第一章

函数、极限与连续

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$；　　(2) $y = \sqrt{9 - x^2}$；

(3) $y = \ln(5x + 1)$；　　(4) $y = \arcsin(2x - 3)$；

(5) $y = \sqrt{5 - x} + \ln(x - 1)$.

分析　求函数定义域的一般方法是先求出构成所求函数的各个简单函数的定义域，再求其交集即可.

解　(1) 由 $4 - x^2 \neq 0$ 可得 $x \neq \pm 2$，即所求函数的定义域为

$$(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

(2) 由 $9 - x^2 \geqslant 0$ 可得 $|x| \leqslant 3$，即所求函数的定义域为$[-3, 3]$.

(3) 由 $5x + 1 > 0$ 可得 $x > -\dfrac{1}{5}$，即所求函数的定义域为$\left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

(4) 由 $-1 \leqslant 2x - 3 \leqslant 1$ 可得 $1 \leqslant x \leqslant 2$，即所求函数的定义域为$[1, 2]$.

(5) 由 $5 - x \geqslant 0$ 且 $x - 1 > 0$ 可得 $1 < x \leqslant 5$，即所求函数的定义域为$(1, 5]$.

2. 下列各对函数中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \ln x^4, g(x) = 4\ln x$；

(2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x - 2}}, g(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x - 2}}$；

(3) $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = (\sqrt{x})^2$；

(4) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x\sqrt[3]{x - 1}$.

解　(1) 不同，因为定义域不同.

(2) 不同，因为定义域不同.

(3) 不同，因为定义域不同.

(4) 相同，因为定义域、对应法则均相同.

3. 求下列函数值：

(1) 已知 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ x^2-1, & x>0,\end{cases}$ 求 $f(-1),f(0),f(2)$；

(2) 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

解　(1) $f(-1)=-1+1=0$，$f(0)=1$，$f(2)=2^2-1=3$.

(2) 由 $\dfrac{1}{x}=1$ 可得 $x=1$，故 $f(1)=4\times1-\sqrt{1+1^2}=4-\sqrt{2}$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调递增，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调递增.

证明　设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$.

由于 $f(x)$ 是奇函数，故 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调递增，所以 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，从而

$$f(x_2)-f(x_1)>0,$$

即 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调递增.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　(4) $f(x)=x^2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $f(x)=\sin x\cos x+1$；

(6) $F(x)=f(x)-f(-x)$，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数；

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　(8) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.

解　(1) 因为 $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 因为
$$\begin{aligned}f(-x)&=-x(-x-1)(-x+1)=x(x+1)(-x+1)\\&=-x(x+1)(x-1)=-f(x),\end{aligned}$$
所以 $f(x)$ 为奇函数.

(3) 因为 $f(-x)=\dfrac{a^{-x}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(4) 因为 $f(-x)=(-x)^2\ln\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=x^2\ln\frac{1+x}{1-x}=-x^2\ln\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

(5) 因为 $f(-x)=\sin(-x)\cos(-x)+1=-\sin x\cos x+1$，$f(-x)\neq f(x)$，且 $f(-x)\neq -f(x)$，所以 $f(x)$ 既非偶函数，也非奇函数.

(6) 因为 $F(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=-F(x)$，所以 $F(x)$ 是奇函数.

(7) 因为
$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\
&=\ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})}\\
&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\
&=-f(x),
\end{aligned}
$$
所以 $f(x)$ 为奇函数.

(8) 因为
$$
\begin{aligned}
f(-x)&=\frac{e^{-(-x)}-1}{e^{-(-x)}+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}=-\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}\\
&=-f(x),
\end{aligned}
$$
所以 $f(x)$ 为奇函数.

6. 指出下列周期函数的周期：

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　(2) $f(x)=\sin 4x$；

(3) $f(x)=5+\cos 2\pi x$；　(4) $f(x)=|\cos x|$.

解　(1) 周期是 π.　(2) 周期是 $\frac{\pi}{2}$.　(3) 周期是 1.　(4) 周期是 π.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\ln(3x+2)$；　(2) $y=2^{x-1}$；

(3) $y=\sqrt[3]{5x+1}$；　(4) $y=x^2$.

解　(1) 由 $y=1+\ln(3x+2)$ 可得 $x=\frac{1}{3}(e^{y-1}-2)$，即所求反函数为 $y=\frac{1}{3}(e^{x-1}-2)$.

(2) 由 $y=2^{x-1}$ 可得 $x=\log_2 y+1$，即所求反函数为 $y=\log_2 x+1$.

(3) 由 $y=\sqrt[3]{5x+1}$ 可得 $x=\frac{1}{5}(y^3-1)$，即所求反函数为 $y=\frac{1}{5}(x^3-1)$.

(4) 由 $y=x^2$ 可得 $x=\pm\sqrt{y}$，即所求反函数为 $y=\pm\sqrt{x}$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^3)$；　(2) $f(\tan x)$；

(3) $f(x-a)(a>0)$.

解 (1) 由 $0<x^3<1$ 可得 $x\in(0,1)$.

(2) 由 $0<\tan x<1$ 可得 $x\in\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

(3) 由 $0<x-a<1$ 可得 $x\in(a,\ a+1)$.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势,判别哪些数列有极限,如有极限,写出其极限:

(1) $x_n=\frac{1}{3^n}$;

(2) $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

(3) $x_n=(-1)^n n$;

(4) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$;

(5) $x_n=\cos\frac{1}{n}$;

(6) $x_n=\ln\frac{1}{n}$.

解 (1) 有极限,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

(2) 有极限,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0$.

(3) 没有极限.

(4) 没有极限.

(5) 有极限,$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1$.

(6) 没有极限.

2. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

证明 (1) 因为 $\left|\frac{1}{n^2+1}-0\right|=\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$,故要使 $\left|\frac{1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$,只要 $\frac{1}{n^2}<\varepsilon$,即 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$,所以 $\forall\,\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]+1$,则当 $n>N$ 时,就有 $\left|\frac{1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0$.

(2) 要使 $\left|1-\frac{1}{3n}-1\right|=\frac{1}{3n}<\varepsilon$, 只要 $n>\frac{1}{3\varepsilon}$,所以 $\forall\,\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]+1$,

则当 $n > N$ 时，就有 $\left|1-\frac{1}{3n}-1\right| < \varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)=1$.

(3) 因为要使 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，只要 $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

(4) 因为 $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，故要使 $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

3. 证明：设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，且 $A>B$，则存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $a_n>b_n$.

证明　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，所以存在 N_1，使得 $n>N_1$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$，$|a_n-A|\leqslant\varepsilon$，即 $A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon$.

同理存在 N_2，使得 $n>N_2$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$，$|b_n-B|<\varepsilon$，即 $B-\varepsilon<b_n<B+\varepsilon$.

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，对 $\forall\varepsilon>0$ 有：

$$A-\varepsilon<a_n<A+\varepsilon,\ B-\varepsilon<b_n<B+\varepsilon.$$

因为 ε 任意小且 $A>B$，所以 $a_n>b_n$.

4. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证明　因数列 $\{x_n\}$ 有界，故 $\exists M>0$，使得对一切 n 有 $|x_n|\leqslant M$.

$\forall\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，故对 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $|y_n|<\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$，从而有 $|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

5. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，当 $k>k_1$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists k_2$，当 $k>k_2$ 时，有 $|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$.

记 $K=\max\{k_1,k_2\}$，取 $N=2K+1$，则当 $n>N$ 时：

若 $n=2k+1$，则 $k>K\geqslant k_2\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$；

若 $n=2k$，则 $k>K+\frac{1}{2}>k_1\Rightarrow|x_n-a|=|x_{2k}-a|<\varepsilon$.

从而可推得只要有 $n>N$，就有 $|x_n-a|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$.

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+6)=8$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；　(4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

证明　(1) 因为 $|(2x+6)-8|=|2x-2|=2|x-1|$，故要使 $|(2x+6)-8|<\varepsilon$，须使 $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有 $|(2x+6)-8|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+6)=8$.

(2) 因为 $x\to 1$，$x\neq -1$，所以 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|=|x+1-2|=|x-1|$，故要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，须使 $|x-1|<\varepsilon$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

(3) 因为 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，故要使 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，须使 $\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

(4) 因为 $\left|\dfrac{2+x^2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|=\dfrac{2}{3x^2}$，故要使 $\left|\dfrac{2+x^2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，须使 $\dfrac{2}{3x^2}<\varepsilon$，即 $|x|>\sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\sqrt{\dfrac{2}{3\varepsilon}}$，则当 $|x|>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{2+x^2}{3x^2}-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

2. 当 $x\to 0$ 时，讨论下列函数极限的存在性：

(1) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$；　(2) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+\dfrac{1}{2}, & x>0;\end{cases}$　(4) $f(x)=[x]$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$存在且等于$\frac{1}{2}$.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} [x] = 0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} [x] = -1$，所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

3. 证明：若$x \to +\infty$及$x \to -\infty$时，函数$f(x)$的极限都存在且都等于A，则$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.

证明 因为$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$，所以$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x_1 > 0$，当$x > x_1$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

又因为$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$，所以对上面的$\varepsilon > 0$，$\exists x_2 > 0$，当$x < -x_2$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

取$X = \max\{x_1, x_2\}$，则当$|x| > X$，即$x > X$或$x < -X$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$.

4. 根据函数极限的定义证明：函数$f(x)$当$x \to x_0$时极限存在的充要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 必要性：

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

当$0 < x - x_0 < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$；

当$0 < x_0 - x < \delta$时，有$|f(x) - A| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

充分性：

若$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_1 > 0$，当$0 < x - x_0 < \delta_1$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

又$\exists \delta_2 > 0$，当$0 < x_0 - x < \delta_2$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

取$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$，则当$0 < |x - x_0| < \delta$时，就有$|f(x) - A| < \varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

习题 1-4

1. 根据无穷小的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}=0$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=0$.

证明 (1) 因为 $\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant|x|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，就有 $\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为 $\left|\dfrac{x^2-16}{x+4}\right|=|x-4|$，所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<|x-4|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{x^2-16}{x+4}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x+4}=0$.

2. 根据无穷大的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+3x}{x}=\infty$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=\infty$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$.

证明 (1) 因为 $\left|\dfrac{1+3x}{x}\right|=\left|\dfrac{1}{x}+3\right|\geqslant\left|\dfrac{1}{x}\right|-3$，故要使 $\left|\dfrac{1+3x}{x}\right|>M$，须使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|-3>M$，即 $|x|<\dfrac{1}{M+3}$. 所以 $\forall M>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{M+3}$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1+3x}{x}\right|>M$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+3x}{x}=\infty$.

(2) 要使 $|2^x|>M$，须使 $x>\log_2 M$，所以 $\forall M>0$，取 $X=\log_2 M$，则当 $x>X$ 时，就有 $|2^x|>M$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}2^x=\infty$.

(3) 要使 $\left|\dfrac{1}{x-3}\right|>M$，须使 $|x-3|<\dfrac{1}{M}$，所以 $\forall M>0$，取 $\delta=\dfrac{1}{M}$，则当 $0<|x-3|<\delta$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{x-3}\right|>M$，即 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}=\infty$.

3. 求下列极限并说明理由：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

解 (1) 由定理 4 可知，$\dfrac{1}{2x}$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小，再由定理 1 得 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)=\dfrac{3}{2}$，故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2x}\right)=\dfrac{3}{2}$.

(2) 由定理 1 知 $\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$.

4. 函数 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？这个函数是否为 $x\to\infty$ 时的无穷大？为什么？

解 因为 $\forall M>0$，总有 $x_0\in(M,+\infty)$，使 $\cos x_0=1$，从而 $y=x_0\cos x_0=x_0(>M)$，所以 $y=x\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

又因为 $\forall M>0$，总有 $x_0\in(M,+\infty)$，使 $\cos x_0=0$，从而 $y=x_0\cos x_0=0(<M)$，所以 $y=x\cos x$ 不是当 $x\to+\infty$ 时的无穷大.

5. 证明：函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界，但这个函数不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

证明 先证函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界.

因为 $\forall M>0$，在 $(0,1]$ 中总可以找到 x_0，使 $f(x_0)>M$. 例如，取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}$ $(k\in\mathbf{N})$，则 $f(x_0)=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 k 充分大时，可使 $f(x_0)>M$，所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界.

再证函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

因为 $\forall M>0,\delta>0$，总可以找到点 x_0，使 $0<x_0<\delta$，使 $f(x_0)<M$. 例如，取 $x_0=\dfrac{1}{2k\pi}$ $(k\in\mathbf{N}^+)$，当 k 充分大时，$0<x_0<\delta$，但 $f(x_0)=2k\pi\sin 2k\pi=0<M$，所以 $y=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

习题 1-5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4}{x-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+5x+4}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+1}{x^4-x+1}$；

(9) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$；

(10) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(12) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

解 (1) 原式 $=\frac{\lim_{x\to 2}(2x^2+4)}{\lim_{x\to 2}(x-1)}=\frac{12}{1}=12$.

(2) 原式 $=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(3x^2+1)}=\frac{0}{4}=0$.

(3) 原式 $=\frac{\lim_{x\to 1}(x^2-2x+4)}{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}=\frac{3}{\lim_{x\to 1}(x^2-1)}=\infty$.

(4) 原式 $=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-2}{x-1}$

$$=\frac{\lim_{x\to 4}(x-2)}{\lim_{x\to 4}(x-1)}=\frac{2}{3}.$$

(5) 原式 $=\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=3-0+0=3$.

(6) 原式 $=\lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{3x})\cdot\lim_{x\to\infty}(3-\frac{1}{x^3})=2\times 3=6$.

(7) 原式 $=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(3+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2})}=\frac{2}{3}$.

(8) 原式 $=\frac{\lim_{x\to 4}(x^3+1)}{\lim_{x\to 4}(x^4-x+1)}=\frac{65}{253}$.

(9) 原式 $=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+1)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x+2)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

(10) 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}\right)$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}2}{\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$=\frac{2}{\infty}=0.$$

(11) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(4x^2-2x+1)}{\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)}=\dfrac{1}{2}$.

(12) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2n^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$，而 $\left|\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为 $|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，而 $\dfrac{1}{x}\to 0\ (x\to\infty)$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}=0$.

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b 的值.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x-(a+b)+\dfrac{1-b}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}[(1-a)x-(a+b)]=0,$$
故 $1-a=0$ 且 $a+b=0$，则 $a=1$，$b=-1$.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$，当 $x\to\infty$ 时，p，q 取何值，$f(x)$ 为无穷小？p，q 取何值，$f(x)$ 为无穷大？

解
$$f(x)=\frac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5=\frac{px^2-2+3qx^3+3qx+5x^2+5}{x^2+1}$$
$$=\frac{3qx^3+(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1},$$
当 $3q=0$ 且 $p+5=0$，即 $p=-5$，$q=0$ 时，$f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}$，则当 $x\to\infty$，$f(x)$ 为无穷小.

$$f(x)=\frac{3qx^3+(p+5)x^2+3qx+3}{x^2+1}=\frac{3q+\dfrac{p+5}{x}+\dfrac{3q}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}},$$
当 $x\to\infty$ 时，只有当 $3q\neq 0$，即 $q\neq 0$ 时，$f(x)$ 为无穷大，此时 p 可取任意值.

习题 1-6

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n\tan\dfrac{x}{3^n}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\dfrac{\pi}{2}-x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi}{2}x$；

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{1-\left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}\cdot\dfrac{3}{5}\right)$

$$=\frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}=\frac{3}{5}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}\cdot 2\right)=2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{2}{x}}{\dfrac{2}{x}}=2.$

(3) 令 $y=\arcsin 2x$，则 $x=\dfrac{\sin y}{2}$.

当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，原式 $=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{2y}=\dfrac{1}{2}.$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1.$

(5) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{3^n}}{\dfrac{x}{3^n}}\cdot\dfrac{x}{\cos\dfrac{x}{3^n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{3^n}}{\dfrac{x}{3^n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{\cos\dfrac{x}{3^n}}=x.$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin(x-\frac{\pi}{2})}{\dfrac{\pi}{2}-x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{2})}{x-\dfrac{\pi}{2}}=1.$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\cdot\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}x}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$

$$= \lim_{x\to 1}(1-x)\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}(x-1)}{-\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}(x-1)\cdot\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}\cdot\frac{2}{\pi}$$

$$= \lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}(x-1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

（8）原式$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

（9）原式$= \lim_{x\to \pi}\frac{-\sin(x-\pi)}{(1-\frac{x}{\pi})(1+\frac{x}{\pi})}$

$$= \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)\cdot\pi}{(x-\pi)\cdot(1+\frac{x}{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}\cdot\lim_{x\to \pi}\frac{\pi}{1+\frac{x}{\pi}} = \frac{\pi}{2}.$$

2. 计算下列极限：

（1）$\lim_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$；

（3）$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$；　　（4）$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$；

（5）$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{3x}$.

解　（1）原式$= \lim_{x\to 0}[1+(-\sin x)]^{-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x}}$

$$= \lim_{x\to 0}\{[(1+(-\sin x)]^{-\frac{1}{\sin x}}\}^{-\frac{\sin x}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

（2）原式 $= \lim_{x\to \infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = e^{2}.$

（3）原式$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\frac{-x}{1+x})^{-\frac{1+x}{x}}\right]^{(\frac{1}{2x}+1)(-\frac{x}{1+x})}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+\frac{-x}{x+1})^{-\frac{x+1}{x}}\right]^{-\frac{2x+1}{2(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

（4）原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}\cdot\frac{-6x}{\sin x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\{[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}}\}^{-\frac{6x}{\sin x}}=e^{-6}$.

（5）原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{-2}{x+2})^{\frac{x+2}{-2}\cdot\frac{-6x}{x+2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{-2}{x+2})^{\frac{x+2}{-2}}\right]^{\frac{-6}{1+\frac{2}{x}}}=e^{-6}$.

3. 利用极限存在准则证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)^n=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n+n}\right)=0$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

证明　（1）因 $n^2\cdot\left(\frac{n}{2n^2}\right)^n<n^2\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)^n<n^2\cdot\left(\frac{n}{n^2}\right)^n$，即 $\frac{1}{4(2n)^{n-2}}<n^2\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)^n<\frac{1}{n^{n-2}}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4(2n)^{n-2}}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{n-2}}=0$，故由夹逼准则即得证.

（2）因 $\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n+n}<\frac{1}{n+1}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$，故由夹逼准则即得证.

（3）当 $x>0$ 时，$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant 1$，而 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}1=1$，故由夹逼准则即得证.

习题 1-7

1. 当 $x\to 0$（或 $x\to 0^+$）时，下列无穷小与 x 相比较，哪些是高阶无穷小？哪些是低阶无穷小？哪些是等价无穷小？哪些是同阶无穷小？

（1）$\sin x^2$；　　（2）x^3+x；

（3）$\sqrt[3]{x}$；　　（4）$1-\cos x$；

（5）$\arctan x$；　　（6）$x+\sin x$.

解　（1）因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x=0$，所以 $\sin x^2$ 是 x 的高阶无穷小.

（2）因为 $\lim\limits_{x\to 0}(x^3+x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)=1$，所以 x^3+x 是 x 的

等价无穷小.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{-\frac{2}{3}}=\infty$,所以$\sqrt[3]{x}$是$x$的低阶无穷小.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x}{2}=0,$$

所以$1-\cos x$是x的高阶无穷小.

(5) 因为$\lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0$,则令$y=\arctan x$,即$x=\tan y$,于是当$x\to 0$时,$y\to 0$. 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y}{\tan y}=1$,所以$\arctan x$是$x$的等价无穷小.

(6) 因为$\lim\limits_{x\to 0}(x+\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)=2$,所以$x+\sin x$是$x$的同阶无穷小.

2. 利用等价无穷小代换,求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\arctan x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin 2x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)\sin x}{1-\cos x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

解 (1) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$.

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

(3) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{2x^2}=1$.

(4) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}$.

(5) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{\frac{x^2}{2}}=2$.

(6) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2\cdot\frac{1}{2}\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=-3$.

习题 1-8

1. 证明函数 $y=\cos x$ 在其定义域内是连续的.

证明　任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，当 x 有增量 Δx 时，y 的增量 Δy 为

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

则有

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left[-2\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\Delta x}{2}\right]=0.\end{aligned}$$

因此 $y=\cos x$ 在其定义域内是连续的.

2. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$　(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\ln(1+2x)}{x}, & x>0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\sin x=1\neq f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot 2=2\neq f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0\neq f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

3. 指出下列函数的间断点及其类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\dfrac{1+x}{2-x^2}$；

(3) $y=\dfrac{|x|}{x}$；　(4) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(5) $y=\dfrac{x}{\tan x}$.

解　(1) 函数的间断点有 $x=1$ 和 $x=2$.

对 $x=1$：

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1}{x-2} = -2,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-2} = -2,$$

所以 $x=1$ 为第一类的可去间断点.

对 $x=2$：

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \infty,$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \infty,$$

所以 $x=2$ 为第二类的无穷间断点.

(2) 函数的间断点有 $x=\pm\sqrt{2}$.

对 $x=\sqrt{2}$：

$$\lim_{x\to \sqrt{2}^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = \infty,$$

所以 $x=\sqrt{2}$ 为第二类的无穷间断点.

对 $x=-\sqrt{2}$：

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to -\sqrt{2}^+} f(x) = \infty,$$

所以 $x=-\sqrt{2}$ 为第二类的无穷间断点.

(3) 函数的间断点为 $x=0$,而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1,$$

所以 $x=0$ 为第一类的跳跃间断点.

(4) 函数的间断点为 $x=2$,则

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4, \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4,$$

所以 $x=2$ 为第一类的可去间断点.

(5) 函数的间断点有 $x=k\pi$ 和 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

对 $x=0$：

因为 $f(x)$ 无定义,$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\tan x} = 1$,所以 $x=0$ 为第一类的可去间断点.

对 $x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$：

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi} \dfrac{x}{\tan x} = \infty$,所以 $x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 为第二类的无穷间断点.

对 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$：

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}=0$，而在 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 处无定义，所以 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 为第一类的可去间断点.

4. 证明：若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$.

证明 若 $f(x_0)>0$，因为 $f(x_0)$ 在 x_0 连续，所以取 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0)$，即

$$0<\frac{1}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{3}{2}f(x_0).$$

若 $f(x_0)<0$，因为 $f(x)$ 在 x_0 连续，所以取 $\varepsilon=-\frac{1}{2}f(x_0)>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<-\frac{1}{2}f(x_0)$，即

$$\frac{3}{2}f(x_0)<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)<0.$$

因此，不论 $f(x_0)>0$ 或 $f(x_0)<0$，总存在 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$，当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$.

习题 1-9

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\arctan\sqrt{2x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$.

解 (1) 原式 $=\sqrt{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}=\sqrt{5}$.

(2) 原式 $=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}2\cos 2x)=\ln(2\cos\frac{\pi}{3})=\ln 1=0$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$.

(4) 原式 $= \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$.

(5) 原式 $= e^0 = 1$.

(6) 原式 $= \ln \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \ln 1 = 0$.

(7) 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \dfrac{1}{2}$.

(8) 原式 $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = 1$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续？

解 由初等函数的连续性可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内连续，所以要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，只要 $\forall a$ 使得 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续即可.

在 $x = 0$ 处，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (a + x) = a$，$f(0) = a$. 取 $a = 1$，则有 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，因此 $a = 1$.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x < 0, \\ 3x^2 - 2x + k, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 其中 k 为常数，问当 k 为何值时，函数 $f(x)$ 在其定义域内连续？

解 由初等函数的连续性可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 内连续，所以要使 $f(x)$ 在其定义域内连续，只要取 k 值使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续即可.

在 $x = 0$ 处，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (3x^2 - 2x + k) = k$，$f(0) = k$. 取 $k = 2$，则有 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，因此 $k = 2$.

4. 证明：

(1) $x^5 - 3x = 1$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一个根；

(2) $2^x = \dfrac{1}{x}$ 至少有一个小于 1 的正根；

(3) $x^5 - 2x^2 + x + 1 = 0$ 在 $(-1, 1)$ 内至少有一个根；

(4) $x^2 \cos x - \sin x = 0$ 在 $\left(\pi, \dfrac{3}{2}\pi\right)$ 内至少有一个根.

证明 (1) 令 $f(x) = x^5 - 3x - 1$，则 $f(1) = -3 < 0$，$f(2) = 25 > 0$. 因 $f(x)$ 为连续函数，所以在 $(1, 2)$ 内至少有一个 x 值使 $f(x) = 0$，即 $x^5 - 3x = 1$ 在 $(1, 2)$ 内

至少有一个根.

(2) 令 $f(x)=2^x-\frac{1}{x}$，又知 $f(x)$ 在定义域内连续,则

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(2^x-\frac{1}{x})<0,\ f(1)=1>0,$$

所以$(0,1)$内至少有一个 x 值使 $f(x)=0$,即 $2^x=\frac{1}{x}$ 至少有一个小于 1 的正根.

(3) 令 $f(x)=x^5-2x^2+x+1$,又知 $f(x)$ 在定义域内连续,则

$$f(-1)=-3<0,\ f(1)=1>0,$$

所以$(-1,1)$内至少有一个 x 值使 $f(x)=0$,即 $x^5-2x^2+x+1=0$ 在$(-1,1)$内至少有一个根.

(4) 令 $f(x)=x^2\cos x-\sin x$,又知 $f(x)$ 在定义域上连续,则

$$f(\pi)=\pi^2\cdot(-1)-0=-\pi^2<0,$$

$$f(\frac{3}{2}\pi)=\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2\cdot0-(-1)=1>0,$$

所以$(\pi,\frac{3}{2}\pi)$内至少有一个 x 值使 $f(x)=0$,即 $x^2\cos x-\sin x=0$ 在$(\pi,\frac{3}{2}\pi)$内至少有一个根.

总复习题一

1. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant1,\\ x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 因为 $f[f(x)]=\begin{cases}3f(x)+1, f(x)\leqslant1,\\ f(x), \quad f(x)>1,\end{cases}$ 则当 $x>1$ 时,$f(x)=x>1$;当 $x\leqslant1$ 时,$f(x)=3x+1$. 令 $f(x)>1$,解得 $0<x\leqslant1$;令 $f(x)\leqslant1$,解得$x\leqslant0$. 因此

$$f[f(x)]=\begin{cases}9x+4, x\leqslant0,\\ 3x+1, 0<x\leqslant1,\\ x, \quad x>1.\end{cases}$$

2. 设 $f(0)=0$,当 $x\neq0$ 时,$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$,其中 a,b,c 为常数,且$|a|\neq|b|$. 证明:$f(x)$ 为奇函数.

证明 因为 $af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}$,所以

$$f(x)=\frac{1}{a}\left[\frac{c}{x}-bf\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$f(-x)=\frac{1}{a}\left[\frac{c}{-x}-bf\left(-\frac{1}{x}\right)\right].$$

两式相加得

$$f(x)+f(-x)=-\frac{b}{a}\left[f(\frac{1}{x})+f(-\frac{1}{x})\right].$$

用$\frac{1}{x}$代替 x 得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{b}{a}[f(x)+f(-x)],$$

所以 $f(x)+f(-x)=\frac{b^2}{a^2}[f(x)+f(-x)]$.

又因为 $|a|\neq|b|$,即$\frac{b^2}{a^2}\neq 1$,所以 $f(x)+f(-x)=0$,故 $f(x)$ 为奇函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\leqslant 1,\\ f[f(x-5)], & x>1,\end{cases}$ 求 $f(5)$.

解 $f(5)=f[f(5-5)]=f[f(0)]=f[0-3]=f(-3)$
$=-3-3=-6.$

4. 设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\infty$,则(　　).

A. 对任意 n 有 $a_n<b_n$　　B. 对任意 n 有 $b_n<c_n$

C. 数列 $\{a_nc_n\}$ 发散　　D. 数列 $\{b_nc_n\}$ 发散

解 因为$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,所以数列$\{b_nc_n\}$ 发散,故选项 D 正确.

5. 设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 a,c 不全为零,则必有(　　).

A. $b=4d$　　B. $b=-4d$

C. $a=-4c$　　D. $a=4c$

解 因为$\tan x\sim x$,

$\ln(1-2x)\sim -2x$,

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,

$1-e^{-x^2}\sim x^2$,

$(1-\cos x)$ 是 $\tan x$ 的高阶无穷小,$(1-e^{-x^2})$ 是 $\ln(1-2x)$ 的高阶无穷小,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x}{c\ln(1-2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2,$$

则 $a=-4c$,故选项 C 正确.

6. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{-x}$

$$=\frac{2}{1}+(-1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}$$

$$=0+1=1,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

7. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性,若有间断点,判别其类型.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}-x & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1,\end{cases}$

在分段点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1,\ \lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1,$$

$$\lim_{x\to -1^-}f(x)\neq\lim_{x\to -1^+}f(x),$$

所以 $x=-1$ 为跳跃间断点.

