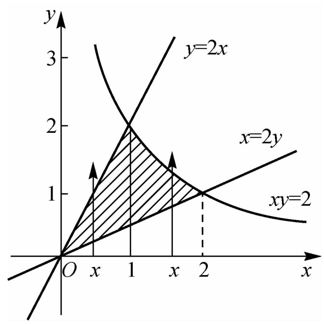

图 4-9

5. 解　(1)画出积分区域 D 的图形(见图 4-10). 将区域 D 表示成 X-型区域 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x\sqrt{y}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1 (x^{\frac{7}{4}}-x^4)\mathrm{d}x=\frac{6}{55}.$$

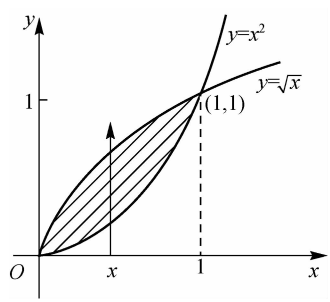

图 4-10

(2)画出积分区域 D 的图形(见图 4-11). 将 D 表示成 Y-型区域 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 2\\ \dfrac{y}{2}\leqslant x\leqslant y\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\mathrm{d}\sigma=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{y} (x^2+y^2-x)\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^2 \left[\frac{1}{3}x^3+y^2x-\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y}\mathrm{d}y=\frac{13}{6}.$$

(3)画出积分区域 D 的图形(见图 4-12). 将 D 表示成 X-型区域$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\leqslant 2x\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_x^{2x}\frac{y}{x}\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\frac{y^2}{2x}\right]_x^{2x}\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

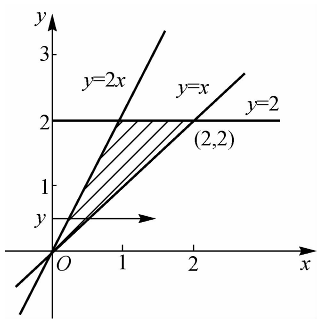

图 4-11

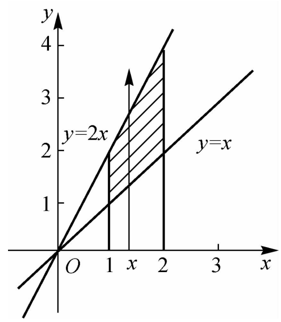

图 4-12

(4)画出积分区域 D 的图形(见图 4-13). 将 D 表示成 Y-型区域$\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 2\\ y^2\leqslant x\leqslant y+2\end{cases}$,则

$$\iint\limits_D 2xy^2\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^2 2y^2\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}x\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 2y^2\ \frac{1}{2}\left[x^2\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-1}^2 (y^4+4y^3+4y^2-y^6)\mathrm{d}y=15\frac{6}{35}.$$

6. 解 (1)画出积分区域 D 的图形(见图 4-14). 将 D 表示成 Y-型区域$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ \mathrm{e}^y\leqslant x\leqslant \mathrm{e}\end{cases}$,则

$$\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

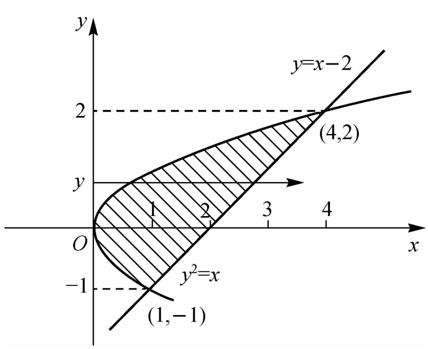

图 4-13

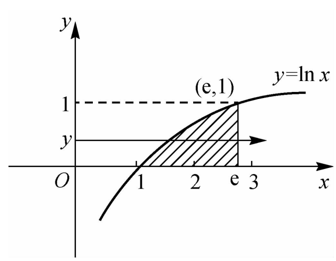

图 4-14

(2)画出积分区域 D 的图形(见图 4-15). 将 D 表示成 Y-型区域$\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\end{cases}$,则

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3)画出积分区域 D 的图形(见图 4-16). 将 D 表示成 Y-型区域 $\begin{cases}0\leqslant y\leqslant 1\\ 1+\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 2-y\end{cases}$,则

