

# 第3单元 函数

## 3.1 函数的概念



### 学习目标

1. 理解函数的定义.
2. 会求简单函数的函数值.



### 知识点归纳

本节主要学习函数的一些基本概念.

(1) **函数**: 设集合  $D$  是一个非空集合, 如果按照某个对应法则  $f$ , 对于  $D$  中的任意一个数  $x$ , 都有唯一确定的数  $y$  与之对应, 则这种对应关系叫作集合  $D$  上的一个函数, 记作  $y = f(x), x \in D$ .

(2) **定义域**: 自变量的取值范围即为函数的定义域  $D$ , 用集合来表示.

(3) **值域**: 所有函数值构成的集合  $\{y | y = f(x), x \in D\}$  叫作函数  $f(x)$  的**值域**.



4. 设函数  $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ , 求  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(a)$ .

### 自我检测

1. 已知  $A, B$  两地相距 90 km, 某人骑自行车由  $A$  地去  $B$  地, 假如他平均时速为 15 km, 请写出骑车人与终点  $B$  之间的距离  $y$  (km) 与出发时间  $x$  (h) 之间的函数关系, 并指出该问题中的常量与变量.

2. 求下列函数的定义域.

$$(1) f(x) = 2x^2 - 4x + 2;$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{2x-1};$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}};$$

$$(4) f(x) = \frac{\sqrt{4x+1}}{2x-1};$$

$$(5) f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

3. 求下列函数的函数值.

(1) 已知  $f(x) = \frac{x-1}{2}$ , 求  $f(-1), f(a), f(2a)$ ;

(2) 已知  $f(x) = \frac{x}{3x+1}$ , 求  $f(0), f(a+1), f(a) - f(-a)$ .

4. 已知  $f(x) = \frac{x+1}{2}, g(x) = 3x^2 - 5x + 4$ , 求  $f(3) + g(-2)$ .

## 3.2 函数的表示方法



### 学习目标

1. 理解函数的三种表示方法.
2. 会用函数的三种表示方法表示简单的函数.



### 知识点归纳

- (1) 函数的表示方法有三种: 解析法、列表法、图像法.
- (2) 描点法是作函数图像的基本方法, 其基本步骤为:
  - ① 确定函数的定义域;

②选取自变量  $x$  的若干值,计算出它们对应的函数值  $y$ ,列出表格;

③以表格中的  $x$  值为横坐标,对应的  $y$  值为纵坐标,在直角坐标系中依次描出相应的点  $(x, y)$ ;

④根据题意确定是否将描出的点连结成光滑的曲线.

(3)分段函数:在定义域的不同部分,有不同对应法则的函数叫作分段函数,其定义域是自变量  $x$  的不同取值范围的并集.



### 巩固练习

1. 填空题.

(1)函数  $f(x)$  用列表法表示为

$x$	-1	0	1	2	3
$y$	0	1	2	3	4

则函数的定义域为 \_\_\_\_\_, 值域为 \_\_\_\_\_.

(2)已知  $f(x) = \begin{cases} 3-x^2, & x \leq 0, \\ 2x+3, & x > 0, \end{cases}$  则  $f(-2) =$  \_\_\_\_\_.

(3)采购某种原材料要支付固定的手续费 20 元,设这种原料的价格为 10 元/kg,则采购费  $y$ (元)与采购量  $x$ (kg)之间的函数解析式为 \_\_\_\_\_.

(4)已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x + 3, & 0 < x \leq 3, \\ -2x + 1, & 3 < x \leq 8, \\ 3, & 8 < x \leq 12, \end{cases}$  则函数的定义域是 \_\_\_\_\_,

$f(3) =$  \_\_\_\_\_,  $f(8) =$  \_\_\_\_\_.

2. 市面上某品牌矿泉水的价格是 1.2 元/瓶,应付款  $y$  是购买该品牌矿泉水数量  $x$  的函数,当购买 5 瓶以内(含 5 瓶)的该品牌矿泉水时,请分别用列表法、解析法和图像法表示这个函数.



2. 写出下列函数的解析式.