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1,\ \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x)=-1,$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x),$$

所以 $x=1$ 为跳跃间断点.

8. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

解 因为

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$$

$$<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{1}{2},$$

则由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

9. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)$$

……

$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{2^{2^n}}\right)=2.$$

10. 确定 a,b 的值，使当 $x\to 0$ 时，$a-\cos bx+\sin^3 x$ 与 x^3 等价.

解　$\sin^3 x\sim x^3$，若要使$(a-\cos bx+\sin^3 x)\sim x^3$，则$(a-\cos bx)$必须是 x^3 的高阶无穷小，而$(1-\cos bx)\sim\frac{1}{2}(bx)^2$，只能是 $a-\cos bx=0$，即 $b=0$，$a=1$.

11. 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=A(A\neq 0)$，试确定常数 a,b，使 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 与 ax^b 等价.

解　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\frac{f(x)}{x}}-1}{x^2}=A$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)=A^2x^5+2Ax^3\sim ax^b$，故 $a=2A$，$b=3$.

12. 设 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x^2-1)}$，求 $f(x)$ 的间断点并分类.

解　函数的间断点有 $x=0$，$x=1$，$x=-1$.

因 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(1+x)\sin x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x^2-1)}=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(1+x)\sin x}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=-1$，

故 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

因 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(1+x)\sin x}{-x(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin x}{-x(x-1)}=-\dfrac{\sin(-1)}{2}$,

故 $x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点.

$$因\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(1+x)\sin x}{x(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\sin x}{x(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sin 1}{x-1}=\infty,$$

故 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的无穷间断点.

13. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求 $f(x)$ 的间断点并分类.

解 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & |x|>1,\\ \dfrac{1+x}{2}, & |x|=1,\\ 1+x & |x|<1.\end{cases}$

在分段点 $x=-1$ 处,因为

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}(1+x)=0,$$

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=f(-1),$$

故函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.

在分段点 $x=1$ 处,因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(1+x)=2,$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=0,$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)\neq\lim_{x\to1^+}f(x),$$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

14. 设 $f(x)=\dfrac{1}{a+|a|\mathrm{e}^{bx}}$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. 试确定 a,b 的正负号,并求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 的值.

解 由 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续知,对任意 x,有 $a+|a|\mathrm{e}^{bx}>0$,则 $a>0$.

于是 $$f(x)=\frac{1}{a+a\mathrm{e}^{bx}}=\frac{1}{a(1+\mathrm{e}^{bx})},$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{a(1+\mathrm{e}^{bx})}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{bx}=+\infty$, 则 $b<0$.

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{a(1+\mathrm{e}^{bx})} = \dfrac{1}{a}$.

15. 设 $f(x)$ 是一个连续函数，其定义域和值域都是$[a,b]$. 求证：存在 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=\xi$.

证明 设 $g(x)=f(x)-x$，由题意知

$$a\leqslant f(a)\leqslant b,\ a\leqslant f(b)\leqslant b,$$

故 $f(a)-a\geqslant 0,\ f(b)-b\leqslant 0$.

若等号至少有一个成立，则有 $\xi\in[a,\ b]$ 使 $f(\xi)=\xi$；

若等号都不成立，即 $g(a)>0,\ g(b)<0$.

由函数的连续性知，至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $g(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

16. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$c,d\in(a,b)$，$t_1>0$，$t_2>0$. 证明：在$[a,b]$内必存在点 ξ 使 $t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi)$.

证明 假设 $f(c)<f(d)$，则$\dfrac{t_1f(c)+t_2f(d)}{t_1+t_2}\in(f(c),\ f(d))$.

由函数的连续性知，在 c,d 之间至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{t_1f(c)+t_2f(d)}{t_1+t_2}$.

因为 $c,d\in(a,b)$，故 $\xi\in[a,b]$，所以在$[a,b]$内必存在点 ξ 使

$$t_1f(c)+t_2f(d)=(t_1+t_2)f(\xi).$$

17. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，$f(0)=f(1)$. 证明：对自然数 $n\geqslant 2$，必有 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

证明 令 $g(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)-f(x)$.

由于 $f(0)=f(1)=A$，对于 $n\geqslant 2$，设 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=B(B\geqslant A)$，则由介值定理知

$$A\leqslant f\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant B,$$

故 $g(0)=f\left(\dfrac{1}{n}\right)-A\geqslant 0$，$g\left(1-\dfrac{1}{n}\right)=A-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\leqslant 0$.

由介值定理知存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $g(\xi)=0$，即

$$f(\xi)=f\left(\xi+\frac{1}{n}\right).$$

对于 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=B\ (B\leqslant A)$，同理可证.

故原式得证.

第二章

导数与微分

习题 2-1

1. 求证：可导的奇函数的导函数是偶函数，可导的偶函数的导函数是奇函数.

证明　设 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)=-f(-x)$，于是

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned}f'(-x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0-\Delta x)-f(-x_0)}{-\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x_0+\Delta x)+f(x_0)}{-\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\\&=f'(x_0),\end{aligned}$$

所以奇函数的导函数为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)$，于是

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned}f'(-x_0)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0-\Delta x)-f(-x_0)}{-\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}\\&=-f'(x_0),\end{aligned}$$

所以偶函数的导数为奇函数.

2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)\neq 0$，求：

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}$.

解 (1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}\cdot 2$

$$=2f'(x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\dfrac{f(x_0+x)-f(x_0)}{x}}$

$$=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

3. 求下列函数的导数：

(1) $y=x^7$； (2) $y=\sqrt[5]{x^3}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$； (4) $y=\dfrac{x^5\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt{x^3}}$.

解 (1) $y'=7x^6$.

(2) $y=x^{\frac{3}{5}}$，$y'=\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}$.

(3) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，$y'=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

(4) $y=x^{5+\frac{4}{7}-\frac{3}{2}}=x^{\frac{57}{14}}$，$y'=\dfrac{57}{14}x^{\frac{43}{14}}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，试讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解 由题意可得

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2g(x).$$

因为 $g(x)$ 是有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$，$f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又因 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$，

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 0,$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f'(0) = 0$.

5. 讨论下列函数在点 $x = 0$ 处的连续性和可导性：

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

解　(1) 因 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0 = f(0)$，所以函数在 $x = 0$ 处连续.

又因 $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$，所以函数在 $x = 0$ 处可导.

(2) 因 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x}+1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+1} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

因为 $f(x)$ 的定义域为 $x \geqslant 0$，$f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左导数不存在，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leqslant 0, \\ x^2 \sin \dfrac{1}{x} + x, & x > 0, \end{cases}$ 确定 a, b 的值，使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续且可导.

解　因 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + ax + b) = b$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} + x\right) = 0,\ f(0) = b,$$

故若要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$，所以 $b = 0$.

又因 $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x} + x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(x \sin \dfrac{1}{x} + 1\right) = 1$,

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 + ax}{x} = \lim_{x \to 0^-} (x + a) = a,$$

故要使 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，则 $f'_-(0) = f'_+(0)$，即 $a = 1$.

7. 求曲线 $f(x) = x^2 - x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程和法线方程.

解　因 $f'(x)=2x-1$,所以

$$f'(1)=2\times1-1=1,$$

故所求切线方程为 $f(x)-0=1\cdot(x-1)$,即 $f(x)=x-1$;所求法线方程为 $f(x)-0=-1\cdot(x-1)$,即 $f(x)=-x+1$.

8. 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　因 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1,$$

$$f'_-(0)=f'_+(0)=1,$$

所以 $f'(0)=1$.

故 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

习题 2-2

1. 求下列函数的导数:

(1) $y=x+\arctan x$;　(2) $y=\sec x-e^x$;

(3) $y=a^x\sin x$;　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^3}$;

(5) $y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3$;　(6) $y=x^2\ln x\cos x$;

(7) $y=(2x+5)^4$;　(8) $y=\sin(3x+4)$;

(9) $y=\sin x^2$;　(10) $y=\sin^2 x$;

(11) $y=5^{\sin x}$;　(12) $y=e^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$;

(13) $y=2^{\frac{x}{\ln x}}+\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^2$;　(14) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$.

解　(1) $y'=(x)'+(\arctan x)'=1+\dfrac{1}{1+x^2}$.

(2) $y'=(\sec x)'-(e^x)'=\sec x\tan x-e^x$.

(3) $y'=a^x\cdot(\sin x)'+(a^x)'\cdot\sin x=a^x\cdot\cos x+a^x(\ln a)\sin x$.

(4) $y'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot(3x^2)}{x^6}=\dfrac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}$.

(5) $y'=\left(\dfrac{e^x}{x^2}\right)'+(\ln 3)'=\dfrac{e^x\cdot x^2-2x\cdot e^x}{x^4}+0=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$.

(6) $y' = (x^2)' \cdot \ln x\cos x + x^2 \cdot (\ln x)'\cos x + x^2\ln x(\cos x)'$

$= 2x \cdot \ln x \cdot \cos x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\cos x + x^2\ln x(-\sin x)$

$= 2x\ln x\cos x + x\cos x - x^2\ln x\sin x.$

(7) $y' = 4(2x+5)^3 \cdot (2x+5)' = 8(2x+5)^3.$

(8) $y' = \cos(3x+4) \cdot (3x+4)' = 3\cos(3x+4).$

(9) $y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = 2x\cos x^2.$

(10) $y' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$

(11) $y' = 5^{\sin x} \cdot \ln 5 \cdot (\sin x)' = \ln 5 \cdot \cos x \cdot 5^{\sin x}.$

(12) $y' = (e^{-\frac{x}{2}})' \cdot \cos 3x + (e^{-\frac{x}{2}}) \cdot (\cos 3x)'$

$= e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{x}{2}\right)' \cdot \cos 3x + e^{-\frac{x}{2}} \cdot (-\sin 3x) \cdot (3x)'$

$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos 3x - 3e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin 3x$

$= -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x + 6\sin 3x).$

(13) $y' = (2^{\frac{x}{\ln x}})' + \left[\left(\frac{x}{\ln x}\right)^2\right]'$

$= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' + 2\frac{x}{\ln x} \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)'$

$= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x} + 2 \cdot \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x - \frac{1}{x} \cdot x}{\ln^2 x}$

$= 2^{\frac{x}{\ln x}}(\ln 2) \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} + 2\frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$

(14) $y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}} \cdot \left(\sqrt{\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}\right)' = \sqrt{\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{e^{4x}}{e^{4x}+1}\right)'$

$= \frac{e^{4x}+1}{2e^{4x}} \cdot \frac{4e^{4x} \cdot (e^{4x}+1) - e^{4x} \cdot 4e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$

$= \frac{2}{e^{4x}+1}.$

2. 求下列函数在给定点处的导数：

(1) $y = \sin x - \cos x$，求$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}$；　　(2) $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5} + 1$，求 $f'(0)$；

(3) 设 $y = f\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)$，$f'(x) = \arctan x^2$，求$y'|_{x=0}$.

解　(1) $y' = \cos x + \sin x$，

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$$

(2) $f'(x)=\dfrac{-(-1)\cdot 3}{(5-x)^2}+\dfrac{2}{5}x=\dfrac{3}{(5-x)^2}+\dfrac{2}{5}x$,

$$f'(0)=\frac{3}{(5-0)^2}+\frac{2}{5}\cdot 0=\frac{3}{25}.$$

(3) $$\begin{aligned}y'&=\arctan\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^2\cdot\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)'\\&=\arctan\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^2\cdot\frac{2(2x+3)-2(2x-3)}{(2x+3)^2}\\&=\frac{12}{(2x+3)^2}\cdot\arctan\left(\frac{2x-3}{2x+3}\right)^2,\end{aligned}$$

$$y'\Big|_{x=0}=\frac{12}{(2\cdot 0+3)^2}\cdot\arctan\left(\frac{-3}{3}\right)^2=\frac{12}{9}\cdot\arctan 1=\frac{\pi}{3}.$$

3. 设 $f(x)$ 可导,求下列函数的导数:

(1) $y=e^{f(x)}f(e^x)$;　　(2) $y=f(\sin x)+\sin f(x)+f[\sin f(x)]$.

解　(1) $$\begin{aligned}y'&=(e^{f(x)})'\cdot f(e^x)+e^{f(x)}[f(e^x)]'\\&=e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot f(e^x)+e^{f(x)}\cdot f'(e^x)\cdot(e^x)'\\&=e^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot f(e^x)+e^{f(x)}\cdot f'(e^x)\cdot e^x.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}y'&=[f(\sin x)]'+[\sin f(x)]'+\{f[\sin f(x)]\}'\\&=f'(\sin x)\cdot(\sin x)'+\cos f(x)\cdot f'(x)+f'[\sin f(x)]\cdot[\sin f(x)]'\cdot f'(x)\\&=f'(\sin x)\cdot\cos x+\cos f(x)\cdot f'(x)+f'[\sin f(x)]\cdot\cos f(x)\cdot f'(x).\end{aligned}$$

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\sin x\cos mx$;　　(2) $y=x^3\ln x$;

(3) $y=x^2+\arctan x^2$;　　(4) $y=a^x\cos x$;

(5) $y=(1+x^2)\arctan x$;　　(6) $y=\dfrac{e^x}{x}$;

(7) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(8) $y=xe^{x^2}$.

解　(1) $$\begin{aligned}y'&=\cos x\cos mx+\sin x\cdot(-m\sin mx)\\&=\cos x\cos mx-m\sin x\cdot\sin mx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y''=&(-\sin x)\cdot\cos mx+\cos x\cdot(-m\sin mx)-m\cos x\cdot\sin mx-\\&m\sin x\cdot(m\cos mx)\\=&-(1+m^2)\sin x\cos mx-2m\cos x\sin mx.\end{aligned}$$

(2) $y' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2$,

$y'' = 6x\ln x + 3x^2 \cdot \dfrac{1}{x} + 2x = 6x\ln x + 5x$.

(3) $y' = 2x + \dfrac{1}{1+x^4} \cdot 2x = 2x + \dfrac{2x}{1+x^4}$,

$y'' = 2 + \dfrac{2(1+x^4) - 2x \cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = 2 + \dfrac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$.

(4) $y' = a^x \cdot \ln a \cdot \cos x - a^x \sin x$,

$y'' = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a \cdot \cos x - \ln a \cdot a^x \cdot \sin x - a^x \cdot \ln a \cdot \sin x - a^x \cos x$

$= (\ln a)^2 a^x \cos x - 2\sin x(\ln a)a^x - a^x \cos x$.

(5) $y' = 2x \cdot \arctan x + \dfrac{1+x^2}{1+x^2} = 2x\arctan x + 1$,

$y'' = 2\arctan x + 2x \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = 2\arctan x + \dfrac{2x}{1+x^2}$,

(6) $y' = \dfrac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$,

$y'' = \dfrac{x^2[e^x + e^x(x-1)] - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \dfrac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$,

(7) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left[1 + \dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x\right]$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

$y'' = \dfrac{-\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{1+x^2} = -\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

(8) $y' = e^{x^2} + x \cdot e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2}(1+2x^2)$,

$y'' = e^{x^2} \cdot 2x(1+2x^2) + e^{x^2} \cdot 4x = 2xe^{x^2}(3+2x^2)$.

2.设 $f''(x)$ 存在,求下列函数的二阶导数:

(1) $y = f(\sin^2 x)$;　　　　(2) $y = \arctan f(x)$.

解　(1) $y' = f'(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x = f'(\sin^2 x) \cdot \sin 2x$,

$y'' = f''(\sin^2 x) \cdot 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin 2x + f'(\sin^2 x) \cdot 2\cos 2x$

$= \sin^2(2x) f''(\sin^2 x) + 2\cos(2x) f'(\sin^2 x)$.

(2) $y' = \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$,

$y'' = \dfrac{f''(x)(1+f^2(x)) - 2f(x) \cdot f'(x) \cdot f'(x)}{[1+f^2(x)]^2}$

$$= \frac{f''(x)[1+f^2(x)] - 2f(x)\cdot[f'(x)]^2}{[1+f^2(x)]^2}.$$

3. 求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y = \dfrac{x}{1-x}$；　　(2) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$；

(3) $y = \sin^2 x$；　　(4) $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$.

解　(1) 因 $y' = \dfrac{1-x-(-1)\cdot x}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$,

$$y'' = \frac{-2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$y^{(3)} = \frac{-3(1-x)^2\cdot(-1)\cdot 2}{(1-x)^6} = \frac{6}{(1-x)^4},$$

故 $y^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

(2) 因 $y' = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x = 4\sin x\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x)$

$$= -2\sin 2x\cdot\cos 2x = -\sin 4x = \cos(4x + \frac{1}{2}\pi),$$

……

故 $y^{(n)} = 4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$.

(3) 因 $y = \sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$，故

$$y^{(n)} = -\frac{1}{2}\cos(2x + \frac{n\pi}{2})\cdot 2^n = -2^{n-1}\cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

(4) 因 $y = \left(\sin\dfrac{x}{2} - \cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = \sin^2\dfrac{x}{2} + \cos^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$$= 1 - \sin x,$$

故 $y^{(n)} = -\sin\left(x + \dfrac{n}{2}\pi\right)$.

4. 求下列函数指定阶数的导数：

(1) $y = e^x \sin x$，求 y'''；　　(2) $y = 2^x x^2$，求 $y^{(100)}$.

解　(1) 因 $y' = e^x\sin x + e^x\cos x$,

$$y'' = e^x\sin x + e^x\cos x + e^x\cos x - e^x\sin x = 2e^x\cos x,$$

故 $y''' = 2e^x\cos x - 2e^x\sin x = 2e^x(\cos x - \sin x)$.

(2) 因 $y' = 2^x\cdot\ln 2\cdot x^2 + 2x\cdot 2^x = 2^x(x^2\cdot\ln 2 + 2x)$,

$$y'' = \ln 2(2^x\cdot\ln 2\cdot x^2 + 2x\cdot 2^x) + 2\cdot 2^x + 2^x\cdot 2x\cdot\ln 2$$
$$= 2^x(x^2\ln^2 2 + 4x\cdot\ln 2 + 2),$$

$$y''' = 2^x \cdot \ln 2(x^2\ln^2 2 + 4x\ln 2 + 2) + 2^x(2x \cdot \ln^2 2 + 4\ln 2)$$
$$= 2^x \cdot \ln 2(x^2 \cdot \ln^2 2 + 6x \cdot \ln 2 + 6),$$

故 $y^{(100)} = 2^x \cdot \ln^{98} 2 \cdot (x^2 \cdot \ln^2 2 + 200x\ln 2 + 2 + 4 + \cdots + 198)$
$$= 2^x \cdot \ln^{98} 2(x^2 \cdot \ln^2 2 + 200x\ln 2 + 9\ 900).$$

习题 2-4

1. 求下列隐函数的导数：

(1) $e^y + xy^2 = e$；

(2) $x = y + \arctan y$；

(3) $x^4 + y^4 - 2x^2 y = 0$；

(4) $\arctan \dfrac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 (1) 方程两端分别对 x 求导得
$$e^y \cdot y' + y^2 + 2xy \cdot y' = 0,$$
则 $y' = -\dfrac{y^2}{e^y + 2xy}$.

(2) 方程两端分别对 x 求导得
$$1 = y' + \frac{y'}{1 + y^2},$$
则 $y' = \dfrac{1 + y^2}{2 + y^2}$.

(3) 方程两端分别对 x 求导得
$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4xy - 2x^2 y' = 0,$$
则 $y' = \dfrac{4xy - 4x^3}{4y^3 - 2x^2} = \dfrac{2xy - 2x^3}{2y^3 - x^2}$.

(4) 方程两端分别对 x 求导得
$$\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{2x + 2y \cdot y'}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$
则 $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

2. 求下列隐函数的二阶导数：

(1) $4x^2 - 9y^2 = 36$；

(2) $y - 3\sin y + 2x = 0$；

(3) $3y^2 = 2 - xe^y$；

(4) $\tan y - 2x + 1 = 0$.

解 (1) 应用隐函数求导方法得
$$8x - 18y \cdot y' = 0,$$
于是 $y' = \dfrac{4x}{9y}$.

在上式两端再对 x 求导得

$$y''=\frac{4}{9}\left(\frac{y-y'x}{y^2}\right)=\frac{4}{9}\cdot\frac{y-\frac{4x}{9y}x}{y^2}=\frac{4\cdot\frac{9y^2-4x^2}{9y}}{9y^2}=\frac{4\cdot(-36)}{81y^3}=-\frac{16}{9y^3}.$$

(2) 应用隐函数求导方法得

$$y'-3y'\cos y+2=0,$$

于是 $y'=-\dfrac{2}{1-3\cos y}$,

$$y''=\frac{(-3\cos y)'\cdot 2}{(3\cos y-1)^2}=\frac{6y'\sin y}{(3\cos y-1)^2}=\frac{6\sin y}{(3\cos y-1)^2}\cdot\frac{2}{3\cos y-1}$$

$$=\frac{12\sin y}{(3\cos y-1)^3}.$$

(3) 应用隐函数求导方法得

$$6y\cdot y'=-e^y+e^y\cdot y'\cdot(-x),$$

于是 $y'=-\dfrac{e^y}{6y+xe^y}$,

$$y''=\frac{-e^y\cdot y'(6y+xe^y)+e^y(6y'+e^y+xe^y\cdot y')}{(6y+xe^y)^2}$$

$$=\frac{-e^y(6y+xe^y-6-xe^y)\cdot y'+e^{2y}}{(6y+xe^y)^2}$$

$$=\frac{e^{2y}(6y-6)+e^{2y}(6y+xe^y)}{(6y+xe^y)^3}$$

$$=\frac{e^{2y}(xe^y-6+12y)}{(6y+xe^y)^3}$$

$$=\frac{6e^{2y}(2y-1)+xe^{3y}}{(6y+xe^y)^3}.$$

(4) 应用隐函数求导方法得

$$\sec^2 y\cdot y'-2=0,$$

于是 $y'=\dfrac{2}{\sec^2 y}=2\cos^2 y$,

$$y''=-4\cos y\cdot\sin y\cdot y'=-8\cos^3 y\sin y.$$

3. 求由下列参数方程所确定的函数的导数：

(1) $\begin{cases}x=at+b,\\ y=2at^2;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=\ln(1+t),\\ y=1+t^2;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\theta(1-\cos\theta),\\ y=2\theta\sin 3\theta;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\ln(1+t^2).\end{cases}$

解　(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4at}{a}=4t.$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2t}{\frac{1}{1+t}}=2t^2+2t.$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{2\sin 3\theta+6\theta\cos 3\theta}{(1-\cos\theta)+\theta\cdot\sin\theta}=\dfrac{2\sin 3\theta+6\theta\cos 3\theta}{1+\theta\sin\theta-\cos\theta}.$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t.$

4.求由下列参数方程所确定的函数的二阶导数：

(1) $\begin{cases}x=2t,\\ y=3t^2-1;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=3\cos t,\\ y=2\sin t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{1+t},\\ y=\dfrac{t}{1+t}.\end{cases}$

解　(1) 因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{6t}{2}=3t$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3}{2}.$

(2) 因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2\cos t}{-3\sin t}$，所以

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-2\sin t\cdot(-3\sin t)+3\cos t\cdot 2\cos t}{(-3\sin t)^2}}{-3\sin t}=-\frac{2}{9\sin^3 t}.$$

(3) 因 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{1+t-t}{(1+t)^2}}{\frac{-1}{(1+t)^2}}=-1$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0.$

5.用对数求导法求下列函数的导数：

(1) $y=x^5\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)^3(x+2)}{(x^2+x+1)^3}}\ (x>1)$；　　(2) $y=x^{\sin\frac{1}{x}}\ (x>1).$

解 （1）方程两端取对数得

$$\ln y = 5\ln x + \frac{1}{4}[3\ln(x-1) + \ln(x+2) - 3\ln(x^2+x+1)],$$

上式两端分别对 x 求导得

$$\frac{y'}{y} = \frac{5}{x} + \frac{1}{4}\left[\frac{3}{x-1} + \frac{1}{x+2} - \frac{3(2x+1)}{x^2+x+1}\right],$$

于是 $y' = y\left[\frac{5}{x} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{3(2x+1)}{4(x^2+x+1)}\right]$

$$= x^5\sqrt[4]{\frac{(x-1)^3(x+2)}{(x^2+x+1)^3}}\left[\frac{5}{x} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+2)} - \frac{3(2x+1)}{4(x^2+x+1)}\right].$$

（2）方程两端取对数得

$$\ln y = \sin\frac{1}{x}\ln x,$$

上式两端分别对 x 求导得

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\ln x + \sin\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x},$$

于是 $y' = y\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right) = x^{\sin\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right).$

6. 设曲线 $y = f(x)$ 由方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 所确定，求曲线 $y = f(x)$ 在点(0,1)处的法线方程.

解 方程两端对 x 求导得 $e^{2x+y}(2+y') + \sin(xy)\cdot(y+xy') = 0$，于是

$$y' = -\frac{y\sin xy + 2e^{2x+y}}{e^{2x+y} + x\sin xy},$$

$$y'\Big|_{(0,1)} = -\frac{0+2e^1}{e^1+0} = -2,$$

则所求法线方程为

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-0),$$

即 $y = \frac{1}{2}x + 1$.

7. 设 $\begin{cases} x = f'(t), \\ y = tf'(t) - f(t), \end{cases}$ 其中 $f(t)$ 的三阶导数存在，且 $f''(t) \neq 0$，求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$.

解 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t) + tf''(t) - f'(t)}{f''(t)} = t,$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{-f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=-\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}.$$

8. 落在平静水面上的石头会产生同心波纹.若最外一圈波半径的增大速率总是 6 m/s，问在 2 s 末扰动水面面积的增大速率为多少？

解　设最外一圈波的半径为 $r=r(t)$，圆的面积 $S=S(t)$.

在 $S=\pi r^2$ 两端分别对 t 求导得

$$\frac{dS}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}.$$

当 $t=2$ 时，$r=6\times 2=12$，$\frac{dr}{dt}=6$，代入上式得

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=2}=2\pi\cdot 12\cdot 6=144\pi(m^2/s).$$

9. 注水入深 8 m 上顶直径 8 m 的正圆锥形容器中，其速率为 4 m^3/min. 当水深为 5 m 时，其表面上升的速率为多少？

解　如图 2-1 所示，设在 t 时刻容器中水深为 h，水的容积为 V，水面半径为 Y，则

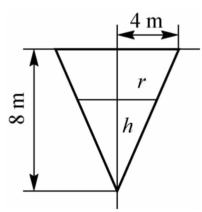


图 2-1

$$\frac{r}{4}=\frac{h}{8},$$

即 $r=\frac{h}{2}$，于是

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2h=\frac{\pi}{12}h^3,$$

则 $\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$，即 $\frac{dh}{dt}=\frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$.

故 $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=5}=\frac{4}{25\pi}\cdot 4=\frac{16}{25\pi}\approx 0.204(m/min)$.

习题 2-5

1. 已知 $y=3x^2$，计算在 $x=1$ 处，当 Δx 分别等于 1，0.1，0.01 时的 Δy 及 dy.

解 因 $\Delta y=3(x+\Delta x)^2-3x^2=3\Delta x(\Delta x+2x)$，$\mathrm{d}y=6x\Delta x$，所以

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=1}}=3\times1\times(1+2\times1)=9,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=1}}=6\times1\times1=6;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=3\times0.1\times(0.1+2\times1)=0.63,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}}=6\times1\times0.1=0.6;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=3\times0.01\times(0.01+2\times1)=0.0603,$$

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=6\times1\times0.01=0.06.$$

2.求下列函数的微分：

(1) $y=\dfrac{3}{2x}-4\sqrt{x}$；

(2) $y=x^2\cos 3x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$；

(4) $y=\ln^3(3+2x^2)$；

(5) $y=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{2x}}$；

(6) $y=3^{-x}\sin(1+x^2)$；

(7) $y=x\arcsin^2 x^2$；

(8) $y=\ln\sec(1+2x^2)$.