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

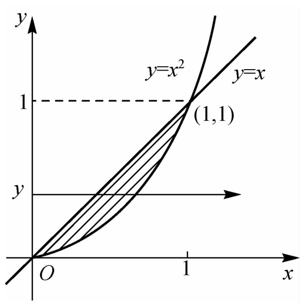

图 4-15

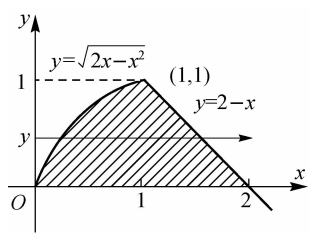

图 4-16

(4)画出积分区域 D 的图形(见图 4-17). 将 D 表示成 Y-型区域 $\begin{cases}-1\leqslant y\leqslant 0\\ -\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant y-1\end{cases}$,则

$$\int_{-1}^0 \mathrm{d}x\int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

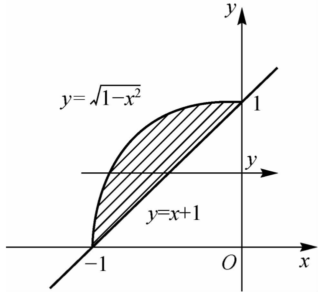

图 4-17

7.解 (1)画出区域 D 的图形(见图 4-18). 边界曲线的极坐标方程为 $r=a$ 与 $r=b$,故 D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\ a\leqslant r\leqslant b\end{cases}.$$

因此,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b rf(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$.

(2)画出区域 D 的图形(见图 4-19). 边界曲线 $x^2+y^2=2x$ 的极坐标方程为 $r=2\cos\theta$,故 D 可表示为

$$\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\ 0\leqslant r\leqslant2\cos\theta\end{cases}.$$

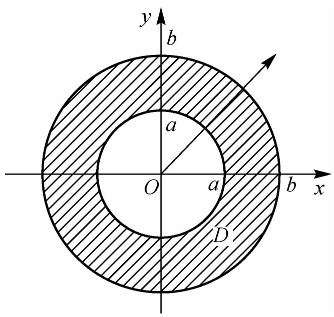

图 4-18

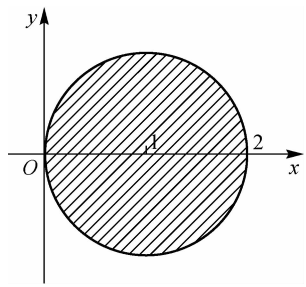

图 4-19

因此,$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ $r\mathrm{d}r$.

8.解 (1)画出区域 D 的图形(见图 4-20). D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\ 1\leqslant r\leqslant2\end{cases}.$$

所以,$\iint\limits_D\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2}\pi)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\dfrac{\sin r\pi}{r}\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\sin r\pi\mathrm{d}r=2\pi\times\dfrac{1}{\pi}(-\cos\pi r)\Big|_1^2=-4$.

(2)画出区域 D 的图形(见图 4-21). 边界曲线 $x^2+y^2=2y$ 的极坐标方程为 $r=2\sin\theta$,故 D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi\\ 0\leqslant r\leqslant2\sin\theta\end{cases}.$$

所以，$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D r\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}$.

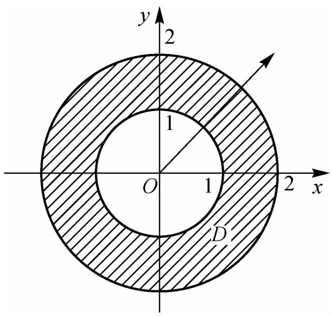

图 4-20

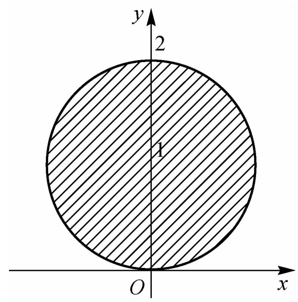

图 4-21

(3)画出区域 D 的图形(见图 4-22). D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}.\\ 0\leqslant r\leqslant 1\end{cases}$$

故 $\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \ln(1+r^2)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+r^2)r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+r^2)\mathrm{d}(1+r^2)=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times[(1+r^2)\ln(1+r^2)-(1+r^2)]_0^1=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$.

(4)画出区域 D 的图形(见图 4-23). D 可表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}.\\ 1\leqslant r\leqslant 2\end{cases}$$

故 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D r^3\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{15\pi}{16}$.