(1) 设函数  $y=f(x)$ , 当  $x<0$  时,  $f(x)=0$ ; 当  $x\geq 0$  时,  $f(x)=2$ ;

(2) 设函数  $y=f(x)$ , 当  $x\leq -1$  时,  $f(x)=x+1$ ; 当  $-1<x<1$  时,  $f(x)=0$ ; 当  $x\geq 1$  时,  $f(x)=x-1$ .

3. 作出下列函数的图像.

(1)  $f(x)=x^2-5$ ;

(2)  $f(x)=\begin{cases} x-4, & x\geq 0, \\ 1, & x<0. \end{cases}$

### 3.3 函数的性质



#### 学习目标

1. 理解函数单调性的概念以及图像特征, 会根据函数的图像判断函数的单调性.
2. 理解奇函数和偶函数的定义以及图像特征, 会判断简单函数的奇偶性.



#### 知识点归纳

(1) **增函数、减函数**: 设函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 区间  $I\subseteq D$ . 如果取区间  $I$  中的任意两点  $x_1, x_2$ , 则当  $x_1<x_2$  时, 有  $f(x_1)<f(x_2)$  成立, 那么函数  $y=f(x)$  叫作区间  $I$  上的**增函**





单调\_\_\_\_\_.

(5) 函数  $y=f(x)$  在区间  $(2,7)$  内为增函数, 则  $f(3)-f(5)$  \_\_\_\_\_ 0 (填“<”或“>”).

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1)  $y=x^5+2x$ ;

(2)  $y=x^2-1$ ;

(3)  $y=x^3-1$ .



### 自我检测

1. 选择题.

(1) 下列各函数中, 为偶函数的是( ).

A.  $y=2x$

B.  $y=x^2+4x$

C.  $y=\sqrt{1-x}$

D.  $y=-1$

(2) 列各函数中, 为奇函数的是( ).

A.  $y=x+1$

B.  $y=x-x^2$

C.  $y=\frac{3}{x}$

D.  $y=x^2-4x+4$

(3) 函数  $y=x(x-2)$  的减区间是( ).

A.  $(0,2)$

B.  $(-\infty,1)$

C.  $(1,+\infty)$

D.  $(-1,+\infty)$

(4) 下列各函数中, 在  $(0,+\infty)$  上为增函数的是( ).

A.  $y=-4x^2$

B.  $y=-2x+3$

C.  $y = \frac{2}{x}$

D.  $y = x^2 - 9$

2. 判断下列个函数的奇偶性.

(1)  $y = 2x - x^3$ ;

(2)  $y = \frac{3 - x^2}{5x^4}$ ;

3. 作出函数  $y = x^2 + 3$  在  $(-\infty, 0)$  上的图像, 并判断它的单调性.

4. 已知函数  $f(x)$  是奇函数, 在  $(-\infty, 0)$  上是减函数, 判断它在  $(0, +\infty)$  上的单调性.

5. 设函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且在区间  $(-\infty, 0)$  上是减函数, 实数  $a$  满足不等式  $f(2a^2 - 2a) > f(2a^2 + a - 3)$ , 求  $a$  的取值函数.

6. 函数  $y=f(x)$  的图像如图 3-2 所示.

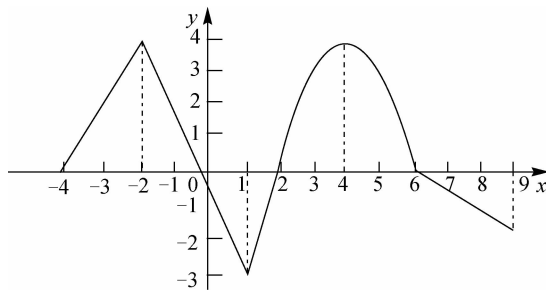


图 3-2

(1) 写出函数的定义域;

(2) 写出函数的值域;

(3) 写出函数的单调区间.

## 3.4 反 函 数



### 学习目标

1. 理解反函数的定义, 会求反函数的定义域和值域.

2. 掌握原函数与反函数图像间的关系.

### 知识点归纳

(1) 反函数  $y=f^{-1}(x)$ , 就是将原函数  $y=f(x)$  中的自变量  $x$  与因变量  $y$  调换位置, 用原函数的因变量  $y$  表示自变量  $x$  而形成的函数.