解 (1) $\mathrm{d}y=y'\cdot\mathrm{d}x=\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{-1}{x^2}-4\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=\left(-\dfrac{3}{2x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x.$

(2) $\mathrm{d}y=y'\cdot\mathrm{d}x=(2x\cos 3x-3x^2\sin 3x)\mathrm{d}x.$

(3) $\mathrm{d}y=y'\cdot\mathrm{d}x=\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)\cdot\mathrm{d}x=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

(4) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=[3\ln^2(3+2x^2)\cdot\dfrac{4x}{3+2x^2}]\mathrm{d}x=\dfrac{12x\ln^2(3+2x^2)}{3+2x^2}\mathrm{d}x.$

(5) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{2x\cdot\mathrm{e}^{2x}-2\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2}{\mathrm{e}^{4x}}\mathrm{d}x=\dfrac{2x(1-x)}{\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x.$

(6) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=(-3^{-x}\ln3\sin(1+x^2)+2x\cos(1+x^2)\cdot3^{-x})\mathrm{d}x$

$=3^{-x}[2x\cos(1+x^2)-\ln3\sin(1+x^2)]\mathrm{d}x.$

(7) $\mathrm{d}y=y'\cdot\mathrm{d}x=[\arcsin^2x^2+x\cdot2\arcsin x^2\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}]\mathrm{d}x$

$=\arcsin x^2(\arcsin x^2+\dfrac{4x^2}{\sqrt{1-x^4}})\mathrm{d}x.$

(8) $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\sec(1+2x^2)}\sec(1+2x^2)\tan(1+2x^2)\cdot4x\mathrm{d}x$

$= 4x\tan(1+2x^2)\mathrm{d}x.$

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $x^2 + y^2 = 1$ 所确定,求 $\mathrm{d}y$.

解 方程两端对 x 求导得

$$2x + 2y \cdot y' = 0,$$

于是 $y' = -\dfrac{x}{y}$,所以 $\mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x = -\dfrac{x}{y}\mathrm{d}x.$

4. 设由方程 $x^y = y^x$ 确定的 y 是 x 的函数,求 $\mathrm{d}y$.

解 方程两端取对数得

$$y\ln x = x\ln y,$$

两端对 x 求导得

$$y' \cdot \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + x\frac{y'}{y},$$

于是 $y' = \dfrac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}$,故 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \dfrac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}\mathrm{d}x.$

5. 求下列函数值的近似值:

(1) $\sin 30°30'$; (2) $\sqrt[3]{8.02}$; (3) $\ln 1.01$.

解 (1) 由 $\sin x \approx \sin x_0 + (\sin x)'\Big|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)$ 及取 $x_0 = 30° = \dfrac{\pi}{6}$ 得

$$\sin 30°30' \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}} \times \frac{\pi}{360} \approx 0.5 + 0.0076 = 0.5076.$$

(2) 由 $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x_0} + (\sqrt[3]{x})'\Big|_{x=x_0}(x - x_0)$ 及取 $x_0 = 8$ 得

$$\sqrt[3]{8.02} \approx \sqrt[3]{8} + \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)\Big|_{x=8} \cdot 0.02 \approx 2.0017.$$

(3) 由 $\ln x \approx \ln x_0 + (\ln x)'\Big|_{x=x_0}(x - x_0)$ 及取 $x_0 = 1$ 得

$$\ln 1.01 \approx \ln 1 + \frac{1}{x}\Big|_{x=1} \cdot 0.01 = 0.01.$$

6. 当 $|x|$ 较小时,证明下列近似公式:

(1) $\sin x \approx x$(x 是角的弧度值); (2) $\mathrm{e}^x \approx 1 + x$.

证明 (1) $\sin x \approx \sin 0 + (\sin x)'\Big|_{x=0} \cdot x = 0 + \cos 0 \cdot x = x.$

(2) $\mathrm{e}^x \approx \mathrm{e}^0 + (\mathrm{e}^x)'\Big|_{x=0} \cdot x = 1 + 1 \cdot x = 1 + x.$

7. 半径为 10 cm 的金属圆片加热后,半径增加了 0.05 cm,问面积大约增加了多少?

解 设面积 $S(r) = \pi r^2$,则

$$S(10) = 100\pi(\mathrm{cm}^2).$$

由 $S(r) \approx \pi r_0^2 + (\pi r^2)'\Big|_{r=r_0} \cdot (r - r_0)$ 及 $r_0 = 10$ 得

$$S(10.05) \approx \pi \times 10^2 + 2\pi \times 10 \times 0.05 = 101\pi.$$

故 $\Delta S = \pi(\text{cm}^2)$.

8. 已知当 $\Delta x = 0.5$ 时，函数 $y = f(e^{-2x})$ 在 $x = 2$ 处的微分为 -0.1，求 $f'(e^{-4})$ 的值.

解 因 $\dfrac{dy}{dx} = f'(e^{-2x}) \cdot (-2e^{-2x}) = -2e^{-2x} f'(e^{-2x})$，所以

$$dy = -2e^{-2x} f'(e^{-2x}) dx,$$

$$dy\Big|_{x=2} = -2e^{-4} f'(e^{-4}) \cdot 0.5 = -0.1,$$

故 $f'(e^{-4}) = \dfrac{0.1}{e^{-4}} = 0.1e^4$.

总复习题二

1. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1} = 2$，求 $f'(1)$.

解 由 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1} = 2$ 知 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) \to 0$，故

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{1} = 2,$$

则 $f'(1) = 2$.

2. 设有一个非均匀杆 AB，AM 部分的质量与动点 M 到端点 A 的距离 x 的平方成正比，杆的质量表达式为 $m(x) = \dfrac{5}{2}x^2$，求杆在任一点 M 处的线密度 $\rho(x)$.

解 杆在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均线密度为

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x},$$

在点 x_0 处的线密度为

$$\rho(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x_0 + \Delta x) - m(x_0)}{\Delta x},$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{5}{2}(x_0 + \Delta x)^2 - \frac{5}{2}x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{5}{2}\Delta x + 5x_0\right) = 5x_0,$$

故杆在任一点 M 处的线密度 $\rho(x) = 5x$.

3. 求下列函数的导数：

(1) $y = 3x^2 - \dfrac{2}{x^2} + 5$；　　(2) $y = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$；

(3) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$；　　(4) $y = x^2 \cos x$；

(5) $y = 2\tan x + \sec x - 1$；　　(6) $y = a^x + e^x$.

解　(1) $y' = 6x - 2 \cdot (-2) \cdot \dfrac{1}{x^3} = 6x + \dfrac{4}{x^3}$.

(2) $y = (\sqrt{x}+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = 1 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$,

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) $y' = \dfrac{(1-x)' \cdot (1+x) - (1+x)' \cdot (1-x)}{(1+x)^2}$

$= \dfrac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2}$

$= -\dfrac{2}{(1+x)^2}$.

(4) $y' = (x^2)' \cdot \cos x + x^2 \cdot (\cos x)' = 2x\cos x - x^2 \sin x$.

(5) $y' = 2\sec^2 x + \sec x \tan x = \sec x(2\sec x + \tan x)$.

(6) $y' = (a^x)' + (e^x)' = a^x \ln a + e^x$.

4. 已知函数 $y = x\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2}$，求 $y'\big|_{x=1}$.

解　$y' = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right) + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)$,

$$y'\Big|_{x=1} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

5. $f\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sin x$，求 $f'[f(x)]$.

解　由 $f\left(\dfrac{1}{2}x\right) = \sin x$ 得

$$f(x) = \sin 2x,$$

故 $f[f(x)] = \sin[2f(x)]$，则

$$f'[f(x)] = 2\cos[2f(x)] = 2\cos(2\sin 2x).$$

6. 设 $f(x)$ 任意阶可导，且 $f'(x) = e^{-f(x)}$，$f(0) = 1$，求 $f^{(n)}(0)$（n 为正整数）.

解　由 $f'(x) = e^{-f(x)}$ 知

$$f''(x)=-\mathrm{e}^{-f(x)}\cdot f'(x)=-\mathrm{e}^{-2f(x)},$$
$$f'''(x)=2\mathrm{e}^{-2f(x)}\cdot f'(x)=2\mathrm{e}^{-3f(x)},$$
$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(x)}.$$

又因为 $f(0)=1$,所以

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\mathrm{e}^{-nf(0)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\mathrm{e}^{-n}.$$

7. 已知函数 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$,求 $y^{(n)}(0)$(n 为正整数).

解　由题得

$$y'=-\frac{2}{(1+x)^2},\ y''=\frac{4}{(1+x)^3},$$
$$y'''=\frac{-12}{(1+x)^4},\ \cdots,\ y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}},$$

故 $y^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot 2\cdot n!$.

8. 设 $x=y^2+y,u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$.

解　由题得$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{3}{2}(x^2+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)\cdot(2y+1)$,故

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{2}{3(1+2x)(1+2y)(x^2+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

9. 质点做曲线运动,其位置坐标与时间 t 的关系为 $x=t^2+t-2,y=3t^2-2t-1$,则求 $t=1$ 时刻质点速度的大小.

解　由题得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{6t-2}{2t+1}$,则当 $t=1$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{4}{3}$.

10. 设 $y=\ln\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)$,求 $\mathrm{d}y$.

解　$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\frac{1}{\arctan\frac{1}{x}}\mathrm{d}x.$$

11. 将适当的函数填入下列括号内,使等式成立:

(1) $\mathrm{d}(\quad)=x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $\mathrm{d}(\quad)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\mathrm{d}(\quad)=2\sin x\mathrm{d}x$;　　(4) $\mathrm{d}(\quad)=\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\dfrac{1}{3}x^3$.　(2) $\arctan x$.　(3) $-2\cos x$.　(4) $\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$.

12. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

解　由 $y=\sin x$ 得

$$y'=\cos x,y'\Big|_{x=0}=1.$$

又因为 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在原点相切，则可得

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\frac{2}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f'\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{-2}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}2f'\left(\frac{2}{n}\right)=2.$

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'_-(0)$、$f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 是否存在.

解　因为 $f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0,\end{cases}$ 所以

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+x}=1,\ f'(0)=\frac{1}{1+0}=1,$$

故 $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)=1$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$ 试确定 a,b 的值，使该函数在点 $x=1$ 处可导.

解　由 $f'(x)=\begin{cases}2x, & x<1,\\ a, & x>1,\end{cases}$ 可知若函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处可导，则在 $x=1$ 处必连续，即

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1),$$

则 $a+b=1$.

又因 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}2x=2$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=a=2$，故

$$\begin{cases}a=2,\\ b=-1.\end{cases}$$

15. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，求 $y''(0)$.

解　把 $x=0$ 代入方程得

$$e^y-1=0,$$

故 $y(0)=e^0-1=0$.

方程两端对 x 求导得

$$e^y \cdot y' + 6y + 6x \cdot y' + 2x = 0,$$

将 $x = 0, y = 0$ 代入上式得

$$y'(0) = 0;$$

再对 x 求导得

$$e^y \cdot y'' + e^y \cdot y'^2 + 12y' + 6xy'' + 2 = 0,$$

将 $x = 0$，$y = 0$，$y' = 0$ 代入上式得

$$y''(0) = -2.$$

16. 设 $\begin{cases} x = 2te^t + 1, \\ y = t^3 - 3t, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

解 $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2te^t + 2e^t} = \frac{3(t+1)(t-1)}{2e^t(t+1)} = \frac{3}{2} \frac{t-1}{e^t},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{e^t - (t-1) \cdot e^t}{e^{2t}}}{2e^t(t+1)} = -\frac{3}{4} \frac{t-2}{(t+1)e^{2t}}.$$

17. 求曲线 $\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 在 $t = 0$ 相应的点处的切线方程和法线方程.

解 $\quad$ 因 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2}e^{-2t}$，故

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = -\frac{1}{2},$$

则 $y|_{t=0} = 1$，$x|_{t=0} = 2$.

因此所求切线方程为 $y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)$，即 $x + 2y - 4 = 0$；

法线方程为 $y - 1 = 2(x-2)$，即 $2x - y - 3 = 0$.

18. 已知单摆的振动周期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，其中 $g = 980\ \text{cm/s}^2$，l 为摆长（单位:cm）. 设原摆长为 20 cm，为使周期 T 增大 0.05 s，摆长约需加长多少？

解 $\quad$ 由 $\Delta T \approx dT = \frac{\pi}{\sqrt{gl}} \Delta l$ 得

$$\Delta l = \frac{\sqrt{gl}}{\pi} dT \approx \frac{\sqrt{gl}}{\pi} \cdot \Delta T,$$

故 $\Delta\Big|_{l=20} \approx \frac{\sqrt{980 \times 20}}{3.14} \times 0.05 \approx 2.23\ \text{cm}$，即摆长约需加长 2.23 cm.

第三章

微分中值定理及导数的应用

习题 3-1

1. 已知函数 $f(x)=\ln\sin x$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理条件,试找出点 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$,使得 $f'(\xi)=0$.

解　由题意得 $f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$，则令 $f'(x)=0$,可得

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2},$$

所以 $\xi=\dfrac{\pi}{2}$.

2. 设函数 $f(x)=\sqrt{x}$,在区间 $[1,4]$ 上写出拉格朗日中值公式,并求出 ξ 的值.

解　已知 $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(\xi)=\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{4-1}=\dfrac{1}{3}$，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，则令 $f'(\xi)=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}=\dfrac{1}{3}$ 可得

$$\xi=\frac{9}{4}.$$

3. 对函数 $f(x)=\sin x$ 及 $g(x)=x+\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上验证柯西中值定理的正确性.

证明　因函数 $f(x)=\sin x, g(x)=x+\cos x$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续,在 $(0,\frac{\pi}{2})$

内可导,且在$(0,\frac{\pi}{2})$内$g'(x)=1-\sin x\neq 0$,故$f(x)$,$g(x)$满足柯西中值定理条件,从而至少存在一点$\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使

$$\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{g\left(\frac{\pi}{2}\right)-g(0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由$\dfrac{1-0}{\frac{\pi}{2}-1}=\dfrac{\cos\xi}{1-\sin\xi}$可得

$$\tan\frac{\xi}{2}=\frac{4-\pi}{\pi}.$$

因$0<\dfrac{4-\pi}{\pi}<1$,故$\xi=2\arctan\left(\dfrac{4-\pi}{\pi}\right)\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

因此,柯西中值定理对$f(x)=\sin x$,$g(x)=x+\cos x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是正确的.

4. 证明恒等式:$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

证明 取函数$f(x)=\arcsin x+\arccos x$,$x\in[-1,1]$.

因$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$,故$f(x)=C$,则取$x=0$可得

$$f(0)=C=\frac{\pi}{2},$$

因此$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$,$x\in[-1,1]$.

5. 不用求出函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$的导数,说明方程$f'(x)=0$有几个实根,并指出它们所在的区间.

解 由题意可知函数$f(x)$分别在$[1,2]$,$[2,3]$,$[3,4]$上连续,分别在$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内可导,且$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$,则由罗尔定理知至少存在$\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,$\xi_3\in(3,4)$,使$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$,即方程$f'(x)=0$至少有三个实根.

又因$f'(x)=0$为三次方程,故最多有三个实根,因此$f'(x)=0$有且仅有三个实根,它们分别位于区间$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$内.

6. 证明:

(1) $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x(x>0)$;

(2) $|\arctan b-\arctan a|\leqslant|b-a|$.

证明　(1) 令 $f(x)=\ln(1+x)$.

因 $f(x)$ 在$[0,+\infty]$上连续，在$(0,+\infty)$内可导，则由拉格朗日中值定理知至少存在一点 $\theta x\in(0,x)$，使 $\theta\in(0,1)$，且使$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\theta x)$，即

$$\frac{\ln(1+x)-0}{x}=\frac{1}{1+\theta x},\ \ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}.$$

因为 $\theta x>0$，则 $1+\theta x>1$，所以 $\ln(1+x)<x$.

又因为 $\theta<1$，所以 $\theta x<x$，故

$$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\theta x},$$

即$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)$.

综上所述，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

(2) 当 $a=b$ 时，原式显然成立.

当 $a\neq b$ 时，取函数 $f(x)=\arctan x$，$f(x)$ 在$[a,b]$或$[b,a]$上连续，在(a,b)或(b,a)内可导，由拉格朗日中值定理知，存在 $\xi\in(a,b)$ 或(b,a) 使$\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=f'(\xi)$，即

$$\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}=\frac{1}{1+\xi^2},$$

故$|\arctan a-\arctan b|=\dfrac{1}{1+\xi^2}|a-b|\leqslant|a-b|$.

7. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证明　取函数 $F(x)=x^2$，因 $F(x)$，$f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $F'(x)=2x\neq0$，$x\in(0,1)$，则由柯西中值定理知至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使$\dfrac{f(1)-f(0)}{F(1)-F(0)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$，即

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

故 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

8. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

证明　构造函数 $h(x)=f(x)\cdot e^{g(x)}$，则

$$h(a)=h(b)=0,$$

$$h'(x)=f'(x)\cdot e^{g(x)}+f(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{g(x)}[f'(x)+f(x)\cdot g'(x)].$$

由罗尔定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $h'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0$.

9. 证明方程 $x^3+x+c=0$ 至多有一个实根（c 为任意常数）.

证明 令 $f(x)=x^3+x+c$，则

$$f'(x)=3x^2+1>0,$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，因此至多存在一个 ξ 使 $f(\xi)=0$，即 $x^3+x+c=0$ 至多有一个实根.

习题 3-2

1. 用洛必达法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2+x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$（$n,m$ 是整数，且 $m\neq n$）；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{\tan x-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin 5x}$；

(6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{1}{\ln x}}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2}{(2\sqrt{x})^{-1}}=\lim\limits_{x\to 3}6x^2\sqrt{x}=54\sqrt{3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{(2x+1)\sqrt{1+x^2}}=0$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{m\cdot x^{m-1}}{n\cdot x^{n-1}}=\dfrac{m}{n}$.

(4) 原式 $==\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\tan x}{x}-1}=-1$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{3\cos 3x}{\sin 3x}}{\dfrac{5\cos 5x}{\sin 5x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\cos 3x\sin 5x}{5\sin 3x\cos 5x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3\cdot 5x\cos 3x}{5\cdot 3x\cos 5x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos 3x}{\cos 5x}=1$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x\ln x}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

（7）原式 $= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3}}{(-2) \cdot \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty.$

（8）原式 $= e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\ln x}\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{\frac{-1}{2-x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-2}} = e^{-1}.$

（9）原式 $= e^{\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \ln\frac{x^2+1}{x^2-1}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln\frac{x^2+1}{x^2-1}}{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1} \cdot \frac{-4x}{(x^2-1)^2}}{-2x^{-3}}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^4}{(x^2+1)(x^2-1)}}$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{(1+\frac{1}{x^2})(1-\frac{1}{x^2})}} = e^2.$$

（10）原式 $= e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan 2x \cdot \ln\tan x} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln\tan x}{\frac{1}{\tan 2x}}} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\tan x} - 2x \cdot \frac{2}{\cos^2 2x}}}$

$$= e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} -\frac{\tan^2 2x \cdot \cos^2 2x}{2\tan x \cdot \cos^2 x}} = e^{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin^2 2x}{2\tan x \cdot \cos^2 x}}$$

$$= e^{-1}.$$

2. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x\sin^2 x}$；　　（2）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + \sin x - 2x - 1}{x\ln(1+x)}$；

（3）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin^3 x} - 1}{x(1-\cos x)}$；　　（4）$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 \cos\frac{1}{x}}{\sin x}$.

解　（1）原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sin x\cos^2 x + 2x\cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\cos^3 x - 2\sin^2 x\cos x + 2\cos^3 x - 6x\cos^2 x\sin x}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

（2）原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + \cos x - 2}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x}{\frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2}} = \frac{1}{2}.$

（3）原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin^3 x} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x}{1 - \cos x + x\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{9\sin^4 x\cos^2 x e^{\sin^3 x} + 6\sin x\cos^2 x e^{\sin^3 x} - 3\sin^3 x e^{\sin 3x}}{2\sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin^3} x \cdot (27\sin^6 x\cos^3 x + 54\sin^3 x\cos^3 x - 21\sin^4 x\cos x - 27\sin^5 x\cos x + 6\cos^3 x)}{3\cos x - x\sin x}$$

$$= \frac{6}{3} = 2.$$

(4) 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\cos\dfrac{1}{x} = 0.$

3. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一个邻域内具有二阶导数,且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$,并计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$,故有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

因此 $f(0)=0$.

又因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{1} = 0$,故 $f'(0)=0$.

因 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{x^2+f(x)}\cdot\frac{x^2+f(x)}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2+f(x)}{x^2}} = e^3,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2} = 3$;

因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+f''(x)}{2} = 3$,

故 $f''(0)=4$.

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{f(x)}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{f''(x)}{2}} = e^2.$

习题 3-3

1. 按 $(x-1)$ 的幂展开多项式 $f(x) = x^3+x-1$.

解 因为 $f'(x) = 3x^2+1$,所以

$$f''(x) = 6x, f'''(x) = 6, f^{(n)}(x) = 0, (n \geqslant 4),$$

$$f(1) = 1, f'(1) = 4, f''(1) = 6, f'''(1) = 6,$$

故 $f(x) = x^3+x-1$

$$= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

$$= 1 + 4(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3.$$

2.求函数 $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 的带有佩亚诺型余项的四阶麦克劳林公式，并求 $f'''(0)$.

解 因 $f(x) = \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$，所以

$$f'(x) = \frac{2-2x^2}{(1-x+x^2)^2},$$

$$f''(x) = \frac{4(x^3-3x+1)}{(1-x+x^2)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{12(-x^4+6x^2-4x)}{(1-x+x^2)^4},$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{48(x^5-10x^3+10x^2-1)}{(1-x+x^2)^5},$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{240(-x^6+15x^4-20x^3+-24x)}{(1-x+x^2)^6},$$

$$f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=4, f'''(0)=0, f^{(4)}(0)=48.$$

因 $\lim\limits_{x\to 0} f^{(5)}(x) = 0$，从而存在 0 的一个邻域，使 $f^{(5)}(x)$ 在该邻域有界，即

$$f(x) = 1+2x+2x^2+2x^4+o(x^4), f'''(0)=0.$$

3.写出函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解 因为 $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，$f^n(-1) = -n!$，故

$$\frac{1}{x} = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n +$$

$$\frac{f^{(}n+1)[-1+\theta(x+1)]}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$$= -[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}},$$

其中，$0<\theta<1$.

4.求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的三阶泰勒公式.

解 因为 $f(x) = \sqrt{x}$，所以

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}, f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}},$$

$$f(4)=2, f'(4)=\frac{1}{4}, f''(4)=-\frac{1}{32}, f'''(4)=\frac{3}{256},$$

故 $\sqrt{x}=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}[4+\theta(x-4)]}{4!}(x-4)^4$

$$=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384[4+\theta(x-4)]^{\frac{7}{2}}}(x-4)^4,$$

其中，$0<\theta<1$.

5. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有拉格朗日型余项的三阶麦克劳林公式.

解　因为 $f(x)=\tan x$，$f'(x)=\sec^2 x$，

$f''(x)=2\sec^2 x\tan x, f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x$,

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)&=8\sec^2 x\cdot\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x\\&=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x\\&=\frac{8(\sin^2 x+2)\sin x}{\cos^5 x},\end{aligned}$$

$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=0$，$f'''(0)=2$，

故 $f(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{\sin(\theta x)[\sin^2(\theta x)+2]}{3\cos^5(\theta x)}$，其中，$0<\theta<1$.

6. 写出函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式.

解　因为 $f(x)=xe^x$，所以

$$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x,$$

$$f^{(n)}(0)=n,$$

故 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$

$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

7. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-x})$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$,

用 $\frac{1}{x}$ 代入其中可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[(1+3x^2)^{\frac{1}{3}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[1+o(x)-1+\frac{1}{2}x+o(x)]$$

$$=\frac{1}{2},$$

故$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2+3x}-\sqrt{x^2-x})=\frac{1}{2}.$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4))}{[1-\frac{1}{2}x^2+0(x^2)-1-x^2+o(x^2)](x^2+o(x^2))}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

习题 3-4

1. 判定函数 $f(x)=\arctan x-x$ 的单调性.

解 因 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\leqslant 0$,且 $f'(x)=0$ 仅在 $x=0$ 时成立,因此函数 $f(x)=\arctan x-x$ 在$(-\infty,\infty)$内单调递减.

2. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=(x+2)^2(x-1)^3$; (2) $y=x^2-4x+7$;

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; (4) $y=x^n e^{-x}(n>0,x\geqslant 0)$;

(5) $y=\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$; (6) $y=x^3-\frac{1}{x}$.

解 (1) 因函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,在$(-\infty,+\infty)$内可导,且 $y'=(x+2)(x-1)^2(5x+4)$,则令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-2$, $x_2=1$(重根), $x_3=-\frac{4}{5}$. 这三个驻点把$(-\infty,+\infty)$分成三个区间:$(-\infty,-2)$,$(-2,-\frac{4}{5})$,$(-\frac{4}{5},+\infty)$.

当 $-\infty<x<-2$ 及 $-\frac{4}{5}<x<+\infty$ 时,$y'>0$,因此函数在$(-\infty,-2]$,$[-\frac{4}{5},$

$+\infty)$ 上单调递增.

当 $-2<x<-\frac{4}{5}$ 时，$y'<0$，因此函数在 $[-2,-\frac{4}{5}]$ 上单调递减.

（2）因函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导且 $y'=2x-4=2(x-2)$，则令 $y'=0$ 可得驻点为 $x=2$. 这个驻点把 $(-\infty,+\infty)$ 分成两个区间：$(-\infty,2)$，$(2,+\infty)$.

当 $-\infty<x<2$ 时，$y'<0$，因此函数在 $(-\infty,2]$ 上单调递减；

当 $2<x<+\infty$ 时，$y'>0$，因此函数在 $[2,+\infty)$ 上单调递增.

（3）因函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0,$$

因此函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调递增.

（4）因函数在 $[0,+\infty)$ 内可导，且

$$y'=nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}-x^n\mathrm{e}^{-x}=x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}(n-x),$$

则令 $y'=0$ 可得驻点为 $x_1=n$. 这个驻点把区间 $[0,+\infty)$ 分成两部分区间：$(0,n)$，$(n,+\infty)$.

当 $0<x<n$ 时，$y'>0$，因此函数在 $[0,n]$ 上单调递增；

当 $n<x<+\infty$ 时，$y'<0$，因此函数在 $[n,+\infty)$ 上单调递减.

（5）因函数在 $(-\infty,+\infty)$ 内除 $x=0$ 外可导，且

$$y'=x^{\frac{5}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}(x+1)(x-1),$$

则令 $y'=0$ 可得驻点 $x_1=1$，$x_2=-1$. 这两个驻点连同原点把区间分成四个区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$.

当 $-\infty<x<-1$ 及 $0<x<1$ 时，$y'<0$，因此函数在 $(-\infty,-1]$，$(0,1]$ 上单调递减；当 $-1<x<0$ 及 $1<x<\infty$ 时，$y'>0$，因此函数在 $[-1,0)$，$[1,+\infty)$ 上单调递增.

（6）因函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，在定义域内可导，且

$$y'=3x^2+\frac{1}{x^2}>0,$$

故函数在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增.

3. 利用单调性证明下列不等式：

（1）当 $x>0$ 时，$x>\ln(1+x)$；

（2）当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$；

（3）当 $x>0$ 时，$x>\sin x$；

（4）当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x>\frac{2}{\pi}x$.

证明 (1) 取 $f(t)=\ln(1+t)-t$，则 $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}-1<0$，$t\in(0,+\infty)$，因此函数 $f(t)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递减.

故当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)$，即 $\ln(1+x)-x<0$，亦即

$$x>\ln(1+x),(x>0).$$

(2) 取 $f(t)=\ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{2}$，则

$$f'(t)=\frac{1}{1+t}-1+t=\frac{t^2}{1+t}>0,\ t\in(0,+\infty),$$

因此函数 $f(t)$ 在$(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即 $\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$，亦即

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\ (x>0).$$

(3) 取 $f(t)=t-\sin t$，则 $f'(t)=1-\cos t\geqslant 0$，$t\in(0,+\infty)$，因此函数 $f(t)$ 在区间$(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)$，即 $x-\sin x>0$，亦即

$$x>\sin x,\ (x>0).$$

(4) 取 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，则

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},f''(x)=-\sin x<0,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$

因此函数 $f'(x)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减.

故 $f'(0)=1-\dfrac{2}{\pi}>0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{2}{\pi}<0$.

设存在 x_0 使得 $f''(x_0)=0$，$x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)>0,\ x\in(0,\ x_0),$$

$$f'(x)<0,x\in\left(x_0,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

因此 $f(x)$ 在$[0,\ x_0]$ 上单调递增，即 $f(x)>f(0)=0$，$x\in[0,x_0]$；

$f(x)$ 在$\left[x_0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递减，即 $f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，$x\in\left[x_0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

故 $\sin x-\dfrac{2}{\pi}x>0$，$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，即 $\sin x>\dfrac{2}{\pi}x$，$\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 证明方程 $4x=2^x$ 在$[0,1]$ 上只有唯一的实根.

证明 令 $f(x)=4x-2^x$，则

$$f'(x)=4-2^x\ln 2,$$

$$f''(x)=-2^x\ln^2 2<0,\ x\in(0,1).$$

因 $f'(x)$ 在$[0,1]$上单调递减,故

$$f'(x)>f'(1)=4-2\ln 2>0.$$

因 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,$f(0)=-1<0$,$f(1)=2>0$,所以 $f(x)$ 在$[0,1]$上有且仅有一个实根,即方程 $4x=2^x$ 在$[0,1]$上只有唯一的实根.