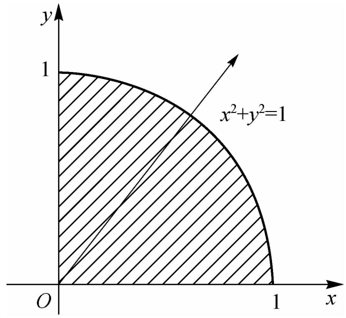

图 4-22

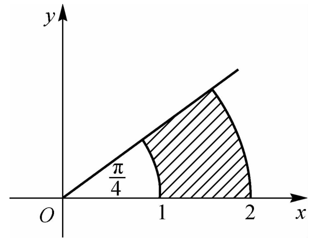

图 4-23

9. 解 (1)易知 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant a,0\leqslant x\leqslant \sqrt{a^2-y^2}\}$,用极坐标可表示为 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant a\right\}$. 故原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r=\frac{a^4\pi}{8}$.

(2)易知 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2a,0\leqslant y\leqslant \sqrt{2ax-x^2}\}$,用极坐标可表示为 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta\right\}$. 故原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\,\mathrm{d}r=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}\times 16a^4\times\cos^4\theta\mathrm{d}\theta=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi a^4}{4}$.

测试题四

一、填空题

1. $d_O=\sqrt{4^2+(-3)^2+5^2}=5\sqrt{2}$;$d_x=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$.

2. 方程可化为$-x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=-1$,即它表示的是双叶双曲面.

3. 定义域为 $y^2-4x+1\geqslant 0$.

4. $\mathrm{d}u=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)$.

5. 令 $F(x,y)=\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2$,则 $F'_x=\mathrm{e}^x-y^2$,$F'_y=\cos y-2xy$,得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{y^2-\mathrm{e}^x}{\cos y-2xy}$.

二、选择题

1. 因为 A 表示球面,B 表示椭圆柱面,C 表示抛物柱面,D 表示两平行平面,故选 C.

2. 因为 $z=\int_0^1 (x+xy)^2\mathrm{d}t=(x+xy)^2\ [t]_0^1=(x+xy)^2$，故选 C.

3. 因为$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{x-2y}=A$（$A$ 存在），即(x,y)沿 $y=x$ 趋于$(0,0)$时，极限为 A. 而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2+y^2}{x-2y}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x}}\dfrac{x^2+x^2}{x-2x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=x}}(-2x)=0=A$，故选 A.

4. 因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^x\cos y$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\mathrm{e}^x\sin y$，故选 D.

5. 因为函数在$(2,-1)$处取得极小值，故$\begin{cases}z_x'(2,-1)=4-p+q=0\\z_y'(2,-1)=-2+2p=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}p=1\\q=-3\end{cases}$，即 $z=x^2+y^2+xy-3x$，从而 $f(2,-1)=2^2+(-1)^2+2\times(-1)-3\times2=-3$. 故选 B.

三、判断题

1. (×). 因为 $z=\dfrac{x-y}{x+y}$在$(0,0)$处无意义.

2. (√). 因为此时有 $\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，$\lim\limits_{\rho\to0}\Delta f=\lim\limits_{\rho\to0}[A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)]=0$.

3. (×). 如 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq0\\0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在$(0,0)$处有 $f_x'(0,0)=0$，$f_y'(0,0)=0$. 但 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，当$(\Delta x,\Delta y)$沿 $y=x$ 趋于$(0,0)$时，$\dfrac{\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\dfrac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\dfrac{\Delta x\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\dfrac{1}{2}$，它不能随 $\rho\to0$ 而趋于 0，这表示 $\rho\to0$ 时，$\Delta z-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]$并不是较 ρ 高阶的无穷小. 因此，函数在$(0,0)$处不可微.

4. (×). 如 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$处取得极大值，但 $f_x'(0,0)$与 $f_y'(0,0)$无意义.

5. (×). 由二重积分的几何意义可知.

四、综合题

1. 解　$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-tx\cdot ty\tan\dfrac{tx}{ty}=t^2(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y})$.

2. 解　因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$，且$\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant1$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cdot$

$\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，所以函数在$(0,0)$处连续.

3. 解 (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y)=e^x\sin y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y)=e^x\cos y$.

(2)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{1}{y}$.

(3)令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz$，则 $F'_x=-3yz$，$F'_y=-3xz$，$F'_z=3z^2-3xy$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$.

4. 解 (1)因为 $z'_x=2(xy+1)\cdot y$，所以$z'_x|_{(2,2)}=2(2\times2+1)\times2=20$.

(2)因为 $f\left(x,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$，故 $f'_x\left(x,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$，所以 $f'_x\left(\pi,\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{(-1-0)^2}=2$.

5. 解 (1)$dz=2x\cos(x^2+y^2)dx+2y\cos(x^2+y^2)dy$.

(2)$du=\dfrac{1}{x+y^2+z^3}(dx+2ydy+3z^2dz)$.