如果原函数  $y=f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $M$ , 那么反函数  $y=f^{-1}(x)$  的定义域为  $M$ , 值域为  $D$ .

(2) 不是每个函数在其定义域内都有反函数, 只有当函数的反对应关系  $f^{-1}$  是单值时, 函数  $y=f(x)$  才有反函数.

(3) 原函数  $y=f(x)$  的图像与其反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图像关于直线  $y=x$  对称.

### 巩固练习

1. 求下列函数的反函数, 并写出它们的定义域.

$$(1) y = \frac{6x+5}{x-1};$$

$$(2) y = -\sqrt{x};$$

2. 求下列函数的反函数.

$$(1) y = 3x+1 (x \geq 1);$$

$$(2) y = x^2 - 1 (x \leq 0);$$

$$(3) y = x^2 - 2x - 1 (x \leq 1).$$

3. 求函数  $y = 2x + 1, x \in [-1, 3]$  的反函数, 并在同一坐标系内画出原函数及其反函数的图像.

### 自我检测

#### 1. 选择题.

(1) 下列各组函数中, 图像关于直线  $y = x$  对称的是( ).

A.  $y = \sqrt{x}$  与  $y = -\sqrt{x}$

B.  $y = x^2 (x < 0)$  与  $y = \sqrt{x}$

C.  $y = 2|x|$  与  $y = \frac{|x|}{2}$

D.  $y = (x-1)^2 (x \geq 1)$  与  $y = \sqrt{x} + 1$

(2) 函数  $y = 1 - \sqrt{x-1}$  的反函数是( ).

A.  $y = (x-1)^2 - 1$

B.  $y = (x-1)^2 - 1 (x \leq 1)$

C.  $y = (x-1)^2 + 1$

D.  $y = (x-1)^2 + 1 (x \leq 1)$

(3) 函数  $y = 2|x|$  在区间( )内不存在反函数.

A.  $[2, 4]$

B.  $[-4, 4]$

C.  $[0, +\infty)$

D.  $(-\infty, 0]$

#### 2. 填空题.

(1) 函数  $y = 4x - 3$  的反函数是\_\_\_\_\_.

(2) 若  $f(x) = \frac{4}{5}x + 3$ , 那么  $f^{-1}(3) =$ \_\_\_\_\_.

(3) 函数  $y = \sqrt{x}$  的图像与函数\_\_\_\_\_的图像关于直线  $y = x$  对称.

(4) 函数  $y = \frac{4x-3}{1+x}$  的值域是\_\_\_\_\_.

(5) 点  $(-2, -1)$  关于直线  $y=x$  对称的点是\_\_\_\_\_.

3. 求下列函数的反函数.

(1)  $y = 2x - 10 (x \geq 0)$ ;

(2)  $y = \sqrt{x} (x \geq 1)$ ;

(3)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ;

(4)  $y = 3 + \sqrt{x+2}$ .

4. 已知  $f(x) = \frac{ax+3}{x-1}$ , 若  $(7, 2)$  是  $y = f^{-1}(x)$  图像上的一点, 求  $a$  的值及  $y = f^{-1}(x)$  的表达式.

5. 如果一次函数  $y=ax+3$  与  $y=4x-b$  的图像关于直线  $y=x$  对称, 求  $a, b$  的值.

6. 已知  $f(x)=\frac{mx+1}{4x+3}$  的反函数是  $f^{-1}(x)=\frac{1-3x}{4x-2}$ , 求  $m$  的值.

## 3.5 函数的实际应用举例



### 学习目标

能够应用函数的相关知识求解生活中的实际问题.



### 知识点归纳

本节主要介绍了函数在实际生活中的应用.



### 巩固练习

1. 某种品牌的自动加热饮水机在不放水的情况下, 内胆水温实测图(室温为  $20^{\circ}\text{C}$ ) 如图 3-3 所示, 根据图像回答下列问题:

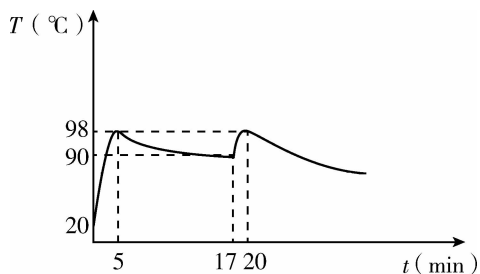


图 3-3

(1)水温从  $20^{\circ}\text{C}$  升到多少度时,该机停止加热? 这段时间有多长?