习题 3-5

1.求下列函数的极值:

(1) $f(x)=x-\ln(1+x)$; (2) $f(x)=x+\sqrt{x+1}$;

(3) $f(x)=e^x\cos x$; (4) $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$;

(5) $f(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$; (6) $f(x)=x+e^{-x}$.

解 (1)因函数的定义域为$(-1,+\infty)$,在$(-1,+\infty)$内可导,且 $f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$,故

$$f''(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\ (x>-1).$$

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x=0$,由 $f''(0)=1>0$ 知 $f(0)=0$ 为极小值.

(2)因函数的定义域为$[-1,+\infty)$,在$[-1,+\infty)$内可导,且 $f'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}+1}{2\sqrt{1+x}}$,故

$$f''(x)=-\frac{1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

因 $f'(x)>0$,故 $f(x)$ 没有极值.

(3)因 $f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$,故

$$f''(x)=-2e^x\sin x.$$

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$,则

$$x'_k=2k\pi+\frac{5}{4}\pi,(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

由 $f''(2k\pi+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}<0$ 知 $f(2k\pi+\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 为极大值.

由 $f''(2k\pi+\frac{5}{4}\pi)=\sqrt{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}>0$ 知 $f(2k\pi+\frac{5}{4}\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{2k\pi+\frac{5}{4}\pi}(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为极小值.

(4) 因函数的定义域为$(0,+\infty)$,在$(0,+\infty)$内可导,则

$$f'(x)=(e^{\frac{1}{x}\ln x})'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=e$.

当 $0<x<e$ 时,$f'(x)>0$,因此函数在$(0,e]$上单调递增;

当 $e<x<+\infty$ 时,$f'(x)<0$,因此函数在$[e,+\infty]$上单调递减,从而 $f(e)=e^{\frac{1}{e}}$ 为极大值.

(5) 因函数的定义域为$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$,在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$内可导,且 $f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}$,故 $f''(x)=6x+\frac{6}{x^3}$.

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x_1=-1$,$x_2=1$.

由 $f''(1)=12>0$,$f''(-1)=-12<0$ 知 $f(-1)=-4$ 为极大值,$f(1)=4$ 为极小值.

(6) 由题意得 $f'(x)=1-e^{-x}$,$f''(x)=e^{-x}$.

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x=0$,$f''(0)=1>0$,故知 $f(0)=1$ 为极小值.

2. 求下列函数的最值:

(1) $f(x)=x+\sqrt{1-x},x\in[-5,1]$;

(2) $f(x)=x^3-3x+3,x\in[-3,2]$;

(3) $f(x)=2x^3-6x^2-18x-7,x\in[1,4]$;

(4) $f(x)=x^2-\frac{54}{x},x\in[-6,-1]$.

解 (1) 函数在$[-5,1]$上可导,且 $f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{1-x}-1}{2\sqrt{1-x}}$.

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x=\frac{3}{4}$.

比较 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$,$f(1)=1$,$f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$ 可得函数的最大值为 $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4}$,最小值为 $f(-5)=-5+\sqrt{6}$.

(2) 函数在$[-3,2]$上可导,且 $f'(x)=3x^2-3$.

令 $f'(x)=0$,得驻点 $x_1=-1$,$x_2=1$.

比较 $f(-3)=-15$，$f(-1)=5$，$f(1)=1$，$f(2)=5$ 可得函数的最大值为 $f(-1)=f(2)=5$，最小值为 $f(-3)=-15$.

(3) 函数在 $[1,4]$ 上可导，且 $f'(x)=6x^2-12x-18$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=3$.

比较 $f(1)=-29$，$f(3)=-61$，$f(4)=-47$ 可得函数最大值为 $f(1)=-29$，最小值为 $f(3)=-61$.

(4) 函数在 $[-6,-1]$ 上可导，且 $f'(x)=2x+\frac{54}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-3$.

比较 $f(-6)=45$，$f(-3)=27$，$f(-1)=55$，得函数最大值为 $f(-1)=55$，最小值为 $f(-3)=27$.

3. 证明：当 $|x|<2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$.

证明　令 $f(x)=3x-x^3$，则 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 内可导，且 $f'(x)=3-3x^2$.

令 $f'(x)=0$ 得驻点 $x_1=-1$，$x_2=1$.

比较 $f(-2)=2$，$f(-1)=-2$，$f(1)=2$，$f(2)=-2$ 可得函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值为 2，最小值为 -2.

故当 $|x|<2$ 时，$|3x-x^3|\leqslant 2$.

4. 函数 $y=\frac{x}{x^2+1}(x\geqslant 0)$ 在何处取得最值？

解　函数在 $(0,+\infty)$ 上可导，且 $y'=\frac{(1+x)(1-x)}{x^2+1}$.

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=1$.

比较 $y\Big|_{x=0}=0$，$y\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}$ 可得函数在 $x=0$ 处取得最小值 0，在 $x=1$ 处取得最大值$\frac{1}{2}$.

5. 若造一圆柱形油罐，体积为 V，问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？

解　已知 $\pi r^2h=V$，即 $h=\frac{V}{\pi r^2}$，则圆柱形油罐的表面积为

$$A=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r},\ r\in(0,+\infty),$$

故 $A'=4\pi r-\frac{2V}{r^2}$，$A''=4\pi+\frac{4V}{r^3}$.

令 $A'=0$，得 $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

由 $A''\Big|_{r}=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$ 知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 为极小值点.

又因驻点唯一,故极小值点就是最小值点,此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$.

6. 有一长为 a 的铁丝,将其剪成两段,围成两个正方形,怎样剪能使两个正方形面积之和最小?

解 设将铁丝分为 x, $a-x$ 两段,则两个正方形的面积之和为

$$f(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{a-x}{4}\right)^2,$$

故 $f'(x)=2\cdot\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{a-x}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2x}{8}-\dfrac{a}{8}$, $f''(x)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=\dfrac{a}{2}$.

又因 $f''(x)=\dfrac{1}{4}(>0)$,知 $x=a$ 为极小值点.

又因驻点唯一,故极小值点就是最小值点.

7. 某房地产公司有 50 套公寓要出租,当月租金定为 1 000 元时,公寓会全部租出去,若月租金每增加 50 元时,就会多一套公寓租不出去,且租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费,试问将房租定为多少可获得最大收入?

解 设每套月房租为 x 元,则租不出去的房子数为 $\dfrac{x-1\,000}{50}=\dfrac{x}{50}-20$,租出去的套数为 $50-\left(\dfrac{x}{50}-20\right)=70-\dfrac{x}{50}$.

每套获利 $(x-100)$ 元,总利润为

$$f(x)=\left(70-\frac{x}{50}\right)\cdot(x-100)=-\frac{x^2}{50}+72x-7\,000,$$

则 $f'(x)=\dfrac{-x}{25}+72$, $f''(x)=-\dfrac{1}{25}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=1\,800$.

由 $f''(x)<0$ 知 $x=1\,800$ 为极大值点.

又因驻点唯一,故极大值点就是最大值点.

习题 3-6

1. 求下列函数图形的凹凸区间和拐点：

（1）$y = xe^{-x}$；　　（2）$y = \ln(x^3 + 1)$；

（3）$y = x^4(12\ln x - 7)$；　　（4）$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$.

解　（1）由题意知函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，且

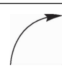
$$y' = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$y'' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + xe^{-x}.$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 1$；令 $y'' = 0$，得 $x = 2$.

上述两点将区间$(-\infty, +\infty)$分为三个区间：$(-\infty, 1]$，$[1, 2]$，$[2, +\infty)$，在各部分区间内 y' 和 y'' 的符号、相应曲线弧的升降及凹、凸，以及极值点和拐点等如表 3-1 所示.

表 3-1

x	$(-\infty, 1]$	1	$[1, 2]$	2	$[2, +\infty)$
y'	+	0	−	−	−
y''	−	−	−	0	+
$y = f(x)$ 的图形		极大		拐点	

故函数在$(-\infty, 2]$内是凸的，在$[2, +\infty)$内是凹的，$\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$是拐点.

（2）由题意知函数的定义域为$(-1, +\infty)$，且

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + 1},\ y'' = \frac{3x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}.$$

令 $y' = 0$，得 $x = 0$；令 $y'' = 0$，得 $x_1 = 0$，$x_2 = \sqrt[3]{2}$.

上述点将区间$(-1, +\infty)$分为三个区间，即$(-1, 0]$，$[0, \sqrt[3]{2}]$，$[\sqrt[3]{2}, +\infty)$，在各部分区间内 y' 和 ″ 的符号、相应曲线弧度的升降及凹、凸，以及极值点和拐点等如表 3-2 所示.

表 3-2

x	$(-1, 0]$	0	$[0, \sqrt[3]{2}]$	$\sqrt[3]{2}$	$[\sqrt[3]{2}, +\infty]$
y'	+	0	+	+	+
y''	−	0	+	0	−
$y = f(x)$ 的图形		拐点		拐点	

故函数在$[-1,0)$及$[\sqrt[3]{2},+\infty)$内是凸的，在$[0,\sqrt[3]{2}]$内是凹的，$(0,0)$，$(\sqrt[3]{2},\ln 3)$是拐点.

(3) 函数的定义域为$(0,+\infty)$，且

$$y' = 4x^3(12\ln x - 7) + x^4 \cdot \frac{12}{x} = 16x^3(3\ln x - 1),$$

$$y'' = 144x^2\ln x.$$

令 $y' = 0$，得 $x = e^{\frac{1}{3}}$；令 $y'' = 0$，得 $x = 1$.

上述点将区间$(0,+\infty)$分为三个区间：$(0,1]$，$[1,e^{\frac{1}{3}}]$，$[e^{\frac{1}{3}},+\infty)$，在各部分区间内 y'，y'' 的符号、相应曲线弧的升降及凹、凸，以及极值点和拐点如表 3-3 所示.

表 3-3

x	$(0,1]$	1	$[1,e^{\frac{1}{3}}]$	$e^{\frac{1}{3}}$	$[e^{\frac{1}{3}},+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y 的图形		拐点		极小	

故函数在$[0,1]$内是凸函数，在$[1,+\infty)$内是凹函数，$(1,-7)$是拐点.

(4) 函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1),$$

$$y'' = 12x + 6 = 6(2x+1).$$

令 $y' = 0$，得 $x_1 = 1$，$x_2 = -2$；令 $y'' = 0$，得 $x = -\frac{1}{2}$.

上述点将区间$(-\infty,+\infty)$分为四个区间，即$(-\infty,-2]$，$[-2,-\frac{1}{2}]$，$[-\frac{1}{2},1]$，$[1,+\infty)$.

在各部分区间内 y'，y'' 的符号、相应曲线弧的升降与凹、凸，以及极值点和拐点等如表 3-4 所示.

表 3-4

x	$(-\infty,-2]$	-2	$[-2,-\frac{1}{2}]$	$-\frac{1}{2}$	$[-\frac{1}{2},1]$	1	$[1,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y 的图形		极大		拐点		极小	

故函数在$(-\infty,-\frac{1}{2}]$内是凸的，在$[-\frac{1}{2},+\infty)$内是凹的，$(-\frac{1}{2},\frac{41}{2})$是拐点.

2. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

(1) $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n(x>0, y>0, x\neq y, n>1)$；

(2) $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y)$；

(3) $x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2}(x>0, y>0)$.

证明 (1) 设 $f(x)=x^n$，且定义域为 $(0,+\infty)$，则

$$f'(x)=n\cdot x^{n-1},\ f''(x)=n\cdot(n-1)\cdot x^{n-1}.$$

因为 $x>0$，所以

$$f'(x)>0,\ f''(x)>0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是凹的.

由凹函数的定义知，对于任意两点 $x_1, x_2\in(0,+\infty)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

故 $\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$(x>0,\ y>0,\ x\neq y,\ n>1)$.

(2) 设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=e^x>0,\ f''(x)=e^x>0,$$

故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的.

由凹函数的定义知，对于任意两点 $x_1, x_2\in(-\infty,+\infty)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

故 $\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}$，$(x\neq y)$.

(3) 设 $f(x)=x\ln x$，定义域为 $(0,+\infty)$，则

$$f'(x)=\ln x+1,\ f''(x)=\frac{1}{x}>0,$$

故函数在 $(0,+\infty)$ 上是凹的.

由凹函数的定义知，对于任意两点 $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

故 $\frac{1}{2}(x\ln x+y\ln y)>\frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2}$，即

$$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2},(x>0,\ y>0).$$

3. a, b 为何值时，点 $(1,3)$ 为曲线 $y=ax^3+bx^2$ 的拐点？

解 由题意可得 $y' = 3ax^2 + 2bx$，$y'' = 6ax + 2b$.

因为(1,3)为拐点,所以

$$y''\Big|_{x=1} = 6a + 2b = 0,$$

$$y\Big|_{x=1} = a + b = 3,$$

故 $a = -\dfrac{3}{2}$，$b = \dfrac{9}{2}$.

4.设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$，且 $f'(0) = 0$，证明点 $(0,f(0))$是曲线的拐点.

证明 因为 $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$，所以 $f''(0) + [f'(0)]^2 = 0$.

又因为 $f'(0) = 0$，所以 $f''(0) = 0$.

$f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ 两边对 x 求导可得

$$f'''(x) + 2f'(x) \cdot f''(x) = 1.$$

当 $x = 0$ 时,$f'''(0) = 1$,故 $x = 0$ 不是 $f''(x)$ 的极点,即 $f''(x)$ 在 $x = 0$ 两侧异号,所以$(0,f(0))$是曲线的拐点.

5.试确定曲线 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 中 a,b,c,d 的值,使得 $x = -2$ 处曲线有水平切线,$(1,-10)$为拐点,且点$(-2,44)$在曲线上.

解 由题意知

$$y'\Big|_{x=-2} = 0,\ y''\Big|_{x=1} = 0,\ y\Big|_{x=1} = -10,\ y\Big|_{x=-2} = 44,$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c,\ y'' = 6ax + 2b,$$

故$\begin{cases} 3a \cdot (-2)^2 + 2b \cdot (-2) + c = 0, \\ 6a \cdot 1 + 2b = 0, \\ a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d = -10, \\ a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) + d = 44, \end{cases}$

化简得$\begin{cases} 12a - 4b + c = 0, \\ 3a + b = 0, \\ a + b + c + d = -10, \\ -8a + 4b - 2c + d = 44, \end{cases}$

可解得 $a = 1$，$b = -3$，$c = -24$，$d = 16$.

习题 3-7

1. 求下列曲线的渐近线：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}$；　　(2) $y=e^{\frac{1}{x}}-1$；

(3) $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$；　　(4) $y=2x+\arctan\dfrac{x}{2}$；

(5) $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

解　(1) 原式可化为 $y=\dfrac{1}{x^2-4x-5}=\dfrac{1}{(x-5)(x+1)}$，于是

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=0,$$

$$\lim_{x\to5}y=\lim_{x\to5}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to-1}y=\lim_{x\to-1}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\infty,$$

因此渐近线为 $y=0$，$x=5$，$x=-1$.

(2) 由题意可得

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}-1=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}-1=\infty,$$

因此渐近线为 $y=0$，$x=0$.

(3) 由题意可得

$$\lim_{x\to-\frac{1}{e}}y=\lim_{x\to-\frac{1}{e}}x\ln(e+\frac{1}{x})=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(y-x)&=\lim_{x\to\infty}x\ln(e+\frac{1}{x})-x=\lim_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})^x-\ln e^x\\&=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{e+\frac{1}{x}}{e}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e}\ln(1+\frac{1}{ex})^{ex}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\ln\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{ex})^{ex}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e}\cdot\ln e\\&=\frac{1}{e},\end{aligned}$$

因此渐近线为 $x=-\frac{1}{e}$，$y=x+\frac{1}{e}$.

（4）由题意可得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}2+\frac{\arctan\frac{x}{2}}{x}=2,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\infty}\arctan\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{2},$$

因此渐近线为 $y=2x+\frac{\pi}{2}$，$y=2x-\frac{\pi}{2}$.

（5）由题意可得

$$\lim_{x\to 1}y=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x+3}{x-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3,$$

$$\lim_{x\to\infty}(y-3x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+3}{x-1}-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

因此渐近线为 $x=1$，$y=3x+1$.

2. 描绘下列函数的图形：

（1）$y=x^2+\frac{1}{x}$；　　（2）$y=e^{-(x-1)^2}$；

（3）$y=\frac{c}{1+be^{-ax}}(a>0,b>0,c>0)$.

解　（1）由题可知函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

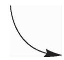
$$y'=2x-\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2},$$

$$y''=2+2\frac{1}{x^3}=\frac{2(x^3+1)}{x^3}.$$

令 $y'=0$，得 $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$.

上述两点将定义域划分成如下 4 个部分区间：$(-\infty,-1]$，$[-1,0)$，$\left(0,\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$，$\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)$，在各个区间内 y'，y'' 的符号、相应曲线弧的升降及凹、凸，以及极值点和拐点如表 3-5 所示.

表 3-5

x	$(-\infty,-1]$	-1	$[-1,0)$	$\left(0,\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right]$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	$\left[\frac{\sqrt[3]{4}}{2},+\infty\right)$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$+$	$+$	$+$
y 的图形		拐点			极小	

于是
$$y\Big|_{x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{2},\ y\Big|_{x=-1}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}y=\lim_{x\to0^-}x^2+\frac{1}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to0^+}y=\lim_{x\to0^+}x^2+\frac{1}{x}=+\infty,$$

作图如图 3-1 所示.

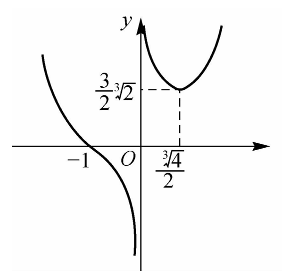


图 3-1

(2) 由题意知函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

$$y'=-2(x-1)\cdot e^{-(x-1)^2},$$

$$y''=e^{-(x-1)^2}\cdot[4(x-1)^2-2].$$

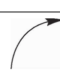
令 $y'=0$,得 $x=1$;令 $y''=0$,得 $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

上述点将$(-\infty,+\infty)$分成下列 4 个部分区间:

$$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right],\left[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right],\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right),$$

在各部分区间内 y'、y'' 的符号、相应曲线弧的升降及凹、凸,以及极值点和拐点等如表 3-6 所示.

表 3-6

x	$\left(-\infty,1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$	1	$\left[1,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y 的图形		拐点		极大		拐点	

于是
$$y\Big|_{x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},\ y\Big|_{x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$y\Big|_{x=1}=1,\ y\Big|_{x=0}=\frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{-(x-1)^2}=0,$$

作图如图 3-2 所示.

(3) 由题可知函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且

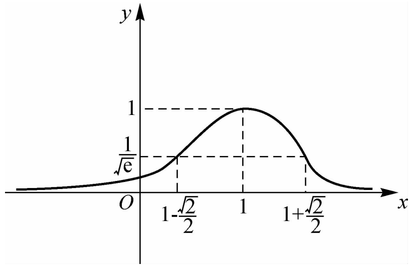


图 3-2

$$y' = \frac{-c(-b\mathrm{e}^{-ax} \cdot a)}{(1+b\mathrm{e}^{-ax})^2} = \frac{abc\,\mathrm{e}^{-ax}}{(1+ba^{-ax})^2} > 0,$$

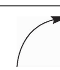
$$y'' = \frac{-a^2bc\,\mathrm{e}^{-ax}(1+b\mathrm{e}^{-ax})^2 - abc\,\mathrm{e}^{-ax} \cdot 2(1+b\mathrm{e}^{-ax}) \cdot b\mathrm{e}^{-ax} \cdot (-a)}{}$$

$$= \frac{a^2bc\,\mathrm{e}^{-ax}(-1+b\mathrm{e}^{-ax})}{(1+b\mathrm{e}^{-ax})^3}.$$

令 $y''=0$,得 $x=\frac{\ln b}{a}$.

上述点将区间$(-\infty,+\infty)$分为以下两个部分区间:$(-\infty,\frac{\ln b}{a}]$,$[\frac{\ln b}{a},+\infty)$,在各部分区间内 y',y'' 的符号、相应曲线弧的升降及凹、凸,以及极值点和拐点等如表3-7 所示.

表 3-7

x	$(-\infty,\frac{\ln b}{a}]$	$\frac{\ln b}{a}$	$[\frac{\ln b}{a},+\infty)$
y'	+	+	+
y''	+	0	−
y 的图形		拐点	

于是

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \frac{c}{1+b\mathrm{e}^{-ax}} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{1+b\mathrm{e}^{-ax}} = c,$$

$$y\Big|_{x=0} = \frac{c}{1+b},\ y\Big|_{x=\frac{\ln b}{a}} = \frac{c}{2},$$

作图如图 3-3 所示.

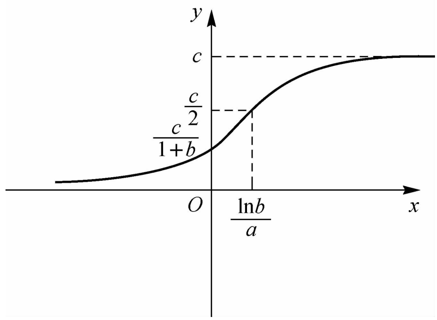


图 3-3

习题 3-8

1. 求下列曲线的弧微分：

（1）$y=\cos x$；　　（2）$y^2=2px$；　　（3）$\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t}, \\ y=\dfrac{1-t}{t}. \end{cases}$

解　(1) $y'=-\sin x$，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

(2) 由 $2y\cdot y'=2p$ 可得 $y'=\dfrac{p}{y}$，$y'^2=\dfrac{p^2}{y^2}=\dfrac{p}{2x}$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\mathrm{d}x.$$

(3) $x'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$，$y'(t)=-\dfrac{1}{t^2}$，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

2. 求曲线 $x=t^2$，$y=t^3$ 在点(1,1)处的曲率.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{3t^2}{2t}=\dfrac{3t}{2}$，则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\dfrac{3}{2}}{2t}=\frac{3}{4t}.$$

当 $x=1$，$y=1$ 时，$t=1$，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=1}=\frac{3}{2},\ \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}^2x}\right|_{t=1}=\frac{3}{4},$$

$$K=\frac{\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)}{\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{3/2}}=\frac{\frac{3}{4}}{\left(1+\frac{3}{2}\right)^{3/2}}=\frac{3}{5\sqrt{10}}.$$

即曲线在点(1,1)处的曲率为$\frac{3}{5\sqrt{10}}$.

3. 求曲线 $r=a(1+\cos\theta)$ 在任意点处的曲率半径.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta-r\sin\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta+r\cos\theta,$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-a\sin\theta,$$

所以$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-a\sin\theta\cos\theta-a\sin\theta(1+\cos\theta)=-a\sin2\theta-a\sin\theta$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=-a\sin^2\theta+a\cos\theta(1+\cos\theta)=a\cos2\theta+a\cos\theta,$$

故 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\theta^2}=-2a\cos2\theta-a\cos\theta, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}=-2a\sin2\theta-a\sin\theta$.

因此 $x'^2+y'^2=a^2(2+2\cos\theta)$,

$$x'y''=a^2(2\sin^2 2\theta+\sin^2\theta+3\sin^2\theta\sin\theta),$$

$$x''y'=-a^2(2\cos^2 2\theta+\cos^2\theta+3\cos2\theta\cos\theta),$$

则曲率半径 $R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{(x'y''-x''y')}=\left|\frac{2\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}}{3}\cdot a\right|=\left|\frac{4}{3}a\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

4. 求抛物线 $y^2=2px$ 的曲率半径的最小值.

解 由题得 $x=\frac{y^2}{2p}$, 则 $x'=\frac{y}{p}$, $x''=\frac{1}{p}$,故

$$R=\frac{(1+x'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x''|}=|p|\cdot(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{3}{2}},$$

$$R'=\frac{3}{2}|p|\cdot(1+\frac{y^2}{p^2})^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2y}{p^2}.$$

令 $R'=0$,得 $y=0$.

因只有一个极值,故抛物线在 $y=0$ 处取得最小值 $R=|p|$.

5. P 为抛物线 $y=ax^2+bx$ 上对应于 $x=1$ 的点,如果点 P 处的切线倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$,又点 P 处的曲率半径为 2,求 a,b 的值,并求点 P 处曲率中心的坐标.

解 由 $y=ax^2+bx$ 得

$$y' = 2ax + b,$$

$$y'\Big|_{x=1} = 2a + b = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$y'' = 2a,$$

故 $R\Big|_{x=1} = \dfrac{[1+(2a+b)^2]^{\frac{3}{2}}}{|2a|} = 2.$

将 $2a + b = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 代入上式可得 $|a| = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

又由曲线在 $x = 1$ 处的斜率大于 0 知其开口向上,故

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{9},\ b = -\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

设曲率中心坐标为$(x_0,\ y_0)$,则

$$x_0 = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = 1 - \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}(1+\frac{1}{3})}{\frac{4\sqrt{3}}{9}} = 0,$$

$$y_0 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{2\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\frac{4\sqrt{3}}{9}} = \frac{10}{3\sqrt{3}},$$

故 $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ b = -\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

即点 P 处曲率中心的坐标是$\left(0,\dfrac{10}{3\sqrt{3}}\right)$.

6. 求抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 由题可得抛物线的顶点为$(2,-1)$,$y' = 2x - 4$,$y'' = 2$,故在其顶点处的曲率为

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(2,-1)} = 2,$$

曲率半径为 $R = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{2}$.

7. 求曲线 $y = \tan x$ 在点$\left(\dfrac{\pi}{4},1\right)$处的曲率圆方程.

解 由题可得 $y' = \sec^2 x, y'' = 2\sec^2 x\tan x$,故

$$y'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2,\ y''\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 4.$$

设曲线在上点$(\dfrac{\pi}{4},1)$处的曲率中心的坐标为(α,β),则

$$\alpha = \left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]\Big|_{(\frac{\pi}{4},1)} = \frac{\pi}{4} - \frac{2(1+4)}{4} = \frac{\pi-10}{4},$$

$$\beta = \left[y + \frac{1+y'^2}{y''}\right]\Big|_{(\frac{\pi}{4},1)} = 1 + \frac{1+4}{4} = \frac{9}{4},$$

曲率半径为 $R = \frac{1}{k}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{5^{\frac{3}{2}}}{4}.$

故所求的曲率圆方程为

$$\left(\xi - \frac{\pi-10}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{125}{16}.$$

8. 求曲线 $y = \ln x$ 在与 x 轴交点处的曲率圆方程.

解　解方程组 $\begin{cases} y = \ln x \\ y = 0 \end{cases}$ 得曲线与 x 轴的交点为(1,0).

又因 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$,故

$$y'\Big|_{x=1} = 1,\ y''\Big|_{x=1} = -1.$$

设曲线在(1,0)处的曲率中心为(α,β),则

$$\alpha = \left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]\Big|_{(1,0)} = 1 - \frac{1\cdot(1+1^2)}{-1} = 3,$$

$$\beta = \left[y + \frac{1+y''^2}{y''}\right]\Big|_{(1,0)} = 0 + \frac{1+1^2}{-1} = -2,$$

曲率半径为 $R = \frac{1}{k}\Big|_{x=1} = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1+1^2)^{\frac{3}{2}}}{1} = \sqrt{8},$

因此所求曲率圆方程为

$$(\xi - 3)^2 + (\eta + 2)^2 = 8.$$

* 习题 3-9

1. 一个公司已估算出产品的成本函数为 $C(Q) = 0.1Q^2 - 0.4Q + 360$ 万元.

(1) 求 $Q = 10$ 时的总成本;

(2) 求 $Q = 10$ 时的平均成本、边际成本,并解释当求 $Q = 10$ 时边际成本的经济意义;

(3) 求产量为多大时,平均成本最低?求出最低平均成本,并求出相应产量的边际成本.

解　(1)$C(10) = 0.1\cdot 10^2 - 0.4\cdot 10 + 360 = 366$ 万元.

(2) 平均成本为$\overline{C}(0) = \frac{C(10)}{10} = 36.6$,边际成本函数为

$$C'(Q) = 0.2Q - 0.4,$$

故 $C'(10) = 0.2 \cdot 10 - 0.4 = 1.6$.

经济意义是:当产品数量为 10 时,再多生产一件产品,所耗费的成本增加 1.6 万元.

(3) $\overline{C}(Q) = \dfrac{C(Q)}{Q} = 0.1Q - 0.4 + \dfrac{360}{Q}$, $\overline{C}'(Q) = 0.1 - \dfrac{360}{Q^2}$.

令 $\overline{C}'(Q) = 0$, 得 $Q = 60$.