6. 解 (1)$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2yx^{2y-1}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x^{2y-1}+4yx^{2y-1}\ln x$.

(2)因为 $f'_x=y^2+2zx$，$f'_y=2xy+z^2$，$f'_z=2yz+2xz$，所以，$z'_x(0,0,1)=0$，$z'_y(1,0,2)=-1$.

7. 解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_1\cdot2x+f'_2\cdot e^{xy}\cdot y=2xf'_1+ye^{xy}f'_2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf'_1+xe^{xy}f'_2$.

8. 解 (1)令 $F(x,y)=\ln(x^2+y^2)-\arctan\dfrac{y}{x}$，则

$$F'_x=\frac{2x}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{2x+y}{x^2+y^2},\quad F'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}-\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{2y-x}{x^2+y^2},$$

所以 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=\dfrac{2x+y}{x-2y}$.

(2)令 $F(x,y,z)=y^2ze^{x+y}-\sin(xyz)$，则 $F'_x=y^2ze^{x+y}-yz\cos(xyz)$，$F'_y=2yze^{x+y}+y^2ze^{x+y}-xz\cos(xyz)$，$F'_z=y^2e^{x+y}-xy\cos(xyz)$，故 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=\dfrac{yze^{x+y}-z\cos(xyz)}{x\cos(xyz)-ye^{x+y}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=\dfrac{xz\cos(xyz)-(2yz+y^2z)e^{x+y}}{y^2e^{x+y}-xy\cos(xyz)}$.

9.解　函数的定义域为整个 xOy 面.

解方程组$\begin{cases} f'_x(x,y)=2x+y-3=0 \\ f'_y(x,y)=2y+x-3=0 \end{cases}$,得驻点(1,1).求出二阶导数

$$f''_{xx}(x,y)=2, f''_{xy}(x,y)=1, f''_{yy}(x,y)=2,$$

在点(1,1)处,$B^2-AC=1^2-2\times2=-3<0$,且 $A=2>0$,故函数在点(1,1)处取得极小值,$f(1,1)=1^2+1^2+1\times1-3\times1-3\times1=-3$.

10.解　(1)易知 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2a, 0\leqslant y\leqslant \sqrt{2ax-x^2}\}$,可用极坐标表示为 $D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta\right\}$,则 $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\iint\limits_D r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r=\frac{3\pi a^4}{4}$.

(2)$\iint\limits_D(x^2+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1=\frac{33}{140}$.

(3)易知 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant\sqrt{y}\}$既是 X-型区域,又是 Y-型区域,还可表示为 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant x\}$,所以

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^1(\sin x-x\sin x)\mathrm{d}x=$$
$$-[\cos x]_0^1+[x\cos x-\sin x]_0^1=1-\sin 1.$$

五、应用题

1.解　设长方体箱子的长、宽、高分别为 x、y、z,则要求表面积 $S=2(xy+xz+yz)$在条件 $xyz=V$ 下的最小值.构造拉格朗日函数 $L(x,y,z,\lambda)=2(xy+xz+yz)+\lambda(xyz-V)$.

解方程组$\begin{cases} L'_x=2y+2z+\lambda yz=0 \\ L'_y=2x+2z+\lambda xz=0 \\ L'_z=2x+2y+\lambda xy=0 \\ L'_\lambda=xyz-V=0 \end{cases}$,得驻点 $x=\sqrt[3]{V}, y=\sqrt[3]{V}, z=\sqrt[3]{V}$.

由问题本身的实际意义及驻点的唯一性可知,当长方体箱子的长、宽、高都等于$\sqrt[3]{V}$时,表面积最小,即所用材料最省.

2. 解　根据题意，要求利润函数 $L(x,y)=\frac{1}{5}\left(\frac{200x}{x+5}+\frac{100y}{10+y}\right)-x-y$ 在条件 $x+y=25$ 下的最大值. 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=\frac{1}{5}\left(\frac{200x}{x+5}+\frac{100y}{10+y}\right)-x-y+\lambda(x+y-25)$.

解方程组 $\begin{cases} L_x'=\dfrac{200}{(x+5)^2}-1+\lambda=0 \\ L_y'=\dfrac{200}{(10+y)^2}-1+\lambda=0 \\ L_\lambda'=x+y-25=0 \end{cases}$，得驻点 $x=15, y=10$.

根据问题本身的实际意义及驻点的唯一性知，当投入两种广告的费用分别为 15 万元和 10 万元时，可使利润最大.

3. 证明略.