(2)该机在水温降至多少度时会自动加热? 从最高温度降至该温度用了多长时间?

(3)再次加热至最高温度用了多长时间?

(4)何时切断了电源?

2. 某产品试销阶段每件的销售价  $x$ (元)与产品的日销售量  $y$ (件)之间的关系如下表:

$x$ (元)	15	20	25	...
$y$ (件)	25	20	15	...

若日销售量  $y$  是销售价  $x$  的一次函数,求日销售量  $y$ (件)与销售价  $x$ (元)的函数解析式.



## 自我检测

1. 在国内投寄平信,每封信的重量不超过 20 克付邮资 80 分,超过 20 克而不超过 40 克付邮资 160 分,写出每封信的应付邮资  $y$ (分)与信重  $x(0 < x \leq 40)$ (克)之间的函数关系.

2. 当供电不足时,某城市供电部门规定,每户每月用电不超过  $200 \text{ kW} \cdot \text{h}$  时收费标准为  $0.51 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h})$ ;当用电超过  $200 \text{ kW} \cdot \text{h}$ ,但不超过  $400 \text{ kW} \cdot \text{h}$  时,超过部分按  $0.8 \text{ 元}/(\text{kW} \cdot \text{h})$  收费;当用电量超过  $400 \text{ kW} \cdot \text{h}$  时,就停止供电. 写出每月电费  $y$ (元)与用电量  $x(\text{kW} \cdot \text{h})$  之间的函数解析式,并求出用电量分别为  $150 \text{ kW} \cdot \text{h}$ ,  $300 \text{ kW} \cdot \text{h}$  的电费.

3. 某地的出租车起步价为 10 元,3 千米以内按起步价计算,5 千米以内超出部分按  $1.8 \text{ 元}/\text{千米}$ ,超过 5 千米按  $2 \text{ 元}/\text{千米}$ .

(1) 列出车费  $y$ (元)与行驶路程  $x$ (千米)的函数解析式;

(2) 若某人付款 23.6 元,则这个人乘车多少千米?

4. 某超市近日推出促销广告“本超市因大米到货集中,进行多购优惠活动,优惠办法如下:购米不超过 10 千克,按原价每千克 4 元销售;购米超过 10 千克,但不超过 30 千克,超过 10 千克的部分按每千克 3 元销售;购米超过 30 千克的部分按每千克 2 元销售,每位顾客限购 100 千克,欢迎选购”。

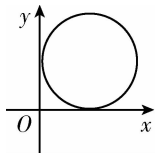
(1) 试求付费(元)与购米量(千克)之间的函数关系;

(2) 当购进大米 20 千克和 50 千克时,应分别付费多少?

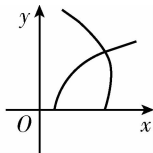
## 单元自测题

1. 选择题.

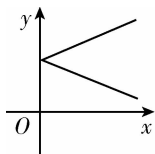
(1) 下图中可作为函数  $f(x)$  的图像的是( ).



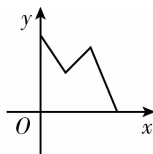
A.



B.



C.



D.

(2) 函数  $y = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-4x}$  的定义域为( ).

A.  $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$

B.  $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

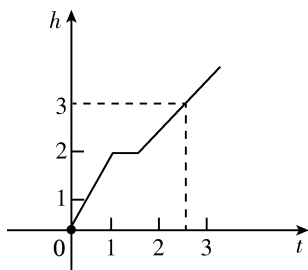
C.  $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$

D.  $(-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty)$

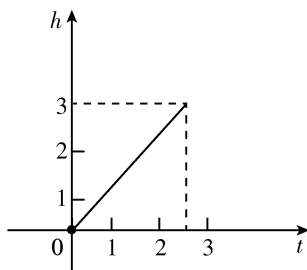
(3) 下列各项中, 函数  $f(x)$  与  $g(x)$  表示同一函数的是( ).