因为只有一个极值,故在 $Q = 60$ 处应取得最小值,即

$$\overline{C}(60) = 0.1 \times 60 - 0.4 + \frac{360}{60} = 11.6,$$

$$C'(60) = 0.2 \times 60 - 0.4 = 11.6.$$

2. 某产品的需求函数为 $Q = 94 - P^2$,求销售 $Q = 30$ 件时的总收益与边际收益,并说明边际收益值的经济意义.

解 由需求函数可得 $P = \sqrt{94 - Q}$,故产品的收益函数为

$$R(Q) = Q\sqrt{94 - Q}.$$

当 $Q = 30$ 时的总收益为

$$R(30) = 30 \times \sqrt{94 - 30} = 240,$$

边际收益函数为

$$R'(Q) = \sqrt{94 - Q} - \frac{Q}{2\sqrt{94 - Q}},$$

$$R'(30) = \sqrt{94 - 30} - \frac{30}{2\sqrt{94 - 30}} = 8 - \frac{30}{2 \times 8} = 6.125.$$

经济意义是:当销售 30 件时,多销售一件产品所获得的收入增加 6.125.

3. 设生产某产品的成本函数为 $C(Q) = 0.1Q^2 + 60Q + 1\ 000$ 元,收益函数为 $R(Q) = 300Q - 0.3Q^2$ 元.

(1) 求当 $Q = 10$ 时的总利润,边际利润,并解释当 $Q = 10$ 时边际利润的经济意义;

(2) 为使利润最大化,公司必须生产并销售多少件产品?并求出最大利润.

解 (1) 由题可得利润函数为

$$L(Q) = R(Q) - C(Q) = -0.4Q^2 + 240Q - 1000.$$

当 $Q = 10$ 时,总利润为

$$L(10) = -0.4 \times 10^2 + 240 \times 10 - 1\ 000 = 1\ 360 \text{ 元},$$

边际利润函数为

$$L'(Q) = -0.8Q + 240,$$

$$L'(10) = 232.$$

经济意义是:当销售 10 件产品时,再多销售一件产品所获得的利润增加 232 元.

(2) 令 $L'(Q) = 0$,可得 $Q = 300$,故销售 300 件产品时可获得最大利润

$$L(300)=-0.4\times 300^2+240\times 300-1\ 000=35\ 000\text{元}.$$

4.求下列函数的弹性：

(1) $y=2e^x$； (2) $y=x^\alpha$；

(3) $y=1\ 600\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$，求$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}$.

解 (1) 由题得 $y'=2e^x$，则

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{2e^x}\cdot 2e^x=x.$$

(2) 由题得 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$，则

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{x^\alpha}\cdot \alpha x^{\alpha-1}=\alpha.$$

(3) 由题得 $y'=1\ 600\cdot \ln\left(\dfrac{1}{4}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$，则

$$\frac{Ey}{Ex}=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{1\ 600\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x}\cdot 1\ 600\cdot\ln\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^x=\ln\left(\frac{1}{4}\right)\cdot x,$$

$$\left.\frac{Ey}{Ex}\right|_{x=3}=3\ln\frac{1}{4}=-3\ln 4=-6\ln 2.$$

5.设某商品的需求函数为 $Q=75-P^2$.

(1) 求需求弹性函数 $\eta(P)$；

(2) 求 $\eta(4)$，并说明其经济意义；

(3) 当 $P=4$ 时，价格上涨 1%，总收益变化百分之几？是增加还是减少？

解 (1) $Q'(p)=-2P$，需求弹性函数为

$$\eta(P)=Q'(P)\cdot\frac{P}{Q}=-2P\cdot\frac{P}{75-P^2}=\frac{2P^2}{P^2-75}.$$

(2) $\eta(4)=\dfrac{2\times 4^2}{4^2-75}\approx -0.54$.

其经济意义是：当 $p=4$ 时，价格上涨 1%，需求量下降 0.54%.

(3) 因为 $|\eta(4)|<1$，所以价格上涨，总收益增加，总收益对价格的弹性函数为

$$\frac{ER}{EP}=R'(P)\frac{P}{R}=[PQ(P)]'\cdot\frac{P}{PQ(P)}=1+\eta(p),$$

从而$\left.\dfrac{ER}{EP}\right|_{P=4}=1+\eta(4)=0.46$.

当 $P=4$ 时，价格上涨 1%，总收益增加 0.46%，价格下降 1%，总收益减少 0.46%.

6.设某商品的需求函数为 $Q=20-\dfrac{P}{4}$.

(1) 求需求弹性函数 $\eta(P)$；

(2) 求 $P=5$ 时的需求弹性,并说明其经济意义；

(3) 当 $P=5$ 时,若价格上涨 1%,其总收益变化百分之几?是增加还是减少?

解 (1) 由题得 $Q'(P)=-\dfrac{1}{4}$,则

$$\eta(P)=Q'(P)\cdot\frac{P}{Q(P)}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{P}{20-\dfrac{P}{4}}=\frac{P}{P-80}.$$

(2)$\eta(5)=\dfrac{5}{5-80}\approx-0.07$.

其经济意义是:当 $P=5$ 时,价格上涨 1%,需求量下降 0.07%.

(3) 因为 $|\eta(5)|<1$,所以价格上涨,总收益增加,总收益对价格的弹性函数为

$$\frac{ER}{EP}=R'(P)\frac{P}{R}=[PQ(P)]'\cdot\frac{P}{PQ(P)}=1+\eta(P),$$

从而$\left.\dfrac{ER}{EP}\right|_{P=5}=1+\eta(5)\approx0.93$.

当 $P=5$ 时,价格上涨 1%,总收益增加 0.93%,价格下降 1%,总收益减少 0.93%.

7. 某公司每年销售某种商品 10 000 件,每次订货的手续费为 40 元,商品的进价为 2 元/件,存储费是平均库存商品价格的 10%,平均库存量是批量的一半,求最优订货批量.

解 设订货批量为 Q 件,则年订货成本为

$$40\cdot\frac{10\ 000}{Q}\text{元},$$

年存储费为

$$\frac{Q}{2}\cdot2\times0.1=0.1Q\text{元},$$

商品成本为

$$10\ 000\times2=20\ 000\text{元},$$

于是全年总费用为

$$C(Q)=\frac{400\ 000}{Q}+0.1Q+20\ 000,$$

$$C'(Q)=-\frac{400\ 000}{Q^2}+0.1.$$

令 $C'(Q)=0$,可得唯一驻点 $Q=2\ 000$.

而该实际问题必存在最小值,所以最优订货批量为 2 000 件.

总复习题三

1. 填空题：

(1) 当 $x=$ ________ 时，函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

(2) 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近方程为________.

(3) 函数 $y=x-\arctan x$ 在区间________上是凸的，在区间________上是凹的.

(4) 函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 的单调减区间________.

(5) 函数 $y=x^3-3x^2$ 的拐点为________.

解 (1) 因 $y=x\cdot 2^x$，所以 $y'=2^x+x\cdot 2^x\cdot\ln 2$.

令 $y'=0$，可得 $x=-\frac{1}{\ln 2}$.

当 $x<-\frac{1}{\ln 2}$ 时，$y'<0$，y 单调递减；当 $x>-\frac{1}{\ln 2}$ 时，$y'>0$，y 单调递增.

故当 $x=-\frac{1}{\ln 2}$ 时，函数 $y=x\cdot 2^x$ 取得极小值.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$，

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ex}{ex+1}\cdot\frac{e^2x-e(ex+1)}{(ex)^2}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=\frac{1}{e},$$

故渐近线为 $y=x+\frac{1}{e}$.

(3) 由题得 $y'=1-\frac{1}{1+x^2}$，$y''=-\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.

令 $y''=0$ 可得 $x=0$.

当 $x<0$ 时，$y''<0$，函数在 $(-\infty,0)$ 上是凸的；

当 $x>0$ 时，$y''>0$，函数在 $(0,+\infty)$ 上是凹的.

(4) 由题得 $y'=-\frac{1}{x^2}+1$.

令 $y'<0$，则 $-1<x<1$，且 $x\neq 0$.

故函数 $y=\frac{1}{x}+x$ 的单调减区间为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

(5) 由题得 $y' = 3x^2 - 6x$，$y'' = 6x - 6$.

令 $y'' = 0$，则 $x = 1$，$y\Big|_{x=1} = -2$.

故拐点为$(1, -2)$.

2. 选择题：

(1) 设 $f(x) = ax^3 - 6ax^2 + b$ 在区间$[-1,2]$上的最大值为 3,最小值为 -29，又知 $a > 0$,则(　　).

A. $a = 2, b = -29$　　　　B. $a = 3, b = 2$

C. $a = 2, b = 3$　　　　D. 以上都不对

(2) 设在$[0,1]$上,$f''(x) > 0$,则 $f'(0)$,$f'(1)$,$f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是(　　).

A. $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$　　　　B. $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$

C. $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$　　　　D. $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$

(3) $y = \ln x$ 在$(1,0)$处的曲率为(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　　　B. 0　　　C. 2　　　D. 3

(4) 若 $3a^2 - 5b < 0$,则方程 $x^5 + 2ax^3 + 3bx + 4c = 0$ (　　).

A. 无实根　　　　B. 有唯一实根

C. 有三个不同实根　　　　D. 有五个不同实根

(5) 设三次曲线 $y = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ 在 $x = -1$ 处取极大值,点$(0,3)$是拐点,则(　　).

A. $a = -1, b = 0, c = 3$　　　　B. $a = 3, b = -1, c = 0$

C. $a = 0, b = -1, c = 3$　　　　D. 以上均不正确

解　(1) 由题可得 $f'(x) = 3ax^2 - 12ax = 3ax(x - 4)$.

当 $-1 < x < 0$ 时,$f'(x) > 0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $0 < x < 2$ 时,$f'(x) < 0$,$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最大值,在 $x = -1$ 或 2 处取得最小值：

$$f(0) = b = 3,$$

$$f(-1) = -a - 6a + 3 = 3 - 7a,$$

$$f(2) = 8a - 24a + 3 = 3 - 16a,$$

因为 $a > 0$,所以 $f(2) < f(-1)$.

故 $f(2) = 3 - 16a = -29$，$a = 2$，故选 C.

(2) 因为在$[0,1]$上,$f''(x) > 0$，故 $f'(x)$ 在$[0,1]$上单调递增,所以 $f'(1) > f'(0)$.

由拉格朗日中值定理知

$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\cdot(1-0)=f'(\xi),\xi\in(0,1).$$

故 $f'(0)<f'(\xi)<f'(1)$，$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$，选 B.

(3) 由题可得 $y'=\dfrac{1}{x}$，$y''=-\dfrac{1}{x^2}$，则

$$K\Big|_{(1,0)}=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\Big|_{(1,0)}=\frac{|-1|}{(1+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

故选 A.

(4) 设 $f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$，则

$$f'(x)=5x^4+6ax^2+3b.$$

令 $t=x^2$，$g(t)=5t^2+6at+3b$，则

$$\Delta=36a^2-60b=12(3a^2-5b)<0,$$

故 $g(t)>0$，即 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，故 $f(x)=0$ 有唯一实根.

故选 B.

(5) 由题可得 $y'=3x^2+6ax+3b$，$y''=6x+6a$.

由题意知 $y'\Big|_{x=-1}=0$，$y''\Big|_{x=0}=0$，$y\Big|_{x=0}=3$，则可得

$$\begin{cases}3-6a+3b=0,\\6a=0,\\c=3,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-1,\\c=3.\end{cases}$

故选 C.

3. 求函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 在点 $x=0$ 处的拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式.

解　由题可得

$$f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2},\ f''(x)=\frac{4}{(1+x)^3},\ f'''(x)=\frac{-12}{(1+x)^4},$$

则可推知

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n\cdot 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}},f^{(n)}(0)=(-1)^n\cdot 2\cdot n!,$$

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2\cdot(n+1)!}{(1+\theta x)^{n+2}},$$

故 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ 的 n 阶泰勒公式为

$$f(x)=1-2x+2x^2-2x^3+\cdots+(-1)^n\cdot 2\cdot x^n+(-1)^{n+1}\cdot\frac{2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}},(0<\theta<1).$$

4. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+y+\frac{x^2}{2}=1$ 所确定，试求 $y=y(x)$ 的极值点.

解 方程两边对 x 求导得

$$y'\cdot e^y+y'+x=0,$$

故 $y'=-\frac{x}{1+e^y}$.

令 $y'=0$，得 $x=0$.

当 $x=0$ 时，$e^y+y=1$，故 $y=0$.

因此所求函数的极值点为(0,0).

5. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{m+nx^2}}(b>0,n>0)$.

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\tan(x-1)}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}$

$$=\lim_{x\to 1}-\frac{1}{\cos^2(x-1)}\cdot\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{2}x}$$

$$=-\frac{4}{\pi^2}.$$

(2) 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(2\sin x+\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}}=e^2$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)^2}=\frac{1}{2}.$$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{be^x}{a+be^x}}{\frac{nx}{\sqrt{m+nx^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{be^x\sqrt{m+nx^2}}{nx(a+be^x)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{b\sqrt{\frac{m}{x^2}+n}}{n\left(\frac{a}{e^x}+b\right)}=\frac{b\sqrt{n}}{nb}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

6. 求曲线 $y=x^3-5x^2+3x+5$ 的凹凸区间和拐点.

解 由题可得 $y'=3x^2-10x+3, y''=6x-10$.

令 $y''=0$,得 $x=\dfrac{5}{3}$,则

$$y\Big|_{x=\frac{5}{3}}=\left(\frac{5}{3}\right)^3-5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2+3\cdot\frac{5}{3}+5=\frac{20}{27}.$$

当 $x<\dfrac{5}{3}$ 时,$y''<0$,函数是凸的;当 $x>\dfrac{5}{3}$ 时,$y''>0$,函数是凹的.

故函数的凹区间为$\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$,凸区间为$\left(-\infty,\dfrac{5}{3}\right)$,拐点是$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{20}{27}\right)$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,试求:

(1) 此函数在极值点处的曲率;

(2) 此函数在拐点处的切线方程.

解 (1) $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2},\ f''(x)=\dfrac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=0$,则

$$f(0)=0,\ f'(0)=0,\ f''(0)=2,$$

$$K\Big|_{(0,0)}=\frac{1+f''(0)}{(1+f'^2(0))^{\frac{3}{2}}}=2.$$

(2) 令 $f''(x)=0$,得 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,则

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

故函数的拐点为$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$,$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{4}\right)$.

又因 $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8},\ f'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$,故两拐点处的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x\mp\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

8. 验证函数 $f(x)=\sin x$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上满足拉格朗日中值定理.

证明 由题知函数 $f(x)=\sin x$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上连续,在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$内可导,故 $f(x)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上满足拉格朗日中值定理条件,从而至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使

$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{\pi}{2}) - f(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{1-0}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

又由 $f'(\xi) = \cos\xi = \frac{2}{\pi}$ 可知

$$\xi = \arccos\frac{2}{\pi} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上,拉格朗日中值定理对函数 $f(x) = \sin x$ 是正确的.

9. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 在 $x = 1$ 处有极值 -2,试确定系数 a,b,并求出 $y = f(x)$ 所有的极大值,极小值,拐点,且描绘图形.

解 由题可得 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,则

$$\begin{cases} f(1) = 1 + a + b = -2, \\ f'(1) = 3 + 2a + b = 0, \end{cases}$$

故$\begin{cases} a = 0, \\ b = -3. \end{cases}$

因此 $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$.

令 $f'(x) = 0$,得 $x_1 = 1$, $x_2 = -1$;

令 $f''(x) = 0$,得 $x = 0$, $f(1) = -2$, $f(-1) = 2$,$f(0) = 0$.

故拐点为$(0,0)$.

当 $x < -1$ 时,$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $-1 < x < 1$ 时,$f'(x) < 0$,$f(x)$ 单调递减.

当 $x > 1$ 时,$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

故在 $x = -1$ 处取得极大值 2,在 $x = 1$ 处取得极小值 -2.

函数无渐近线,图形如图 3-4 所示.

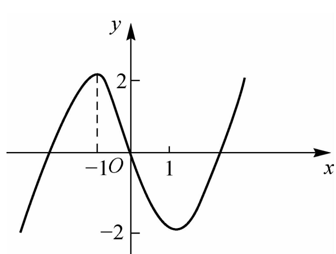


图 3-4

10. $x>0$ 时，证明 $e^x-1-x>1-\cos x$.

证明 令 $f(x)=e^x-1-x-1+\cos x=e^x+\cos x-x-2$，则

$f'(x)=e^x-\sin x-1$，$f''(x)=e^x-\cos x$.

当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又因 $f'(0)=e^0-\sin 0-1=0$，故 $f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则

$$f(x)>f(0)=0,$$

即 $e^x-1-x>1-\cos x$.

*11. 某厂生产某种产品 Q 件，总成本函数为 $C(Q)=5Q+200$（元），收益函数为 $R(Q)=10Q-0.01Q^2$（元）. 问生产多少件该产品时能使利润最大？

解 由题得利润的表达式为

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)=10Q-0.01Q^2-5Q-200\\&=5Q-0.01Q^2-200,\end{aligned}$$

则 $L'(Q)=5-0.02Q$.

令 $L'(Q)=0$，得 $Q=250$.

故生产 250 件产品时能使利润最大.

*12. 设某商品的需求函数为 $Q=10e^{-0.1P}$（Q 为需求量，单位：件；P 为价格，单位：元）.

(1) 若销售此商品，问 P 为多少时收益最大？最大收益是多少？

(2) 求需求弹性函数及当 $P=5$ 时的需求弹性，并说明其经济意义.

解 (1) 由题可得 $R(P)=P\cdot Q=10P\cdot e^{-0.1P}$，则

$$R'(P)=10e^{-0.1P}-Pe^{-0.1P}.$$

令 $R'(P)=0$，得 $P=10$，$R(10)=\dfrac{100}{e}$.

故 P 为 10 时，收益最大，最大收益为 $\dfrac{100}{e}$.

(2) 由题可得 $Q'(P)=-e^{-0.1P}$，则

$$\eta(P)=Q'(P)\cdot\frac{P}{Q}=-e^{-0.1P}\cdot\frac{P}{10e^{-0.1P}}=-0.1P,$$

$$\eta(5)=-0.5.$$

经济意义是：当价格为 5 时，若价格上涨 1%，需求量减少 0.5%.

13. 试确定常数 a 和 b，使 $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 为当 $x\to 0$ 时关于 x 的五阶无穷小.

解 $f'(x)=1-a\cos x-b\cos 2x$,

$f''(x)=a\sin x+2b\sin 2x$,

$f'''(x)=a\cos x+4b\cos 2x$,

$f^{(4)}(x)=-a\sin x-8b\sin 2x.$

在 $x=0$ 处，$f(0)=f''(0)=f^{(4)}(0)=0$，且

$$f'(0)=1-a-b, f'''(0)=a+4b,$$

故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒公式为

$$f(x)=(1-a-b)x+\frac{a+4b}{3!}x^3+o(x^5).$$

因为当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是关于 x 的五阶无穷小，故

$$\begin{cases}1-a-b=0,\\ \dfrac{a+4b}{3!}=0,\end{cases}$$

可解得 $\begin{cases}a=\dfrac{4}{3}\\ b=-\dfrac{1}{3}\end{cases}.$

14. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$. 证明对于 (a,b) 内任意两点 x_1，x_2 及 $0\leqslant t\leqslant 1$，有

$$f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

证明　由 $x_1, x_2\in(a,b)$ 知

$$x_0=(1-t)x_1+x_2\in(a,b).$$

利用泰勒公式有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x_1-x_0)^2,$$

其中，ξ_1 介于 x_1，x_0 之间；

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(x_2-x_0)^2,$$

其中，ξ_2 介于 x_0，x_2 之间.

由 $f''(x)\geqslant 0$ 知，$f''(\xi_1)\geqslant 0$，$f''(\xi_2)\geqslant 0$，故

$$f(x_1)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0),$$
$$f(x_2)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0).$$

因此

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1)+tf(x_2)&\geqslant(1-t)f(x_0)+tf(x_0)+f'(x_0)[(1+t)(x_1-x_0)\\&\quad+t(x_1-x_0)]\\&=f(x_0)+f'(x_0)[(1-t)x_1+tx_2-x_0]\\&=f(x_0),\end{aligned}$$

即 $f[(1-t)x_1+tx_2]\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$

第四章

不定积分

习题 4-1

1. 求下列不定积分：

(1) $\int x^2 \sqrt[3]{x} \mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{(1-x)^3}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；

(4) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} \mathrm{d}x$；

(6) $\int \sqrt{x^2+2+x^{-2}} \mathrm{d}x$；

(7) $\int |x| \mathrm{d}x$；

(8) $\int \frac{2^{x-1}-5^{x-1}}{10^x} \mathrm{d}x$；

(9) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)} \mathrm{d}x$；

(10) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x} \mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$；

(12) $\int \frac{(x+3)^3}{x^2} \mathrm{d}x$；

(13) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}} \mathrm{d}x$；

(14) $\int \frac{\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta} \mathrm{d}\theta$；

(15) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(x^2+1)} \mathrm{d}x$；

(16) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} \mathrm{d}x$.

解 (1) 原式 $=\int x^{\frac{7}{3}} \mathrm{d}x=\frac{1}{\frac{7}{3}+1} x^{\frac{7}{3}+1}+C=\frac{3}{10} x^{\frac{10}{3}}+C$.

(2) 原式 $=\int x^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}x=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1}+C=2\sqrt{x}+C$.

(3) 原式 $=\int(-x^{\frac{5}{2}}+3x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}x$

$$=\int -x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x+3\int x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x-3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=2\sqrt{x}-2x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

(4) 原式 $=\int x^{\frac{7}{8}}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\frac{7}{8}+1}\cdot x^{\frac{7}{8}+1}+C=\dfrac{8}{15}x^{\frac{15}{8}}+C.$

(5) 原式 $=\int 3x^2\mathrm{d}x+\int\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x^3+\arctan x+C.$

(6) 原式 $=\int\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}x|x|+\dfrac{|x|}{x}\ln|x|+C.$

(7) 原式 $=\dfrac{1}{2}x|x|+C.$

(8) 原式 $=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{5}\right)^x\mathrm{d}x-\dfrac{1}{5}\int\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{5}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+C$$

$$=\frac{1}{10}\left[\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}}{\ln\frac{1}{5}}-\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}}{\ln\frac{1}{2}}\right]+C.$$

(9) 原式 $=\int\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x-\int\dfrac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{x}-\arctan x+C.$

(10) 原式 $=2\int\mathrm{d}x-5\int\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\mathrm{d}x=2x-\dfrac{5}{\ln\frac{2}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+C=2x-\dfrac{5\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}}+C.$

(11) 原式 $=\int\dfrac{2\cos^2x+\sin^2x}{2\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}x+\dfrac{1}{2}\int\tan^2x\mathrm{d}x$

$$=x+\frac{1}{2}(\tan x-x)+C=\frac{x+\tan x}{2}+C.$$

(12) 原式 $=\int x\mathrm{d}x+9\int\mathrm{d}x+27\int x^{-1}\mathrm{d}x+27\int x^{-2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2+9x+27\ln|x|-27\frac{1}{x}+C.$$

(13) 原式 $=\int x^{\frac{3}{4}}\mathrm{d}x-\int x^{-\frac{5}{4}}\mathrm{d}x=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C.$

(14) 原式 $=-\frac{1}{2\sin 2\theta}+C.$

(15) 原式 $=\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x+\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\arctan x-\frac{1}{x}+C.$

(16) 原式 $=\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+C.$

2. 一曲线通过点(1,6)和(2,−9),且在任意一点处的切线斜率与 x^3 成正比,求该曲线的方程.

解 设曲线方程为 $y=f(x)$,由条件得 $f'(x)=ax^3$,则

$$f(x)=\frac{1}{4}ax^4+c, f(1)=\frac{1}{4}a+c=6, f(2)=4a+c=-9,$$

故 $a=-4, c=7$,所以曲线方程为 $y=-x^4+7$.

3. 一物体由静止开始运动,经过 t(s) 后速度为 $2t$(m/s). 问:

(1) 在 2 s 后,物体离开出发点的距离是多少?

(2) 物体走过 36 m 需多少时间?

解 (1) 设此物体自原点沿横轴正向由静止运行,位移函数为 $S=S(t)$,则

$$S(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int 2t\mathrm{d}t=t^2+C.$$

由假设可知,$S(0)=0$,故 $S(t)=t^2$.

即所求距离为 $S(2)=4$(m).

(2) 由 $t^2=36$,得 $t=6$(s).

习题 4-2

1. 在下列等式右端括号内填入适当系数,使等式成立:

(1) $\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(9x+1)$;

(2) $\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(ax+b)$;

(3) $x^5\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(3x^6+5)$;

(4) $\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(\sqrt{x}+6)$;

(5) $\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}\frac{1}{x^2}$;

(6) $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{3x}+2)$;

(7) $\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\frac{x}{3}}+8)$;

(8) $\frac{1}{x}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(3\ln|x|)$;

(9) $\cos x\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(5\sin x)$;

(10) $\sec^2 x\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(3\tan x)$;

(11) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(3\arcsin x)$;

(12) $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=(\quad)\mathrm{d}(2\arctan x)$.

解 (1) $\frac{1}{9}$. (2) $\frac{1}{a}$. (3) $\frac{1}{18}$. (4)2. (5) $-\frac{1}{2}$. (6) $\frac{1}{3}$.

(7) -3. (8) $\frac{1}{3}$. (9) $\frac{1}{5}$. (10) $\frac{1}{3}$. (11) $\frac{1}{3}$. (12) $\frac{1}{2}$.

2. 求下列不定积分：

(1) $\int (2x+5)^{10}\mathrm{d}x$； (2) $\int \frac{1}{(2x+11)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int x\sin x^2\mathrm{d}x$； (4) $\int \frac{x}{\sqrt{2-5x^2}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{5x^3}{1-x^4}\mathrm{d}x$； (6) $\int \frac{x^3}{x^2+3}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$； (8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$；

(9) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$； (10) $\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x$； (12) $\int \frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{1}{x(x^n+a)}\mathrm{d}x$； (14) $\int \frac{1}{2+\mathrm{e}^{2x}}\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\mathrm{d}x$； (16) $\int \tan^3 x\sec x\mathrm{d}x$；

(17) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$； (18) $\int \sin x\cos 3x\mathrm{d}x$；

(19) $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$； (20) $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$；

(21) $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$； (22) $\int \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\mathrm{d}x$；

(23) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$； (24) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$；

(25) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$； (26) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $u=2x+5$，则

原式 $=\frac{1}{2}\int u^{10}\mathrm{d}u=\frac{1}{22}u^{11}+C=\frac{1}{22}(2x+5)^{11}+C$.

(2) 令 $u=2x+11$，则

原式 $=\frac{1}{2}\int u^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3}u^{-\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(2x+11)^{-\frac{3}{2}}+C$.

(3) 原式 $= \frac{1}{2}\int \sin x^2 \mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}(-\cos x^2) + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$

(4) 原式 $= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2-5x^2}}\mathrm{d}x^2 = -\frac{1}{5}(2-5x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$

(5) 原式 $= \frac{5}{4}\int \frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x^4 = -\frac{5}{4}\ln|1-x^4| + C.$

(6) 原式$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+3}\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x^2 - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+3}\mathrm{d}x^2$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\ln(x^2+3) + C.$$

(7) 令$\sqrt{x} = t$,则 $x = t^2$,$\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,故

原式$= \int \frac{\tan t}{t} \cdot 2t\mathrm{d}t = 2\int \tan t\mathrm{d}t = 2\int \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t = -2\int \frac{1}{\cos t}\mathrm{d}\cos t$

$$= -2\ln|\cos t| + C = -2\ln|\cos\sqrt{x}| + C.$$

(8) 原式$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}\mathrm{d}(\sin x - \cos x)$

$$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

(9) 原式 $= \int \tan^{10} x \mathrm{d}\tan x = \frac{1}{11}\tan^{11} x + C.$

(10) 原式$= -\int [\ln(x+1) - \ln x]\mathrm{d}(\ln(x+1) - \ln x)$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(x+1) - \ln x]^2 + C.$$

(11) 原式$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \tan x - \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}\cos x = \tan x + \frac{1}{\cos x} + C$$

$$= \tan x + \sec x + C.$$

(12) 当 $x > 0$ 时:

原式 $= \int \frac{1}{x^5\sqrt{1+x^{-2}}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{(x^{-2}+1)-1}{\sqrt{1+x^{-2}}}\mathrm{d}x^{-2}$

$$= -\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3x^3} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

当 $x < 0$ 时,也有相同结果.

(13) 原式$= \int \frac{1}{x^{n+1}(1+ax^{-n})}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int \frac{1}{1+ax^{-n}}\mathrm{d}x^{-n}$

$$=-\frac{1}{an}\ln|1+ax^{-n}|+C=\frac{1}{an}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+a}\right|+C.$$

(14) 原式 $=\int\frac{e^{-2x}}{2e^{-2x}+1}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{2e^{-2x}+1}de^{-2x}$

$$=-\frac{1}{4}\ln(2e^{-2x}+1)+C=\frac{1}{4}\ln\frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}+C.$$

(15) 原式 $=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^6}}dx^3=\frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{1+x^6}|+C.$

(16) 原式 $=\int(\sec^2x-1)d\sec x=\frac{1}{3}\sec^3x-\sec x+C.$

(17) 原式 $=\int\frac{\sin x}{1+\sin^4x}d\sin x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\sin^4x}d\sin^2x$

$$=\frac{1}{2}\arctan(\sin^2x)+C.$$

(18) 原式 $=\frac{1}{2}\int(\sin4x-\sin2x)dx=-\frac{1}{8}\cos4x+\frac{1}{4}\cos2x+C.$

(19) 原式 $=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2x}dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int\frac{\sin x}{\cos^2x}dx$

$$=\tan x+\int\frac{1}{\cos^2x}d\cos x=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C$$

$$=\tan x-\sec x+C.$$

(20) 原式 $=\int\frac{1}{\sin^{\frac{3}{2}}x}d\sin x=-2\cdot(\sin x)^{-\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$

(21) 原式 $=\int\tan^2x\cdot\frac{\sin^2x}{\cos^2x}dx=\int\tan^2x(1-\cos^2x)d\tan x$

$$=\int\tan^2xd\tan x-\int(1-\cos^2x)d\tan x$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+\int\cos^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+C.$$

(22) 原式 $=\int\frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}}}de^{-x}$

$$=-\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})+C$$

$$=x-\ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})+C.$$

(23) 设 $\sqrt{x+1}=t$，则 $x=t^2-1$，$dx=2tdt$，故

原式 $=\int\frac{1}{1+t}\cdot2tdt=\int2-\frac{2}{1+t}dt=2t-2\ln(1+t)+C.$

$$=2\sqrt{x+1}-2\ln(1+\sqrt{x+1})+C.$$

(24) 原式 $=\int\frac{1}{x^3\sqrt{1-9x^{-2}}}dx=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-9x^{-2}}}dx^{-2}$

$$=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C.$$

(25) 原式 $=\int\frac{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}d(x+\frac{1}{2})$

$$=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|+C$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

(26) 原式 $=\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+a^2x^{-2}}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^{-2}}}dx^{-1}$

$$=-\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sqrt{1+a^2x^{-2}}}d\frac{a}{x}=-\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}+\sqrt{1+a^2x^{-2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C.$$

习题 4-3

1. 求下列不定积分：

(1) $\int(\arcsin x)^2dx$；

(2) $\int(x^2-1)\sin 2xdx$；

(3) $\int x^2e^{-2x}dx$；

(4) $\int\sqrt{x}\arctan\sqrt{x}dx$；

(5) $\int x\tan^2xdx$；

(6) $\int x\sin x\cos xdx$；

(7) $\int\arcsin\sqrt{1-x^2}dx$；

(8) $\int\sin x\ln(\tan x)dx$；

(9) $\int x^3(\ln x)^2dx$；

(10) $\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx$；

(11) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$ ；

(12) $\int\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx$ ；

(13) $\int e^{\sqrt{x}}dx$ ；

(14) $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$.

解 (1) 原式 $= x\cdot(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x\cdot(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

(2) 原式 $= -\frac{1}{2}\int (x^2-1)d(\cos 2x)$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x + \int x\cos 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos x + \frac{1}{2}\int x d(\sin 2x)$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-1)\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2-\frac{3}{2})\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.$$

(3) 原式 $= -\frac{1}{2}\int x^2 de^{-2x} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}dx$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}\int x de^{-2x}$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$$

$$= -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x^2+2x+1) + C.$$

(4) 原式 $= \frac{2}{3}\int \arctan\sqrt{x}dx^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\arctan\sqrt{x} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x}dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\cdot\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}\int dx + \frac{1}{3}\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\ln(1+x) + C.$$

(5) 原式 $= \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x d(\tan x) - \frac{x^2}{2} = x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$

(6) 原式 $= \int -\frac{x}{4}\mathrm{d}(\cos 2x) = -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{1}{4}\int \cos 2x\mathrm{d}x$

$= -\frac{x\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C.$

(7) 原式 $= x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$= x\arcsin\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$= x\arcsin\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x^2$

$= x\arcsin\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{\mathrm{sgn}x}\sqrt{1-x^2} + C.$

(8) 原式 $= -\int \ln(\tan x)\mathrm{d}(\cos x)$

$= -\cos x\ln|\tan x| + \int \cos x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$= -\cos x\ln|\tan x| + \int \frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$

$= -\cos x\ln|\tan x| + \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$= -\cos x \cdot \ln|\tan x| + \int \frac{1}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$= -\cos x\ln|\tan x| + \int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)$

$= -\cos x \cdot \ln|\tan x| + \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

(9) 原式 $= \frac{1}{4}\int (\ln x)^2\mathrm{d}x^4 = \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\int x^3\ln x\mathrm{d}x$

$= \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{1}{8}\int \ln x\mathrm{d}x^4$

$= \frac{x^4}{4}(\ln x)^2 - \frac{x^4}{8}\ln x + \frac{1}{8}\int x^3\mathrm{d}x$

$= \frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right] + C.$

(10) 原式 $= -\frac{1}{2}\int \sin\frac{x}{2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})$

$= -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\sin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-2x} \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\int\cos\frac{x}{2}d(e^{-2x})$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-2x}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{8}e^{-2x}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\int e^{-2x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{8}(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\cdot e^{-2x}-\frac{1}{16}\int e^{-2x}\sin\frac{x}{2}dx,$$

故原式 $=-\frac{2}{17}(4\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})e^{-2x}+C.$

(11) 原式$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx^2$$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$$

(12) 原式$=-\int xd\left(\frac{1}{e^x+1}\right)=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{1}{e^x+1}dx$

$$=-\frac{x}{e^x+1}+\int\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

$$=-\frac{x}{e^x+1}-\ln(1+e^{-x})+C.$$

(13) 令$\sqrt{x}=u$,则 $x=u^2$,$dx=2udu$,于是

原式 $=\int e^u\cdot 2udu=\int 2ue^u du=\int 2ude^u=2ue^u-2\int e^u du$

$$=2ue^u-2e^u+C=2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C.$$

(14) 原式$=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}dx^2=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}dx$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1+x}-\int x^2\cdot\frac{1}{(1+x)(1-x)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\frac{(1+x)(1-x)-1}{(1-x)(1-x)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int dx-\int\frac{1}{(1+x)(1-x)}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

$$=x-\frac{1}{2}(1-x^2)\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

2. 建立 $I_n=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}\mathrm{d}x\ (n\geqslant 2)$ 的递推公式，求$\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$.

解 $I_n=\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-\int x\mathrm{d}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^n}$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-\int x\cdot\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot x^n-n\cdot x^{n-1}\cdot\sqrt{1+x^2}}{x^{2n}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}-\int\frac{x^2-n-nx^2}{x^n\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}}-\int\frac{1-n}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x+\int\frac{n}{x^n\sqrt{1+x^2}x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}+(n-1)\int\frac{1}{x^{n-1}}\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}+n\cdot\int\frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{d}\sqrt{1+x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}+(n-1)\frac{1+x^2}{x^{n-1}}-(n-1)\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x^{1-n}+\frac{n\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}-$$

$$n\cdot\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\mathrm{d}x^{-1-n}$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}}\cdot\left(n+\frac{n}{x^2}\right)+(n-1)^2I_n+n\cdot(n+1)I_{n+2},$$

故有

$$I_{n-2}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-3}}\cdot\frac{(n-2)\cdot(1+x^2)}{x^2}+(n-3)^2I_{n-2}+(n-2)\cdot(n-1)\cdot I_n,$$

整理得 $I_n=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-n)x^{n-1}}+\frac{4-n}{n-1}I_{n-2}$.

因此当 $n=4$ 时，$I_4=\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{(1-4)x^3}+\frac{4-4}{4-1}I_2=-\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3x^3}+C.$

3. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，求$\int xf'(x)\mathrm{d}x$.

解 因为 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $f(x)=(\ln^2 x)'=\frac{2}{x}\ln x$，故

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f(x)=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^2 x+C.$$

习题 4-4

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$；

(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

(3) $\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x$；

(4) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$；

(5) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$ ；

(8) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x)}$ ；

(9) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}\mathrm{d}x$；

(10) $\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$ ；

(12) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$ ；

(13) $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$；

(14) $\int \frac{1+x^4}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{x^2-1}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$.

令 $u=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$，即 $x=\frac{u^3+1}{u^3-1}$，可得

$$\text{原式}=\int \frac{u}{\left(\frac{u^3+1}{u^3-1}\right)^2-1}\cdot\frac{-6u^2}{(u^3-1)^2}\mathrm{d}u=-\frac{3}{2}\int \mathrm{d}u$$

$$=-\frac{3}{2}u+C=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+C.$$

(2) 原式 $=\int \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}\mathrm{d}x$

$$=\int (x-\sqrt{x+1}\sqrt{x-1})\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}x-\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=x\sqrt{x^2-1}-\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

$$=x\sqrt{x^2-1}-\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x-\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x,$$

因此 $\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}-\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\right)$，故

$$原式 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

(3) 令 $\sqrt{x^2+1} = tx+1$，即 $t = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$，可得

$$x = \frac{2t}{1-t^2},\mathrm{d}x = \frac{2t^2+2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

$$故原式 = \int \frac{1}{\left(\frac{2t}{1-t^2}+1\right)\cdot\sqrt{\frac{(2t)^2}{(1-t^2)^2}+1}}\cdot\frac{2t^2+2}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t = \int\frac{2t^2+2}{(t^2-2t-1)(t^2-1)}\mathrm{d}t$$

$$= \int\frac{2t-2}{t^2-2t-1}\mathrm{d}t + \int\frac{-2t}{t^2-1}\mathrm{d}t.$$

利用有理式积分并整理得

$$原式 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2}+x-1}{1+x}\right| + C.$$

(4) 令 $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，即 $x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$，则

$$原式 = \int u\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}\cdot\frac{-4u}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u = \int\frac{-4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u$$

$$= \int\left(\frac{2}{1+u^2}-\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 2\arctan u + \ln|1-u| - \ln|1+u| + C$$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right| + C.$$

(5) $原式 = \displaystyle\int\frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = \int\frac{1}{\sin^3 x}\mathrm{d}x - 2\int\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x + \int\sin x\mathrm{d}x.$

令 $u = \tan\dfrac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$，则

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

$$故原式 = \int\frac{(1+u^2)^3}{8u^3}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u - 2\int\frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u - \cos x + C.$$

利用有理分式积分并整理得

$$原式 = -\frac{1}{2}\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{3}{2}\cos x + C.$$

(6) 令 $u = \tan\dfrac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$，则

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2},\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},\mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

故原式$=\int \dfrac{1}{\dfrac{2u}{1+u^2}+\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\cdot\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\dfrac{1}{2u+1-u^2}\mathrm{d}u$

$$=-\int\frac{2}{(u-1)^2-2}\mathrm{d}(u-1)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u-1}{\sqrt{2}-u+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

(7) 原式$=\int(x^2+x+4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{3}{x+2})\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

(8) 原式$=\int\left[\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1+x}{2(x^2+1)}\right]\mathrm{d}x$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\arctan x-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

(9) 原式$=\int\left[\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{x+1}+C.$$

(10) 原式$=\int\left(\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}+\dfrac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-1}\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(11) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{3\csc^2 x+1}.$

令 $u=\cot x$,则

$$原式=-\int\frac{du}{3u^2+4}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}u}{2}+C=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}\cot x}{2}+C.$$

(12) 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则

$$原式=\int\frac{1}{\frac{4u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}+5}\cdot\frac{2}{1+u^2}du$$

$$=\int\frac{1}{3u^2+2u+2}du=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(u+\frac{1}{3})^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}d(u+\frac{1}{3})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

(13) $原式=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

(14) $原式=\int dx-2\int\frac{1}{x^2+1}dx+2\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

$$=x-2\arctan x+2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)+C$$

$$=x+\frac{x}{x^2+1}-\arctan x+C.$$

2. 用积分表求下列不定积分：

(1) $\int\frac{1}{x^2+2x+5}dx$；

(2) $\int e^{2x}\cos x dx$；

(3) $\int\frac{dx}{\sin^3 x}$；

(4) $\int\frac{\sqrt{1-x}}{x}dx$；

(5) $\int x^2\sqrt{x^2-2}dx$；

(6) $\int\frac{x+5}{x^2-2x-1}dx$.

解 (1) $原式=\int\frac{1}{(x+1)^2+2^2}d(x+1)=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C.$

(2) $原式=\frac{1}{2^2+1^2}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C=\frac{1}{5}e^{2x}(\sin x+2\cos x)+C.$

(3) $原式=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x}=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

(4) $原式=2\sqrt{x-1}-\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$

$$= 2\sqrt{x-1} - 2\arctan\sqrt{x-1} + C.$$

（5）原式 $= \dfrac{x}{8}(2x^2-2)\sqrt{x^2-2} - \dfrac{4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C$

$$= \frac{x}{4}(x^2-1)\sqrt{x^2-2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-2}| + C.$$

（6）原式 $= \displaystyle\int \frac{x}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| - \frac{-2}{2}\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x^2-2x-1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + 6\cdot\frac{1}{\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\cdot$$

$$\ln\left|\frac{2x-2-\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2x-2+\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-1| + \frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-(\sqrt{2}+1)}{x+(\sqrt{2}-1)}\right| + C.$$

总复习题四

1. 填空题：

（1）若 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，则 $\int x\mathrm{e}^{-x^2}f(\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x =$ ________.

（2）已知一个函数 $f(x)$ 满足 $f'(\sqrt{x}) = 1-x$，则 $f(x) =$ ________.

（3）$\int xf''(x)\mathrm{d}x =$ ________.

（4）已知一个函数的导数 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$，且当 $x=1$ 时，该函数值为 $\ln 2$，则 $f(x) =$ ________.

（5）已知 $y=f(x)$ 连续且可导，且 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，$y=g(x)$ 为 $f(x)$ 的连续的反函数，则 $\int g(x)\mathrm{d}x =$ ________.

解　（1）因为 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，故

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}f(\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}F(\mathrm{e}^{-x^2}) + C.$$

（2）$f'(\sqrt{x}) = 1-x$，则 $f'(x) = 1-x^2$，故

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int(1-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^3 + x + C.$$

(3) $\int xf''(x)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}f'(x) = x \cdot f'(x) - \int f'(x)\mathrm{d}x = x \cdot f'(x) - f(x) + C.$

(4) $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$

又因 $f(1) = \ln|1+\sqrt{1-1}| + C = C = \ln 2$，故

$$f(x) = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + \ln 2.$$

(5) $\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - \int x\mathrm{d}g(x).$

因为 $y = g(x)$ 是 $F(x)$ 的反函数，故

$$\int x\mathrm{d}g(x) = 1 = F[g(x)] + C_1,$$

则 $\int g(x)\mathrm{d}x = xg(x) - F[g(x)] + C.$

2. 选择题：

(1) 若 $u = u(x)$，$v = v(x)$ 都是 x 的可微函数，则 $\int u\mathrm{d}v = ($　　$)$.

A. $uv - \int vu'\mathrm{d}x$　　B. $uv - \int vu'\mathrm{d}u$

C. $uv - \int v'\mathrm{d}u$　　D. $uv - \int uv'\mathrm{d}u$

(2) 若一个函数的导数 $f'(x) = \cos x$，则 $f(x)$ 的一个原函数为(　　).

A. $\cos x$　　B. $\sin x$　　C. $x - \sin x$　　D. $x - \cos x$

(3) $\int \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x = ($　　$)$.

A. $\begin{cases} \mathrm{e}^x + C_1, & x \geqslant 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} + C_2, & x < 0 \end{cases}$　　B. $\begin{cases} \mathrm{e}^x + C, & x \geqslant 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} + 2 + C, & x < 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} \mathrm{e}^x + C, & x \geqslant 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} + C, & x < 0 \end{cases}$　　D. $\begin{cases} \mathrm{e}^x + C, & x \geqslant 0 \\ -\mathrm{e}^{-x} - C, & x < 0 \end{cases}$

(4) 已知曲线上任一点的二阶导数 $y'' = 6x$，且在曲线上 $(0, -2)$ 处的切线为 $2x - 3y - 6 = 0$，则这条曲线的方程为(　　).

A. $y = x^3$　　B. $y = x^3 - 2x - 2$

C. $3x^3 + 2x - 3y - 6 = 0$　　D. $3x^3 + 2x - y - 6 = 0$

(5) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，则对其原函数 $F(x)$ 而言，下列性质错误的是(　　).

A. $F(x)$ 在 (a,b) 内可导

B. $f(x)$ 的任一原函数与 $F(x)$ 在 (a,b) 内仅相差一个常数

C. $F(x)$ 在 (a,b) 内存在原函数

D. $F(x)$ 是(a,b) 内的初等函数

解 (1)$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = uv - \int vu'\mathrm{d}x$,选 A.

(2)$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x = \sin + C$,选 B.

(3) 当 $x \geqslant 0$ 时,$\int \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C_1$;

当 $x < 0$ 时,$\int \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + C_2$.

选 B.

(4) 由题可得

$$y' = \int 6x\mathrm{d}x = 3x^2 + C_1, y = \int (3x^2 + C_1)\mathrm{d}x = x^3 + C_1x + C_2,$$

故由题意知曲线上$(0,-2)$处的斜率为$\frac{2}{3}$,即

$$\begin{cases} y\big|_{x=0} = C_2 = -2, \\ y'\big|_{x=0} = C_1 = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

所以 $y = x^3 + \frac{2}{3}x - 2$,即 $3x^3 + 2x - 3y - 6 = 0$.

选 C.

(5) 因为 $F(x)$ 不一定是初等函数. 例如,$f(x) = |x|$ 在$(-\infty, +\infty)$上连续但是其原函数是一个分段函数而非初等函数. 选 D.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x - (\arctan x)^{\frac{3}{2}}}{1 + x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{1}{3 + \cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{2x + 3}{x^4 - 1}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1 + x^4}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\ln\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{\sin x\cos x}{1 + \sin^4 x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}\mathrm{d}x\ (a > 0)$;

(10) $\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\int \ln(1 + x^2)\mathrm{d}x$;

(12) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$;

(13) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1 + x)}}$;

(14) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}}$;

(15) $\int \frac{dx}{16-x^4}$；　　(16) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$；

(17) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx$；　　(18) $\int \frac{xe^x dx}{(e^x+1)^2}$.

解　(1) 原式 $=\int \frac{x}{1+x^2}dx-\int(\arctan x)^{\frac{3}{2}}d(\arctan x)$

$$=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{2}{5}(\arctan x)^{\frac{5}{2}}+C.$$

(2) 原式 $=\frac{2}{3+1}\sqrt{\frac{3+1}{3-1}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3-1}{3+1}}\tan\frac{x}{2}\right)+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right]+C.$

(3) 原式 $=\int\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}dx$

$$=\int\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx+\int\frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+x+1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(4) 原式 $=\int\frac{2x+3}{(x^2+1)(x^2-1)}dx$

$$=\int\frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}dx^2+\int\frac{3}{(x^2+1)(x^2-1)}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx^2+\frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{3}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx-\frac{3}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{3}{2}\arctan x+C.$$

(5) 原式 $=\int\left(x\cos x e^{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^{\sin x}\right)dx$

$$=\int x\cos x e^{\sin x}dx-\int\tan x\sec x e^{\sin x}dx$$

$$=\int x\,d(e^{\sin x})-\int e^{\sin x}d(\sec x)$$

$$= x \cdot e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx - (\sec x e^{\sin x} - \int e^{\sin x} dx)$$

$$= e^{\sin x}(x - \sec x) + C.$$

(6) 令 $\sqrt[4]{1+x^4} = t$，则

$$t^4 = 1 + x^4, 4t^3 dt = 4x^3 dx,$$

故 $dx = \dfrac{4t^3}{4x^3} dt$，原式 $= \displaystyle\int \frac{1}{xt} \cdot \frac{4t^3}{4x^3} dt$

$$= \int \frac{t^2}{t^4 - 1} dt = \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2 - 1} dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t^2 + 1} dt$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{t-1}{t+1} + \frac{1}{2} \arctan t + C$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} - 1}{\sqrt[4]{1+x^4} + 1} + \frac{1}{2} \arctan \sqrt[4]{1+x^4} + C.$$

(7) 原式 $= \displaystyle\int \ln\ln x \, d(\ln x) = \ln x \ln\ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x \ln x} dx = \ln x(\ln\ln x - 1) + C.$

(8) 原式 $= \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{d(\sin^2 x)}{1 + \sin^4 x} = \frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$

(9) 原式 $= \displaystyle\int \frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$$= a \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(10) 原式 $= -2 \displaystyle\int x \, d(\cos \sqrt{x}) = -2x \cos \sqrt{x} + 2 \int \cos \sqrt{x} dx$

$$= -2x \cos \sqrt{x} + 4 \int \sqrt{x} \, d(\sin \sqrt{x})$$

$$= -2x \cos \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} - 4 \int \sin \sqrt{x} \, d\sqrt{x}$$

$$= -2x \cos \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 4 \cos \sqrt{x} + C$$

$$= (4 - 2x) \cos \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C.$$

(11) 原式 $= x \ln(1 + x^2) - \displaystyle\int \frac{2x^2}{1 + x^2} dx$

$$= x \ln(1 + x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.$$

(12) 原式 $= \displaystyle\int \tan^2 x \sec x dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\int \sec x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

(13) 原式 $= \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}$

$$\xlongequal{x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec u} \int \sec u \mathrm{d}u = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$= \ln|2x + 1 + 2\sqrt{x(1+x)}| + C.$$

(14) 设 $x = a\sin u\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos u, \mathrm{d}x = a\cos u \mathrm{d}u,$$

于是原式 $= \dfrac{1}{a^4}\int \sec^4 u \mathrm{d}u = \dfrac{1}{a^4}\int (\tan^2 u + 1)\mathrm{d}(\tan u)$

$$= \frac{\tan^3 u}{3a^4} + \frac{\tan u}{a^4} + C$$

$$= \frac{1}{3a^4}\left[\frac{x^3}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} + \frac{3x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right] + C.$$

(15) 原式 $= \int \dfrac{1}{(4 + x^2)(2 + x)(2 - x)}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{1}{4+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{32}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + C.$$

(16) 原式 $= -\int \cot x \sec^2 x \mathrm{d}(\cot x)$

$$\xlongequal{u=\cot x} -\int u\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{u^2}{2} - \ln|u| + C$$

$$= -\frac{\cot^2 x}{2} - \ln|\cot x| + C.$$

(17) 设 $x = \sin u\left(-\dfrac{\pi}{2} < u < \dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\sqrt{1 - x^2} = \cos u, \mathrm{d}x = \cos u \mathrm{d}u,$$

于是原式 $= \int u\cos^2 u \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\int u(1 + \cos 2u)\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{4}\int u \mathrm{d}(2u + \sin 2u)$$

$$=\frac{u(2u+\sin 2u)}{4}-\frac{1}{4}\int(2u+\sin 2u)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{u^2}{4}+\frac{u}{4}\sin 2u-\frac{\sin^2 u}{4}+C$$

$$=\frac{(\arcsin x)^2}{4}+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{x^2}{4}+C.$$

(18) 原式 $=-\int x\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right)=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+1}$

$$=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

$$=-\frac{x}{\mathrm{e}^x+1}-\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.$$

4. 设 $\int f(\sin^2 x)\mathrm{d}x=\frac{x}{\sin x}$，求 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$.

解 由题意知 $0<x<1$，则

$$f(\sin^2 x)=\left(\frac{x}{\sin x}\right)'=\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x},$$

故 $f(x)=\frac{\sqrt{x}-\arcsin\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}{x}$.

因此 $\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

$$=-2\sqrt{1-x}-2\int\arcsin\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x}$$

$$=-2\sqrt{1-x}-2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{x})$$

$$=-2\sqrt{1-x}-2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\int\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$=-4\sqrt{1-x}-2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+C.$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x<0,\\ \ln(1+2x), & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的原函数.

解 当 $x<0$ 时，$F(x)=\int\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$；

当 $x>0$ 时，$F(x)=\int\ln(1+2x)\mathrm{d}x=x\ln(1+2x)-\int\frac{2x}{1+2x}\mathrm{d}x$

$$=x\ln(1+2x)-x+\frac{1}{2}\ln(1+2x)+C,$$

故 $F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C, x<0, \\ x\ln(1+2x)-x+\dfrac{1}{2}\ln(1+2x)+C, x\geqslant 0.\end{cases}$

6. 设 $y=y(x)$ 是由 $xy^2=x^2+y^3$ 所确定的隐函数，求 $\int y^{-2}\mathrm{d}x$.

解　令 $F(x,y)=xy^2-x^2-y^3$，则

$$F'_x=y^2-2x \quad F'_y=2xy-3y^2,$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-2x}{2xy-3y^2}$，故

$$\begin{aligned}\int y^{-2}\mathrm{d}x &= -\int y^{-2}\cdot\frac{2xy-3y^2}{2x-y^2}\mathrm{d}y \\ &= -\int\frac{2x-3y}{2xy-y^3}\mathrm{d}y=-\int\left(\frac{1}{y}+\frac{y-3}{2x-y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= -\ln|y|+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(y^2-2x)}{y^2-2x}-\int\frac{3}{y^2-2x}\mathrm{d}y \\ &= -\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|y^2-2x|-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}+y}{\sqrt{2x}-y}\right|+C \\ &= \ln\left|\frac{y^2-2x}{y}\right|-\frac{3}{2\sqrt{2x}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}x+y}{\sqrt{2}x-y}\right|+C.\end{aligned}$$

7. 已知曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任一点的切线斜率为 $x\ln(1+x^2)$，求此曲线方程.

解　$$\begin{aligned}f(x) &= \int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int x^2\cdot\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\int 1\mathrm{d}x^2+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}(x^2+1) \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln(1+x^2)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

又因 $f(0)=C=-\dfrac{1}{2}$，故曲线方程为

$$f(x)=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1].$$

8. 求下列不定积分的递推表达式（n 为非负整数）：

(1) $I_n = \int e^x \sin^n x \, dx$;　　　　　(2) $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

解　(1) $I_n = \int \sin^n x \, de^x$

$$= e^x \sin^n x - \int n \sin^{n-1} x \cdot \cos x e^x dx$$

$$= e^x \sin^n x - \int n \sin^{n-1} x \cos x de^x$$

$$= e^s \sin^n x - e^x \cdot n \sin^{n-1} x \cos x + \int e^x \cdot [n \cdot (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x + n \cdot \sin^n x] dx$$

$$= e^x (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x) + n \cdot (n-1) \int e^x \cdot \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx + n \int e^x \cdot \sin^n x dx$$

$$= e^x (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x) + n \cdot (n-1) I_{n-2} - n \cdot (n-1) I_n + n I_n,$$

整理得 $I_n = \frac{1}{1+n^2} e^x (\sin^n x - n \sin^{n-1} x \cos x) + \frac{n \cdot (n-1)}{1+n^2} I_{n-2}$.

(2) $I_n = -\int x^{n-1} d \sqrt{1-x^2}$

$$= -\sqrt{1-x^2} x^{n-1} + \int \sqrt{1-x^2} \cdot (n-1) x^{n-2} dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2} x^{n-1} + \int \frac{(1-x^2) \cdot (n-1) x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2} x^{n-1} + (n-1) \cdot \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^2}} dx - (n-1) \int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -\sqrt{1-x^2} x^{n-1} + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n,$$

整理得 $I_n = -\frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{1-x^2} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

第五章

定　积　分

习题 5-1

1. 用定积分表示由曲线 $y=2x^2+1$ 与直线 $x=2, x=3$ 及 x 轴所围成图形的面积.

解　由定积分的几何意义知所围图形的面积为

$$A=\int_2^3 (2x^2+1)\mathrm{d}x.$$

2. 利用定积分的定义计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x^3\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_a^b (x^2+1)\mathrm{d}x$.

解　由于函数在积分区间上连续，因此可把积分区间分成 n 等份，并且 ξ_i 为小区间右端点，则可得各定积分.