- A.  $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$                       B.  $f(x)=1, g(x)=\frac{x}{x}$   
 C.  $f(x)=x, g(x)=\sqrt[3]{x^3}$                       D.  $f(x)=1, g(x)=x$

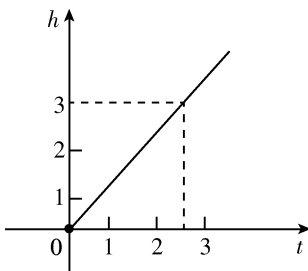
(4) 某游客为爬上 3 千米高的山顶看日出, 先用 1 小时爬了 2 千米, 休息 0.5 小时后, 再用 1 小时爬上山顶, 游客爬山所用时间  $t$  (小时) 与山高  $h$  (米) 间的函数关系用图像表示正确的是( ).



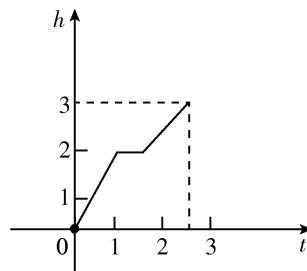
A.



B.



C.



D.

(5) 下列函数在  $(0, +\infty)$  上为单调增加的是( ).

- A.  $y=-3x+2$                                       B.  $y=\frac{1}{x}$   
 C.  $y=5+x$                                         D.  $y=-x^2$

(6) 函数  $f(x)=x^2+5$ ( ).

- A. 是奇函数                                        B. 是偶函数  
 C. 不是奇函数, 也不是偶函数              D. 是增函数

(7) 已知函数  $f(x)=\begin{cases} x-1, & x>1, \\ x+1, & x\leq 1, \end{cases}$  则  $f(2)$  为( ).

- A. 1    B. -1  
 C. 3    D. 1 或 3

## 2. 填空题.

(1) 函数  $y = \frac{\sqrt{4-x}}{x-2}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(2) 已知  $y = -x^2 + x - 2$ , 则  $f(-2) =$ \_\_\_\_\_,  $f(2x) =$ \_\_\_\_\_.

(3) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-5}, & x \geq 5, \\ 0, & x < 5, \end{cases}$  则  $f(0) =$ \_\_\_\_\_.

(4) 已知函数  $y = f(x)$  的图像如图 3-4 所示, 则函数在区间\_\_\_\_\_上单调递增; 在区间\_\_\_\_\_上单调递减.

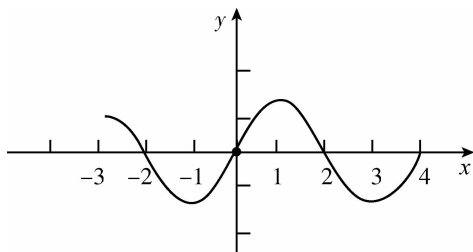


图 3-4

(5) 点  $(2, -3)$  关于坐标原点的对称点的坐标为\_\_\_\_\_.

(6) 已知  $f(x)$  是实数集上的偶函数, 且在区间  $[0, +\infty)$  上是增函数, 则  $f(-2)$ ,  $f(-\pi)$ ,  $f(3)$  的大小关系是\_\_\_\_\_.

3. 已知函数  $f(x) = (k^2 - 4)x + b$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 求实数  $k, b$  的取值范围.

## 4. 判断下列函数的奇偶性.

(1)  $f(x) = x + x^3 + x^5$ ;

(2)  $f(x) = x^2 + 1$ ;

(3)  $f(x) = x + 1$ ;

(4)  $f(x) = x^2, x \in [-1, 3]$ .

5. 求函数  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  的单调区间.

6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(1) 求  $f(x)$  的定义域;

(2) 作函数  $f(x)$  的图像, 并根据图像判断函数  $f(x)$  的奇偶性.

7. 某商店规定,某种商品一次性购买 10 千克以下按零售价格 50 元/千克销售;若一次性购买量满 10 千克,可打 9 折;若一次性购买量满 20 千克,可按 40 元/千克的更优惠价格供货.

(1) 试写出支付金额  $y$ (元)与购买量  $x$ (千克)之间的函数解析式;

(2) 分别求出购买 15 千克和 25 千克应支付的金额.