(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{n}\right]^3\cdot\frac{1}{n}$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

$$=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4}=\frac{1}{4}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)^2+1\right]\cdot\frac{b-a}{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[a^2+1+\frac{(b-a)^2\cdot i^2}{n^2}+\frac{2a(b-a)i}{n}\right]\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(a^2+1)(b-a)}{n}n+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(b-a)^3\cdot i^2}{n^3}+\frac{2a(b-a)^2 i}{n}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{(a^2+1)(b-a)+\frac{(b-a)^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\right.$$

$$\left.\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{(a^2+1)(b-a)+\frac{(b-a)^3(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6}+\right.$$

$$\left.a(b-a)^2(1+\frac{1}{n})\right\}$$

$$= (a^2+1)(b-a)+\frac{1}{3}(b-a)^3+a(b-a)^2$$

$$= \frac{1}{3}(b^3-a^3)+b-a.$$

3. 利用定积分的几何意义,求下列定积分:

(1) $\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^2 |x|\mathrm{d}x$;

(3) $\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x(0\leqslant a<b)$; (4) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$.

解 (1) 由定积分的几何意义知$\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x$ 等于图 5-1 中阴影部分所示的直角梯形的面积.

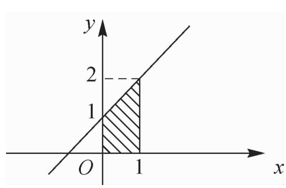


图 5-1

梯形的上、下底边长分别为 1、2,高为 1,故

$$\int_0^1 (x+1)\mathrm{d}x = \frac{(1+2)\times 1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(2) 由定积分的几何意义知$\int_{-1}^2 |x|\mathrm{d}x$ 等于图 5-2 中阴影部分所示的两个等腰直角三角形的面积.

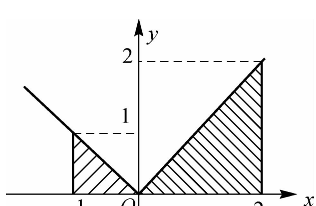


图 5-2

两三角形的边长分别为 1、2，故

$$\int_{-1}^{2} |x| \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times 1\times 1+\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{5}{2}.$$

（3）由定积分的几何意义知$\int_{a}^{b}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\mathrm{d}x$ 等于图 5-3 中阴影部分所示的两个等腰直角三角形的面积.

两三角形的直边长分别为$\frac{b-a}{2}$、$\frac{b-a}{2}$，故

$$\int_{a}^{b}\left|x-\frac{a-b}{2}\right|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2}\cdot 2=\frac{1}{4}(b-a)^{2}.$$

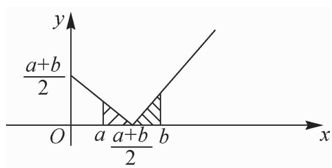


图 5-3

（4）由定积分的几何意义知$\int_{0}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x$ 等于图 5-4 中阴影部分所示的面积，即半径为 a 的圆面积的$\frac{1}{4}$，故

$$\int_{0}^{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\pi\cdot a^{2}=\frac{1}{4}\pi a^{2}.$$

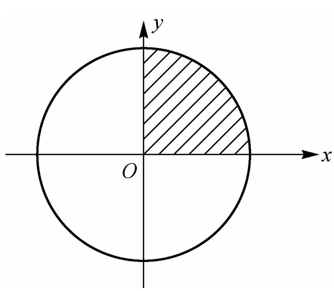


图 5-4

4. 将下列和式的极限表示成定积分：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-2^{2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-n^{2}}}\right)$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i(1-0)}{n}}\cdot\frac{1-0}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i(1-0)}{n}\right)^2}}\cdot\frac{1-0}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x.$$

习题 5-2

1. 利用定积分的性质，比较下列各组定积分的大小：

(1) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^8}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{-2}^{-1}3^{-x}\mathrm{d}x$ 与 $\int_{-2}^{-1}3^x\mathrm{d}x$.

解　(1) 在区间 $[0,1]$ 上，$\mathrm{e}^{x^8}\leqslant \mathrm{e}^x$，因此 $\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\mathrm{e}^{x^8}\mathrm{d}x$.

(2) 在区间 $[1,\mathrm{e}]$ 上，$0\leqslant\ln x\leqslant 1$，故 $\ln x\geqslant(\ln x)^2$. 因此 $\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x\geqslant\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x$.

(3) 因 $\ln(1+x)\leqslant x$，故当 $x>0$ 时，在区间 $[0,1]$ 上，$\ln(1+x)\leqslant x$，因此 $\int_0^1 x\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x$.

(4) 在区间 $[-2,-1]$ 上，$3^{-x}>3^x$，因此 $\int_{-2}^{-1}3^{-x}\mathrm{d}x>\int_{-2}^{-1}3^x\mathrm{d}x$.

2. 估计下列各定积分的值：

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^2\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-1}^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$,则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

令 $g(x)=x\cos x-\sin x$,则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x$.

在$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$上,$-x\sin x$ 单调递减,故有

$$g'(x)\leqslant g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}<0,$$

因此 $g(x)$ 单调递减,则 $g(x)\leqslant g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$.

从而 $f(x)$ 单调递减,故有

$$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

即

$$\frac{1}{2}\leqslant\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 在区间[1,2]上,由于 $f'=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}<0$,所以 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 单调递减,故

$$f(1)\geqslant f(x)\geqslant f(2),$$

即$\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{x}{x^2+1}\geqslant\dfrac{2}{5}$,因此

$$\frac{2}{5}=\int_1^2\frac{2}{5}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$,则 $f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$.

令 $f'(x)=0$,则可得 $x=0$.

因 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)$,故最小值必在 $f(-1)$,$f(2)$ 中.

又因 $f(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$,$f(0)=1$,$f(2)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$,故$\dfrac{1}{\mathrm{e}^4}\leqslant\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant1$,于是

$$3\mathrm{e}^{-4}=\int_{-1}^2\frac{1}{\mathrm{e}^4}\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^2\mathrm{e}^{-x^2}\leqslant\int_{-1}^2 1\mathrm{d}x=3.$$

(4) 在区间$[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$上,函数 $f(x)=x\arctan x$ 是单调递增的,因此

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant f(x)\leqslant f(\sqrt{3}),$$

即$\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\leqslant x\arctan x\leqslant\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$,故

$$\frac{\pi}{9}=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}x\arctan x\mathrm{d}x\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3}.$$

习题 5-3

1. 求下列函数的导数：

(1) $\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$；　　(2) $\int_2^{x^2} \cos t\mathrm{d}t$；

(3) $\int_{x^3}^3 \ln t\mathrm{d}t$；　　(4) $\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t$；

(5) $\int_0^x \frac{\tan t}{1+t^2}\mathrm{d}t$；　　(6) $\int_x^1 t^2\ln t^3\,\mathrm{d}t$；

(7) $\int_0^{x^3} \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t$；　　(8) $\int_0^x (x-t)\cos t\mathrm{d}t$.

解　(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{-x^2}$.

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_2^{x^2} \cos\mathrm{d}t = 2x\cos x^2$.

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3}^3 \ln t\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_3^{x^3} \ln t\mathrm{d}t = -3x^2\ln x^3$.

(4)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t - \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t\right)$$
$$= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\tan t}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\tan x}{1+x^2}$.

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\ln t^3\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_1^x t^2\ln t^3\,\mathrm{d}t = -x^2\ln x^3$.

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3} \frac{1}{1+t^3}\mathrm{d}t = \frac{3x^2}{1+x^9}$.

(8)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)\cos t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_0^x \cos t\mathrm{d}t - \int_0^x t\cos t\mathrm{d}t\right)$$
$$= \int_0^x \cos t\mathrm{d}t + x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t\cos t\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x \cos t\mathrm{d}t + x\cos x - x\cos x$$
$$= \int_0^x \cos t\mathrm{d}t.$$

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\int_2^x \cos(4-t^2)\,\mathrm{d}t}{x-2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x^2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x^2}{\int_x^0 \sin 2t\,\mathrm{d}t}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t}{\int_0^x (1-\cos t)\,\mathrm{d}t}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t})\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

解　(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos(4-x^2)}{1}=1$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$.

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\mathrm{e}^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-\cos^2 x}}{2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

(5) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2(1+x)}=\dfrac{1}{2}$.

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{-\sin 2x}=-1$.

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

(8) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

3. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^{-2}\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^2|1-x|\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^2 x|x-a|\mathrm{d}x(0<a<2)$； (6) $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x, f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

(7) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$； (8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\mathrm{d}\theta$.

解 (1) 原式 $=\frac{1}{4}x^4\Big|_1^2=\frac{1}{4}(2^4-1^4)=\frac{15}{4}$.

(2) 原式 $=\ln|x|\Big|_{-1}^{-2}=\ln 2$.

(3) 原式 $=(a^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-a}^{a}=a^3-\frac{1}{3}a^3-(-a^3+\frac{1}{3}a^3)=\frac{4}{3}a^3$.

(4) 原式 $=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x$

$$=(x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_0^1+\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}-0+0+\frac{1}{2}=1.$$

(5) 原式 $=\int_0^a -x(x-a)\mathrm{d}x+\int_a^2 x(x-a)\mathrm{d}x$

$$=\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_0^a+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2\right)\Big|_a^2$$

$$=-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3+\frac{8}{3}-2a-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{2}a^3$$

$$=\frac{1}{3}a^3-2a+\frac{8}{3}.$$

(6) 原式 $=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(2x-\frac{1}{2}x^2)\Big|_1^2$

$$=\frac{1}{3}+2-\frac{3}{2}=\frac{5}{6}.$$

(7) 原式 $=\arctan x\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

(8) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2\theta-1)\mathrm{d}\theta=(\tan\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$.

习题 5-4

1. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_1^{\mathrm{e}} (x\ln x)^2\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\mathrm{d}x$；

(6) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 \arccos x\mathrm{d}x$；

(8) $\int_0^{\pi} x^2\sin x\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\cos x\mathrm{d}x$；

(10) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\mathrm{d}x$；

(11) $\int_0^1 x(\arctan x)^2\mathrm{d}x$；

(12) $\int_0^1 (1-x^2)^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\mathrm{d}x$；

(14) $\int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$；

(15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x$；

(16) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$；

(17) $\int_{-2}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$；

(18) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

解 (1) 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^1 (2-x^2)^{12}\mathrm{d}x^2$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{13}(2-x^2)^{13}\Big|_0^1$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{13}-\frac{2^{13}}{13}\right)=\frac{1}{26}(2^{13}-1).$$

(2) 原式 $=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)\Big|_{-1}^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big|_{-1}^1$$

$$=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

(3) 原式$= x^3(\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot 2x\ln x\cdot(\ln x+1)dx$

$$= e^3 - \int_1^e 2x^2(\ln x)^2dx - \int_1^e 2x^2\ln x dx.$$

因$\int_1^e 2x^2\ln x dx = \frac{2}{3}\int_1^e \ln x dx^3 = \frac{2}{3}x^3\ln x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2dx = \frac{2}{3}e^3 - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(e^3-1) = \frac{2}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{9}$,所以

$$原式 = \frac{1}{3}\cdot\left(e^3 - \int_1^e 2x^2\ln x dx\right) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

(4) 原式$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(1+3)x-\cos(3-1)x]\sin 2x dx$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\sin 2x dx - \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin 2x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 2x-1)\sin 2x dx - \left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 4x dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2x d(\cos 2x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 4x dx\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{3}\cos^3 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\cos 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}.$$

(5) 令$\sqrt{5-4x}=t$,则$x=\frac{5-t^2}{4}$,$dx=-\frac{t}{2}dt$.

当$x=-1$时,$t=3$;当$x=1$时,$t=1$.

因此原式$=\int_3^1 -\frac{t^2-5}{4t}\cdot\left(-\frac{t}{2}\right)dt = \int_3^1\frac{t^2-5}{8}dt = \frac{1}{24}t^3\Big|_3^1 - \frac{5}{8}t\Big|_3^1 = \frac{1}{6}$.

(6) 原式$=\int_{\frac{1}{e}}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx$

$$=-x\ln x\Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 x\cdot\frac{1}{x}dx + x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = 2-\frac{2}{e}.$$

(7) 原式$= x\arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = 1.$$

(8) 原式$=\int_0^\pi -x^2d(\cos x) = -x^2\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x dx$

$$=\pi^2 + \int_0^\pi 2x d(\sin x) = \pi^2 + 2x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x dx$$

$$= \pi^2 + 2\cos x \Big|_0^{\pi} = \pi^2 - 4.$$

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \sin x \cdot e^{2x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot e^{2x} \cdot 2dx$

$$= e^{\pi} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} d(\cos x) = e^{\pi} + 2\cos x e^{2x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x} \cdot \cos x dx$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx,$$

故$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{1}{5}(e^{\pi} - 2)$.

(10) 令$\sqrt{\frac{x}{x+1}} = t$,则 $x = \frac{t^2}{1-t^2}$,于是 $dx = \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$.

当 $x = 0$ 时,$t = 0$;当 $x = 3$ 时,$t = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此原式 $= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2t}{(1-t^2)^2}\arcsin t dt$

$$= \frac{t^2}{1-t^2}\arcsin t \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{1-t^2} d(\arcsin t)$$

$$= \pi - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}.$$

(11) 原式$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\arctan x)^2 dx^2$

$$= \frac{1}{2}x^2(\arctan x)^2 \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 2 \cdot \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \int_0^1 \arctan x dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\arctan x dx$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - x\arctan x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \arctan x d(\arctan x)$$

$$= \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) \Big|_0^1 + \frac{(\arctan x)^2}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

(12) 令 $\sqrt{1-x^2} = t$,则 $x = \sqrt{1-t^2}$,$dx = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

当 $x = 0$ 时,$t = 1$;当 $x = 1$ 时,$t = 0$.

令 $t = \sin u$,$(0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2})$,则

原式 $=\int_1^0 t^9\cdot\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{2}}^0-\frac{\sin^{10}u}{\cos u}\cdot\cos u\mathrm{d}u=\frac{63}{512}\pi.$

(13) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}(\tan x)-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos^2 x)\mathrm{d}(\tan x)$$

$$=\frac{1}{3}\tan^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}.$$

(14) 原式 $=x(\arcsin x)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2\arcsin x\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi^2}{72}+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-2\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}\cdot\mathrm{d}(\arcsin x)$$

$$=\frac{\pi^2}{72}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi-1.$$

(15) 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x-1}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 2x}{4}\mathrm{d}x=\frac{3}{16}\pi.$

(16) 原式 $=\int_0^1\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}(x^2+1)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2+1}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}.$

(17) 原式 $=\int_{-2}^0\frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}(x+1)=\arctan\frac{x+1}{1}\Big|_{-2}^0=\frac{\pi}{2}.$

(18) 原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0-\sqrt{\cos x}\cdot\sin x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\cdot\sin x\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0-\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

2. 利用函数的奇偶性求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^1 x^2\sin x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x^7+\sin x+x^2)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_{-a}^a\frac{x^3\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为 $x^2\sin x$ 在 $[-1,1]$ 上是奇函数，所以 $\int_{-1}^1 x^2\sin x\mathrm{d}x=0$.

(2) 因为 $\sqrt{1-x^2}$ 在 $[-1,1]$ 上是偶函数，所以

$$\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

令 $x=\sin t,(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2})$，则$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{2}$.

(3) 因为 $x^7+\sin x$ 在$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上是奇函数，所以

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(x^7+x\sin x+x^2)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{12}.$$

(4) 因为$\frac{\sin^2 x}{x^4+2x^2+1}$在$[-a,a]$上是偶函数，而 x^3 在$[-a,a]$上是奇函数，故

$$\int_{-a}^{a}\frac{x^3\sin^2 x}{x+2x^2+1}\,dx=0.$$

3. 证明：$\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dx}{1+x^2}$.

证明　令 $x=\frac{1}{t}$，则当 $x=1$ 时，$t=1$，故

$$\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_{\frac{1}{t}}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{1}{t^2+1}\,dt,$$

即$\int_x^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2+1}\,dx$.

4. 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续，证明：$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left[\int_0^u f(x)\,dx\right]du$.

证明　设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$，则

$$\begin{aligned}\int_0^x f(u)(x-u)\,du&=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du\\&=x\cdot F(u)\Big|_0^x-uF(u)\Big|_0^x+\int_0^x F(u)\,du\\&=\int_0^x F(u)\,du=\int_0^x\left[\int_0^u f(x)\,dx\right]du.\end{aligned}$$

5. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，证明：$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

证明　令 $x=a+b-u$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(a+b-u)\,du=\int_a^b f(a+b-u)\,du=\int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

6. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，证明 $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}(n>1)$，并计算$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^5 x\,dx$.

证明　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\cdot\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-2}x\,d(\tan x)$$

$$=-I_{n-2}+\tan^{n-1}x\cdot\frac{1}{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{n-1}-I_{n-2},$$

$$I_1=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}(\cos x)=-\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln\sqrt{2},$$

因此 $I_3=\frac{1}{2}-\ln\sqrt{2}$，$I_5=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{4}$.

7. 设 $f(x)$ 是以 l 为周期的连续函数，证明$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

证明 因 $f(x)$ 是周期函数且连续，所以 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 也为周期函数，即

$$F(x)=F(x+l).$$

又因$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x=F(a+l)-F(a)$，故$\int_a^{a+l}f(x)\mathrm{d}x$ 的值与 a 无关.

习题 5-5

1. 计算下列广义积分：

(1) $\int_{16}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$； (4) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2-x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$； (6) $\int_0^1 x\ln^n x\,\mathrm{d}x$；

(7) $\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$； (8) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$； (10) $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 原式 $=\int_{16}^{+\infty}x^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x=-2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_{16}^{+\infty}=\frac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\int_0^{+\infty}-\frac{1}{a}x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax})=-\frac{1}{a}x\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x$

$$=0-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a^2}.$$

(3) $\int\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\int\cos bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax})=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx-\frac{b}{a}\int\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}\int\sin bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax})$$

$$=-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{-ax}\sin bx-\frac{b^2}{a^2}\int e^{-ax}\cos bx\,dx,$$

因此$\int e^{-ax}\cos bx=\frac{a^2}{a^2+b^2}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx+\frac{b}{a^2}e^{-ax}\sin bx\right)$，则

$$\text{原式}=\frac{e^{-ax}(-a\cos bx+\sin bx)}{a^2+b^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

(4) 原式$=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(x-1)}dx=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x-1}dx-\int_2^{+\infty}\frac{1}{x}dx$

$=\ln(x-1)\Big|_2^{+\infty}-\ln x\Big|_2^{+\infty}$

$=\ln 2.$

(5) 原式$=\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx+\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}+(-e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=1-0+(0+1)=2.$

(6) $I_n=\int_0^1 x\ln^n x\,dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 x\ln^n x\,dx$

$=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\left[-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln^n\varepsilon-\frac{n}{2}\int_\varepsilon^1 x\ln^{n-1}x\,dx\right]$

$=-\frac{n}{2}I_{n-1},$

故 $I_n=\frac{n(n-1)}{2^2}I_{n-2}=(-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}I_1.$

因 $I_1=\int_0^1 x\ln x\,dx=-\frac{1}{2^2}$，故

$$\text{原式}=\frac{1}{2^{n+1}}(-1)^n n!.$$

(7) $\int_1^2\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\int_1^2\frac{x^{-2}}{\sqrt{1-x^{-2}}}dx=-\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1-(x^{-1})^2}}d(x^{-1})$

$$=-\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2=\frac{\pi}{3}.$$

(8) 令 $x=t^2+1(t>0)$，则 $dx=2tdt$. 当 $x=1$ 时，$t=0$；当 $x=2$ 时，$t=1$.

因此$\int_1^2\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx=\int_0^1\frac{t^2+1}{\sqrt{t^2+1-1}}\cdot 2tdt=2\int_0^1(t^2+1)dt=2\times\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)\Big|_0^1=$
$2\times\left(\frac{1}{3}\times1+1\right)=2\frac{2}{3}.$

(9) 原式$=-\int_1^{+\infty}\arctan x\,d\frac{1}{x}$

$=-\frac{\arctan x}{x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx$

$=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}+\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx+\int_1^{+\infty}\frac{-x}{1+x^2}dx$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}+\frac{\pi}{4}+\ln x\Big|_1^{+\infty}-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}.$$

(10) 令$(x-1)^{\frac{2}{3}}=t$，则 $x=1-t^{\frac{3}{2}}$，于是 $\mathrm{d}x=-\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$，故

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\mathrm{d}x=\int_1^0-\frac{3}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}\Big|_1^0=3.$$

2. 当 k 为何值时，广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$收敛？当 k 为何值时，该广义积分发散？又当 k 为何值时，该广义积分取得最小值？

解 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\int\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^k}=\begin{cases}\ln\ln x+C, & k=1,\\ -\frac{1}{(k-1)\ln^{k-1}x}+C, & k\neq 1,\end{cases}$$

因此，当 $k\leqslant 1$ 时，反常积分发散；当 $k>1$ 时，反常积分收敛，此时

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}=\left[\frac{-1}{(k-1)\ln^{k-1}x}\right]\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}.$$

记 $f(k)=\frac{1}{(k-1)(\ln 2)^{k-1}}$，则

$$f'(k)=-\frac{1}{(k-1)^2(\ln 2)^{2k-2}}\cdot\left[(\ln 2)^{k-1}+(k-1)(\ln 2)^{k-1}\ln\ln 2\right]$$

$$=-\frac{1+(k-1)\ln\ln 2}{(k-1)^2(\ln 2)^{k-1}};$$

当 $f'(k)=0$ 时，得 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$.

当 $1<k<1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)<0$；当 $k>1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，$f'(k)>0$.

故 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 为函数 $f(k)$ 的最小值点，即当 $k=1-\frac{1}{\ln\ln 2}$ 时，反常积分取最小值.

总复习题五

1. 填空题：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$ ________.

(2) $\int_{-1}^{1}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=$ ________.

(3) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x (e^{t^2}-1)dt}{x^2}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 且已知 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续，则有 $a=$ ________.

(4) 若 $f(x)$ 为可导函数，且 $f(0)=0, f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x)dx}{x^2}=$ ________.

(5) 若 $x=x(t)$ 是由方程 $t-\int_1^{x+t} e^{-u^2}du=0$ 所确定的，则 $\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=$ ________.

解 (1) $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\arccos\left.\dfrac{1}{|x|}\right|_1^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}-0=\dfrac{\pi}{2}$.

(2)
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx&=\int_{-1}^{0}(-x+x)e^{x}dx+\int_0^1(x+x)e^{-x}dx\\&=2\int_0^1 xe^{-x}dx=-2\int_0^1 x\,de^{-x}=-2\left(x\cdot e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1 e^{-x}dx\right)\\&=-2\left(\frac{1}{e}-(-e^{-x})\Big|_0^1\right)=-2\left(\frac{2}{e}-1\right)\\&=2(1-2e^{-1}).\end{aligned}$$

(3) 因 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(e^{t^2}-1)dx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^{x^2}}{2}=\lim\limits_{x\to 0}xe^{x^2}=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，故

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(0)=0,$$

即 $a=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x)dx}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2}=1$.

(5) 令 $F(x,t)=t-\int_1^{x+t}e^{-u^2}du$，则

$$F'_x=-e^{-(x+t)^2}, F'_t=1-e^{-(x+t)^2}.$$

当 $t=0$ 时，$x=1$，故

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1-e^{-(x+t)^2}}{-e^{-(x+t)^2}}.$$

令
$$\begin{aligned}y=\frac{d[-e^{-(x+t)^2}]}{dt}&=-e^{-(x+t)^2}\left[2(t+x)+2(t-x)\frac{dx}{dt}\right]\\&=-2(t+x)e^{-(x+t)^2}+2(t-x)[1-e^{-(x+t)^2}]\\&=-4te^{-(x+t)^2}+2(t-x),\end{aligned}$$

则 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{y\cdot[-e^{-(x+t)^2}]-[1-e^{-(x+t)^2}]}{e^{-2(x+t)^2}}=\dfrac{-y}{e^{-2(x+t)^2}}=\dfrac{-4te^{-(x+t)^2}+2(t-x)}{e^{-2(x+t)^2}}$，

因此 $\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=\dfrac{-2}{e^{-2}}=2e^2$.

2. 选择题：

(1) 设 $I(x)=\int_x^2\sqrt{2+t^2}\,dt$，则 $I'(1)=($ $)$.

A. $-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}-\sqrt{6}$.

(2) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x}{x}dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{x}{\tan x}dx$，则( ).

A. $I_1>I_2>1$　　B. $1>I_1>I_2$　　C. $I_2>I_1>1$　　D. $1>I_2>I_1$

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则( ).

A. $F(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续

B. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在点 $x=0$ 处不可导

C. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$

D. $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

(4) 函数 $f(x)=\int_0^x(2\cos t+\cos 3t)dt$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处有( ).

A. 极小值　　B. 极大值

C. 不为极值　　D. 无法判断

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i}{n^2}e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}=($ $)$.

A. $e-1$　　B. $\dfrac{1}{2}(e-1)$

C. e^2　　D. e^{-2}

解　(1) 因 $I(x)=\int_x^2\sqrt{2+t^2}\,dt=\left\{\dfrac{t}{2}\sqrt{t^2+2}+\ln(t+\sqrt{t^2+2})\right\}\Big|_x^2$

$$=\sqrt{6}+\ln(2+\sqrt{6})-\frac{x}{2}\sqrt{x^2+2}-\ln(x+\sqrt{x^2+2}),$$

故 $I'(x)=-\sqrt{2+x^2}$，$I'(1)=-\sqrt{3}$. 选 A.

(2) 令 $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{x\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{\cos^2x\cdot x^2},$$

显然 $x-\sin x\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，则 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，因此 $f(x)$ 单调递增.

又因 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}$，所以 $I_1<f\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{\pi}{4}=1$.

又令 $g(x)=\frac{x}{\tan x}$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

因 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}<f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故 $I_1>I_2$. 选 B.

(3) $F(x)=\begin{cases}x, x>0,\\ 0, x=0,\\ -x, x<0,\end{cases}$ 故 $F(x)$ 连续，但在 $x=0$ 处不可导. 选 B.

(4) 因 $f(x)=2\sin t\Big|_0^x+\frac{1}{3}\sin 3t\Big|_0^x=2\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$，则

$$f'(x)=2\cos x+\cos 3x, f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

而 $f'(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，故 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处取极大值. 选 B.

(5) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n^2}}+\frac{2}{n^2}e^{\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\frac{n}{n^2}e^{\frac{n^2}{n^2}}\right)=\int_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1).$$

选 B.

3. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(2) $\int_0^1\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+1}dx$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a^2b^2}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx$；

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin 2x\,dx$；

(5) $\int_1^e(x\ln x)^2dx$；

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4 x\,dx$；

(7) $\int_0^1 x^n e^x\,dx$（n 为自然数）；

(8) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$；

(9) $\int_0^1 x\ln(1-x)dx$；

(10) $\int_{-2}^{2}\min\left\{\frac{1}{|x|},x^2\right\}dx$；

(11) 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^x}, & x<0,\\ \frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1)dx$；

(12) 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，求$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

解 (1) 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2}\sec^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}(1+\cos x)$$

$$=\left(x\tan \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan \frac{x}{2}\mathrm{d}x-\ln(1+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\left(2\ln\cos \frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\ln 2=\frac{\pi}{2}.$$

(2) 令$\sqrt[4]{x}=t$，则 $x=t^4$，$\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$，故

原式$=\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\cdot 4t^3\mathrm{d}t$

$$=4\int_0^1 \frac{t^4+t^2-t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=4\int_0^1 t^2\mathrm{d}t-4\int_0^1\mathrm{d}t+4\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{4t^3}{3}\Big|_0^1-4t\Big|_0^1+4\arctan t\Big|_0^1$$

$$=\pi-\frac{8}{3}.$$

(3) 原式$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2b^2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2+b^2\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2b^2}{b^2\tan^2 x+a^2}\mathrm{d}(\tan x)$

$$=a^2\cdot\frac{b}{a}\cdot\arctan\frac{\tan x\cdot b}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=ab\arctan\frac{b}{a}.$$

(4)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin 2x\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\cos 2x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\pi}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x}\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cdot\cos 2x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{2x}\cos 2x\mathrm{d}x,$$

联立两式得

$$\text{原式}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\pi}+1).$$

(5) 原式$=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x^3$

$$= \frac{1}{3}x^3\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e x^2 \ln x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}x^3 \cdot \ln x\Big|_1^e + \frac{2}{9}\cdot\int_1^e x^2 \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{2}{9}e^3 + \frac{2}{27}(e^3 - 1) = \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

(6) 原式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x - \sin^2 x\cos^2 x)\mathrm{d}x$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x - \frac{\sin 2x}{2}}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}}{2} - \frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4}.$$

(7) 因 $\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x = e^x x^n\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot n x^{n-1}\mathrm{d}x$,故设

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x,\ I_n = e - nI_{n-1},$$

从而

$$\begin{aligned} I_n = e - nI_{n-1} &= e - n\cdot[e - (n-1)I_{n-2}] \\ &= e - ne + n\cdot(n-1)\cdot[e - (n-2)I_{n-3}] \\ &= \cdots = en!\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^n\right] + (-1)^{n+1}\cdot n! I_1. \end{aligned}$$

而 $I_1 = \int_0^1 x e^x \mathrm{d}x = x e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - e^x\Big|_0^1 = 1$,故

原式 $= en!\left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \cdots + (-1)^n\right] + (-1)^{n+1}\cdot n!.$

(8) 原式 $= \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big|_1^{+\infty} - \arctan x\Big|_1^{+\infty} = 1 - \frac{\pi}{4}.$

(9) 原式 $= \frac{1}{2}x^2\ln(1-x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cdot \frac{-1}{1-x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(1-x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(1-x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}(-x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln(1-x)\Big|_0^1$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(-x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 = -\frac{3}{4}.$$

(10) 原式 $= 2\int_0^2 \min\left\{\frac{1}{|x|},\ x^2\right\}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x + 2\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 + 2\ln x\Big|_1^2 = \frac{2}{3} + 2\ln 2.$$

(11) 原式 $= \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$，令 $x = \ln t$，则

原式 $= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t + \ln(1+x)\Big|_0^1$

$$= \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t + \ln 2 = \ln t\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 - \ln(1+t)\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^1 + \ln 2$$

$$= 1 + \ln(1+\mathrm{e}^{-1}).$$

(12) 因 $\int_0^\pi f(x)(\pi - x)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x$，故

原式 $= \int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\pi - t}\cdot(\pi - t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \sin t\mathrm{d}t = -\cos t\Big|_0^\pi = 2.$

4. 证明：$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\mathrm{d}x \leqslant 2\mathrm{e}^2$.

证明 令 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}$，则

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1).$$

令 $f'(x) = 0$，则 $x = \frac{1}{2}$，故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上单调递增.

又因 $f(0) = 1$，$f(2) = \mathrm{e}^2$，$f\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$，故在 $[0,2]$ 上，$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^2$，因此

$$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \leqslant \int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x} \leqslant 2\mathrm{e}^2.$$

5. 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，试证：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^n f\left(\frac{i}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{n+1}}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + 2^n f\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + n^n f(1)\right] = 0.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且满足 $f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$. 证明存在点 $\xi \in (0,1)$ 使 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

证明 令 $g(x) = xf(x)$，则

$$g'(x) = xf'(x) + f(x).$$

因 $g(0) = 0$，$g(1) = f(1) = 2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)\mathrm{d}x$，故在 $(0,1)$ 上存在 ε 使得

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)\mathrm{d}x = g(\varepsilon)(\frac{1}{2}-0),$$

即 $g(\varepsilon) = g(1)$.

由罗尔定理知,在 $(0,1)$ 上必存在 ξ,使得

$$g'(\xi) = 0,$$

即 $\xi f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

7. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且不变号. 证明至少存在一点 $\xi \in [a,b]$,使下式成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　不妨设 $g(x) \geqslant 0$,则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M,最小值为 m,则 $mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$,因此

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b mg(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x = [M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x].$$

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$ 时,由上述不等式知 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,故结论成立.

当 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x > 0$ 时,有

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由闭区间上连续函数的性质知,存在 $\xi \in [a,b]$,使得

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x},$$

从而结论成立.

第六章

定积分的应用

习题 6-2

1. 求下列曲线所围成图形的面积：

(1) $x^2+3y^2=6y$ 与直线 $y=x$（两部分都要计算）；

(2) $y=x^2, y=(x-2)^2, y=0$；

(3) $y=2x, y=\frac{1}{2}x, y=\frac{1}{4}x+1$；

(4) $\sqrt{y}+\sqrt{x}=1$ 与两坐标轴.

解 (1) $x^2+3y^2=6y$ 可写成 $\frac{x^2}{3}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$ 的形式，即表示长轴为 $\sqrt{3}$，短轴为 1 的椭圆，如图 6-1 所示.

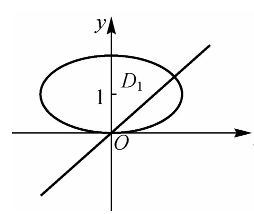


图 6-1

该椭圆的面积为

$$S=\pi\times\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}\pi.$$

解 $\begin{cases}x^2+3y^2=6y\\ x=y\end{cases}$ 得交点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，所以

$$D_1=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(1+\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}-x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{3}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$$

椭圆与直线左上部分所围面积为：$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi+\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$；

椭圆与直线右下部分所围面积为：$\frac{\sqrt{3}}{2}\pi-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{3}{4}$.

（2）根据题意，曲线所围图形如图 6-2 所示.

解$\begin{cases}y=x^2\\y=(x-2)^2\end{cases}$可得$\begin{cases}y=1,\\x=1,\end{cases}$因此曲线所围的阴影部分面积为

$$D=2\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{4}{3}.$$

（3）根据题意画出曲线图形如图 6-3 所示.

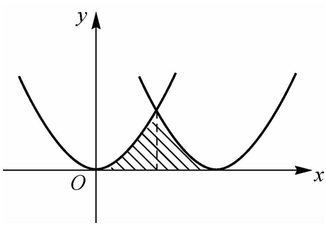


图 6-2

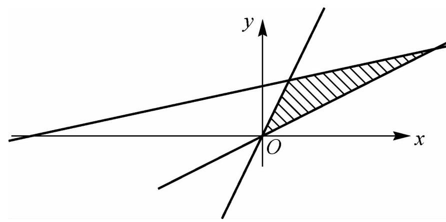


图 6-3

解$\begin{cases}y=2x,\\y=\frac{1}{4}x+1,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=\frac{4}{7},\\y=\frac{8}{7};\end{cases}$

解$\begin{cases}y=\frac{1}{4}x+1,\\y=\frac{1}{2}x,\end{cases}$可得$\begin{cases}x=4,\\y=2.\end{cases}$

因此直线所围的阴影部分的面积为

$$\begin{aligned}D&=\int_0^{\frac{4}{7}}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{4}{7}}^4\left(\frac{1}{4}x+1-\frac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{4}{7}}\frac{3}{2}x\mathrm{d}x+\int_{\frac{4}{7}}^4\left(1-\frac{1}{4}x\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{3}{4}x^2\Big|_0^{\frac{4}{7}}+\left(x-\frac{1}{8}x^2\right)\Big|_{\frac{4}{7}}^4=\frac{12}{7}.\end{aligned}$$

（4）当 $y=0$ 时，$x=1$，$y=(1-\sqrt{x})^2$，则所求图形面积为

$$D=\int_0^1(1-\sqrt{x})^2\mathrm{d}x=\int_0^1(1+x-2\sqrt{x})\mathrm{d}x=\left(x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

2.求下列图形的面积：

（1）$y=x^2-x+2$ 与通过坐标原点的两条切线所围成的图形；

（2）$y^2=2x$ 与点$\left(\frac{1}{2},1\right)$处的法线所围成的图形.

解 （1）由题意得 $y' = 2x - 1$.

解$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = 2x - 1, \\ y = x^2 - x + 2, \end{cases}$ 得两切点为$(\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2})$，$(-\sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$；

两条切线分别是

$$y = (2\sqrt{2} - 1)x, y = -(2\sqrt{2} + 1)x.$$

由上可得所求图形面积如图 6-4 中阴影部分所示，即为

$$D = \int_{-\sqrt{2}}^{0} [(x^2 - x + 2 + (2\sqrt{2} + 1)x] \mathrm{d}x + \int_{0}^{\sqrt{2}} [(x^2 - x + 2 - (2\sqrt{2} - 1)x)] \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{2\sqrt{2} + 1}{2}x^2\right]\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}x^2\right]\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

（2）$y^2 = 2x$ 两边对 x 求导可得 $2y \cdot y' = 2$，则

$$y'\Big|_{x=\frac{1}{2}, y=1} = \frac{2}{2 \times 1} = 1.$$

故 $y^2 = 2x$ 与点$\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$处的法线斜率为 -1，所得法线方程为

$$y = -x + \frac{3}{2}.$$

解$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = -x + \dfrac{3}{2} \end{cases}$得交点$\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$及$\left(\dfrac{9}{2}, -3\right)$，示意如图 6-5 所示.

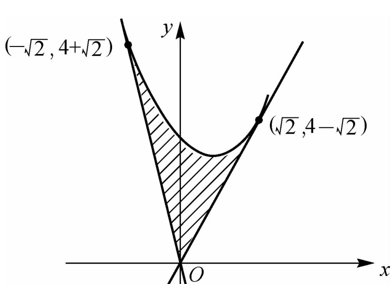


图 6-4

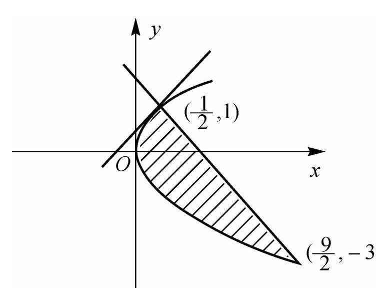


图 6-5

所求阴影部分的面积为

$$D = \int_{-3}^{1} \left(-y + \frac{3}{2} - \frac{y^2}{2}\right) \mathrm{d}y = \left(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y - \frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{16}{3}.$$

3. 求下列曲线所围成图形的面积：

(1) $r = 2a\cos\theta$；　　　　(2) $r^2 = a^2\cos\theta$.

解　(1) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(2a\cos\theta)^2 d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \pi a^2$.

(2) $A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}a^2\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}a^2 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = a^2 \cdot \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2$.

4. 求下列曲线所围成图形的面积：

(1) $\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 $y = 0$.

解　(1) 曲线为星形线，化简可得

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

显然其对 x 轴、y 轴均对称，故其面积 $S = 4\int_0^a y dx$. 而 $y = a\sin^3\theta$，因此

$$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3\theta \cdot a \cdot 3\cos^2\theta \cdot (-\sin\theta) d\theta$$

$$= -12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\sin^2\theta(1 - \cos^2\theta) d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

(2) 曲线可化简为 $x^2 + y^2 = a^2t^2$，其与 $y = 0$ 所围图形相对于 x 轴对称，故其面积为

$$S = 2\int_0^a y dx = 2\int_0^{\pi}(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = 2a^2 \cdot \left[(t - 2\sin t)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt\right]$$

$$= 3\pi a^2.$$

5. 计算下列各立体的体积：

(1) $y^2 = 4x$ 与 $x = 1$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(2) $x^2 + (y - 5)^2 \leqslant 16$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体；

(3) $y = \cos x\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转所得的旋转体；

(4) 摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 的一拱 $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕直线 $y = 2a$ 旋转所得的旋转体.

解　(1) 所求旋转体的体积为 $V = \int_0^1 \pi(\sqrt{4x})^2 dx = 2\pi$.

(2) 该旋转体为由曲线 $y=5+\sqrt{16-x^2}$，$x=-4$，$x=4$，$y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得立体减去由曲线 $y=5-\sqrt{16-x^2}$，$x=-4$，$x=4$，$y=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转所得的立体.

因此其体积为

$$V=\int_{-4}^{4}\pi(5+\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-4}^{4}\pi(5-\sqrt{16-x^2})^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-4}^{4}20\pi\sqrt{16-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}320\pi\cos^2 t\mathrm{d}t=640\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=160\pi^2.$$

(3) 绕 x 轴旋转时：

$$V=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi^2.$$

绕 y 轴旋转时：

$$V=\int_0^1\pi(\arccos y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\pi\cdot y(\arccos y)^2\Big|_0^1-2\pi\int_0^1 y\cdot\arccos y\left(\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=-2\pi\int_0^1\arccos y\mathrm{d}\sqrt{1-y^2}$$

$$=-2\pi\sqrt{1-y^2}\arccos y\Big|_0^1+2\pi\int_0^1\sqrt{1-y^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=(-2\pi)\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)-2\pi=\pi\cdot(\pi-2).$$

(4) 该立体可看作由曲线 $y=2a$，$y=0$，$x=0$，$x=2\pi a$ 所围成的图形绕 $y=2a$ 旋转所得的圆柱体减去由摆线 $y=2a$，$x=0$，$x=2a$ 所围成的立体.

记摆线上的点为 (x,y)，则所求体积为

$$V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi a}\pi(2a-y)^2\mathrm{d}x.$$

作换元 $x=a(t-\sin t)$，此时，$y=a(1-\cos t)$，故

$$V=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi[2a-a(1-\cos t)]^2a(12-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(1+\cos t-\cos^2 t-\cos^3 t)\mathrm{d}t$$

$$=8\pi^2a^3-4\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\mathrm{d}t=7\pi^2a^3.$$

6. 计算下列各弧长：

(1) $y=\ln x$ 相应于 $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$ 的一段弧；

(2) 半立方抛物线 $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$ 被抛物线 $y^2=\frac{x}{3}$ 截得的一段弧；

(3) 求抛物线 $y^2=2px$ 从顶点到这曲线上的一点 $M(x,y)$ 的弧长；

(4) 对数螺线 $r=e^{2\theta}$ 上 $\theta=0$ 到 $\theta=2\pi$ 的一段弧.

解　(1) 所求弧长为

$$S=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\left(\sqrt{x^2+1}+\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}$$

$$=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

(2) 解 $\begin{cases} y^2=\dfrac{2}{3}(x-1)^3 \\ y^2=\dfrac{x}{3}\end{cases}$ 得两交点为 $\left(2,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right),\left(2,-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

由于曲线关于 x 轴对称，因此所求弧长为第一象限部分的2倍. 第一象限部分弧度为 $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}(x-1)^3}(1\leqslant x\leqslant 2)$，$y'=\sqrt{\dfrac{3}{2}(x-1)}$，故所求弧的长度为

$$S=2\int_1^2\sqrt{1+\frac{3}{2}(x-1)}\mathrm{d}x=6\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2\Bigg|_1^2=\frac{8}{9}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$

(3) 不妨设 $P>0$，由于从顶点到 (x,y) 的弧长与顶点到 $(x,-y)$ 的弧长相等，因此不妨设 $y>0$，故所求弧长为

$$S=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y=\int_0^y\sqrt{1+\left(\frac{y}{p}\right)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{p}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p^2\ln(y+\sqrt{p^2+y^2})\right]\Bigg|_0^y$$

$$=\frac{1}{2p}y\sqrt{p^2+y^2}+\frac{1}{2}p\ln\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}.$$

(4) 所求弧长为 $S=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot e^{2\theta}\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sqrt{5}}{2}(e^{4\pi}-1)$.

习题 6-3

1. 今有一细棒，长度为 10 m，已知距左端点处 x(m) 的线密度是 $\rho(x)=6+0.3x$(kg/m)，求这个细棒的质量.

解　$m=\displaystyle\int_0^{10}(6+0.3x)\mathrm{d}x=(6x+0.15x^2)\Big|_0^{10}=75(\mathrm{kg})$.

2. 某质点做直线运动，速度为 $V=t^2+\sin 3t$，求质点在时间间隔内 T 所经过的路程.

解 $S=\int_0^T(t^2+\sin 3t)\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{3}\cos 3t\right)\Big|_0^T=\frac{1}{3}(T^3-\cos 3T+1).$

3. 一物体按规律 $x=ct^3$ 做直线运动，媒质的阻力与速度的平方成正比，计算物体由 $x=0$ 移至 $x=a$ 时，克服媒体阻力所做的功.

解 速度为 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3ct^2$，阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$，$\mathrm{d}W=R\mathrm{d}x=27kc^3t^6\mathrm{d}t.$

设当 $t=T$ 时，$x=a$，得 $T=\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$，故

$$W=\int_0^T 27kc^3t^6\mathrm{d}t=\frac{27}{7}kc^3T^7=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

4. 一半径为 3 m 的球形水箱内有一半容量的水，现将水抽到水箱顶端上方 7 m 高处，问需要做多少功？

解 设球心为原点，垂直向下的方向为 x 轴，则在距球心为 x 的平面上球截面半径为 $\sqrt{9-x^2}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}W&=\mathrm{d}m\cdot g\cdot(x+3+7)=(x+10)\cdot g\cdot\rho\pi r^2\cdot\mathrm{d}x\\&=(x+10)g\cdot\rho\cdot\pi(9-x^2)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故 $W=\int_0^3(x+10)\cdot g\cdot\rho\pi(9-x^2)\mathrm{d}x=g\cdot\rho\pi\cdot\int_0^3(9x+90-x^3-10x^2)\mathrm{d}x$

$$=g\rho\pi\left(\frac{9}{2}x^2+90x-\frac{1}{4}x^3-\frac{10}{3}x^3\right)\Big|_0^3$$

$$=g\pi\cdot\frac{801}{4}\times 10^3(\mathrm{J})=\frac{801}{4}\pi g(\mathrm{kJ}).$$

5. 有一均匀细杆 AB，长为 l，质量为 M，另有一质量为 m 的质点 C，位于过点 A 且垂直于细杆的直线上，$AC=h$，试计算细杆对质点的引力.

解 如图 6-6 所示设立坐标系，取 x 轴为积分变量，则 x 的变化范围为 $[0,l]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 与质点 C 的引力 F 大小的近似值为

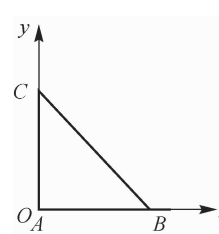


图 6-6

$$\mathrm{d}F=k\frac{m\cdot\frac{M}{l}\mathrm{d}x}{r^2},$$

其中 $r=\sqrt{h^2+x^2}$.

把该力分解到 x 轴，y 轴方向，则有

$$\mathrm{d}F_x=\frac{x}{r}\mathrm{d}F=\frac{km\cdot\frac{M}{l}\cdot x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{d}F_y = -\frac{h}{r}\mathrm{d}F = -\frac{km \cdot \frac{M}{l} \cdot h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$F_x = \int_0^l \frac{km \cdot \frac{M}{l} \cdot x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \left[-k\frac{m\frac{M}{l}}{(h^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right]\Bigg|_0^l = \frac{kMm}{l}\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{\sqrt{h^2+l^2}}\right),$$

$$F_y = \int_0^l -\frac{km \cdot \frac{M}{l} \cdot h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{x=h\tan t} \int_0^{\arctan\frac{l}{h}} -k\frac{Mm}{hl}\cos t\mathrm{d}t = -\frac{kMm}{h\sqrt{l^2+h^2}}.$$

6. 有一半径为 R 的均匀半圆弧，质量为 M，求它对位于圆心处单位质量的质点的引力.

解　由题画示意图如图 6-7 所示.

根据对称性可知，竖直方向引力分量为 0，水平方向引力分量为

$$F_x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{k \cdot 1 \cdot \frac{M}{\pi R} \cdot R\mathrm{d}\theta}{R^2} = \frac{kM}{\pi R^2} \cdot \sin\theta\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2kM}{\pi R^2}.$$

7. 有一等腰梯形闸门，它的两条底边各长 10 m 和 6 m，高为 20 m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.

解　如图 6-8 所示建立坐标系，则过 A、B 两点的直线方程为 $y=10x-50$，取 y 为积分变量，变化范围为 $[-20,0]$，对应小区间 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的面积近似值为 $2x\mathrm{d}y=\left(\frac{y}{5}+10\right)\mathrm{d}y$. ρ 表示水的密度，则水的压力为

$$P = \int_{-20}^{0}\left(\frac{y}{5}+10\right)(-y)\rho g\,\mathrm{d}y = 1.4373\times 10^7(\mathrm{N}).$$

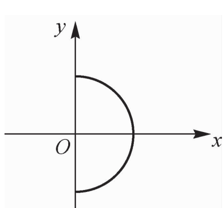


图 6-7

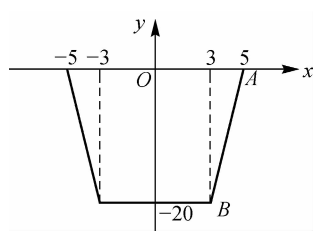


图 6-8

8. 一底为 8 cm，高为 6 cm 的等腰三角形片，垂直地沉没在水中，顶在上，底在下且与水面平行，而顶离水面 3 cm，试求它每面所受的压力.

解　如图 6-9 所示建立坐标系，取三角形顶点为原点，取积分变量为 π，变化范围为 $[0,0.06]$，易知 B 坐标为 $(0.06,0.04)$，则 OB 方程为 $y=\frac{2}{3}x$，对应小区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的面积近似为

$$\mathrm{d}S = 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x\mathrm{d}x.$$

记 ρ 为水的密度,则在 x 处水的压强为

$$P = \rho g(x + 0.03) = 1000g(x + 0.03),$$

故压力为

$$F = \int_0^{0.06} 1000g(x + 0.03) \cdot \frac{4}{3}x\mathrm{d}x = 0.168g \approx 1.65(\mathrm{N}).$$

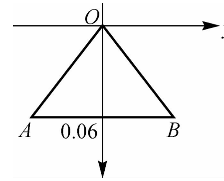


图 6-9

* 习题 6-4

1. 某产品边际成本函数 $C'(x) = x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ 000}$,已知 10 000 件产品的总成本是 1 200 百元,求总成本函数 $C(x)$.

解 $C(x) = \int_0^x C'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(t^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ 000}\right)\mathrm{d}t = \left(2t^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ 000}t\right)\Big|_0^x + C$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ 000}x + C,$$

由 $C(10\ 000) = 2 \times 10\ 000^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\ 000} \times 10\ 000 + C = 205 + C = 1\ 200$ 得

$$C = 995.$$

故总成本函数为 $C(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2\ 000} + 995.$

2. 已知生产某产品 q 个单位时的边际收益为 $R'(q) = 100 - 2q$(元/单位),求生产 40 个单位时的总收益,并求再增加 10 个单位时所增加的总收益.

解 $R(40) = \int_0^{40} R'(q)\mathrm{d}q = \int_0^{40} (100 - 2q)\mathrm{d}q = (100q - q^2)\Big|_0^{40} = 2\ 400(元)$,

$$R(50) - R(40) = \int_0^{50} R'(q)\mathrm{d}q - 2\ 400 = (100q - q^2)\Big|_0^{50} - 2\ 400$$

$$= 100(元).$$

即再增加 10 个单位时所增加的总收益为 100 元.

3. 某企业生产某种产品 q 个单位时,边际收益和边际成本分别为 $R'(q) = 20 - 3q$,$C'(q) = 10 + 2q$,$C(0) = 2$. 求产量为多少时,利润最大?最大利润是多少?

解 $R(x) = \int_0^x R'(q)\mathrm{d}q = \int_0^x (20 - 3q)\mathrm{d}q = \left(20q - \frac{3}{2}q^2\right)\Big|_0^x = 20x - \frac{3}{2}x^2$,

$$C(x) = C(0) + \int_0^x C'(q)\mathrm{d}q = 2 + \int_0^x (10 + 2q)\mathrm{d}q$$

$$= 2 + (10q + q^2)\Big|_0^x = x^2 + 10x + 2,$$

$$L(x)=R(x)-C(x)=-\frac{5}{2}x^2+10x-2,$$

$$L'(x)=-5x+10.$$

令 $L'(x)=0$ 得唯一驻点 $x=2$. 而利润必然存在最大值，所以，产量为 2 个单位时，利润最大，即为

$$L(2)=-\frac{5}{2}\times 2^2+10\times 2-2=8.$$

4. 已知生产某产品的边际成本函数为 $C'(x)=1$(万元 / 百台)，边际收益函数为 $R'(x)=5-x$(万元 / 百台).

(1) 求产量等于多少时，总利润最大？

(2) 达到利润最大的产量后又生产了 1(百台)，总利润减少了多少？

解　(1)$R(x)=\int_0^x R'(q)\mathrm{d}q=\int_0^x(5-q)\mathrm{d}q=\left(5q-\frac{1}{2}q^2\right)\Big|_0^x=5x-\frac{1}{2}x^2,$

$$C(x)=C(0)+\int_0^x C'(q)\mathrm{d}q=C(0)+\int_0^x\mathrm{d}q=x+C(0),$$

$$L(x)=R(x)-C(x)=4x-\frac{1}{2}x^2-C(0),$$

$$L'(x)=4-x.$$

令 $L'(x)=0$，可得唯一驻点 $x=4$. 故产量为 4 百台时，总利润最大.

(2)$L(4)=4\times 4-\frac{1}{2}\times 4^2-C(0)=8-C(0),$

$L(5)=4\times 5-\frac{1}{2}\times 5^2-C(0)=7.5-C(0),$

$L(4)-L(5)=0.5$ 万元.

即总利润减少了 0.5 万元.

5. 若需求曲线 $P=50-0.02Q^2$，其中 P 是商品的价格，Q 是市场上的需求量，并已知需求量为 20 个单位，试求消费者剩余.

解　根据题意，当 $Q=20$ 时得 $P=42$，则消费者剩余为

$$\int_0^{20}(50-0.02Q^2)\mathrm{d}Q-42\times 20=\left(50Q-\frac{1}{3}\times 0.02Q^3\right)\Big|_0^{20}-840\approx 106.7.$$

总复习题六

1. 填空题：

(1) 曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ 与坐标轴所围图形的面积为________.

(2) 闭曲线 $x^2+y^2-2x=a^2-x^2(a>0)$ 所围图形的面积为________.

(3) 闭曲线 $r^2 = \sin 2\theta$ 所围图形的面积为________.

(4) 由 $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} = 1, y = \pm 2$ 所围成的区域绕 y 轴旋转一周所形成立体的体积为________.

(5) 连续曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin t}\mathrm{d}t$ 的弧长为________.

解 (1) $S = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \mathrm{d}\sqrt{x} = 2(-e^{-\sqrt{x}})\Big|_0^{+\infty} = 2.$

(2) 曲线可化简为 $y^2 - 2x + 2x^2 = a^2$，即

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = a^2 + \frac{1}{2},$$

曲线表示的是椭圆.

令 $x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} r\cos\theta, y = r\sin\theta, r = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{2}}$，则所求面积为

$$\begin{aligned}&4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}}\cos\theta\right) \cdot \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}} \cdot \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ &= 4 \cdot \left[\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}} \cdot \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta\right] \\ &= \pi a^2.\end{aligned}$$

(3) $r^2 = \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则曲线为

$$x^2 + y^2 = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

显然其关于 x 轴、y 轴均对称，故所求面积为

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta \cdot r\cos\theta \mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta \mathrm{d}\theta = 2.$$

(4) 根据题意，曲线所围成的图形如图 6-10 所示，故其绕 y 轴旋转一周得体积为

$$V = \pi\int_{-2}^{2} 3\left(1 + \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = 16\pi.$$

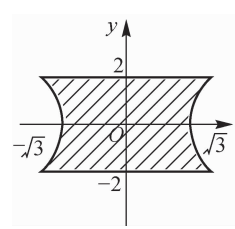


图 6-10

(5) 根据题意，$y' = \sqrt{\sin x}$，则 $0 \leqslant x \leqslant \pi$，故所求弧长为

$$S = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x}\mathrm{d}x = 4.$$

2. 选择题：

(1) 曲线 $y = x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围图形的面积可表示为(　　).

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

B. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

C. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

D. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(2) 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与该曲线过原点的切线及 y 轴所围图形的面积为(　　).

A. $\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^{\mathrm{e}}(\ln y-y\ln y)\mathrm{d}y$

C. $\int_1^{\mathrm{e}}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1(\ln y-y\ln y)\mathrm{d}y$

(3) 由曲线 $y=\sqrt{x}$, $x+y=2$, $x+3y=0$ 所围图形的面积为(　　).

A. $\int_0^3(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x)\mathrm{d}x$

B. $\int_{-1}^1[(2-y)-y^2]\mathrm{d}y$

C. $\int_0^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^1[(2-y)-y^2]\mathrm{d}y$

D. $\int_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)\mathrm{d}x+\int_1^3\left[(2-x)+\frac{1}{3}x\right]\mathrm{d}x$

(4) 曲线 $y=\cos x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所形成立体的体积为(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{\pi^2}{2}$　　D. π^2

(5) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)<f(x)<m$，其中 m 为常数，则曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$ 所围的图形绕直线 $y=m$ 旋转一周所形成立体的体积为(　　).

A. $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

B. $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

C. $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

D. $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$

解　(1) 当 $0<x<1$ 时，$y<0$；当 $x<0$ 时 $y>0$；当 $1<x<2$ 时，$y>0$；当 $x>2$ 时 $y<0$.

故所求面积为 $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

选 C.

(2) 因 $y=e^x$,故过(x_0,y_0)的切线为

$$y-y_0=e^{x_0}(x-x_0).$$

因为切线过原点,故 $y_0=x_0e^{x_0}$.

又因 $y_0=e^{x_0}$,所以 $x_0=1$,即切点为$(1,e)$,则切线为 $y-e=e(x-1)$.

因此所围图形的面积为

$$\int_0^1[e^x-e(x-1)-e]\,dx=\int_0^1(e^x-ex)\,dx.$$

选 A.

(3) 根据题意,图形如图 6-11 所示,故所围面积为

$$\int_0^1\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}x\right)dx+\int_1^3\left[(2-x)+\frac{1}{3}x\right]dx.$$

选 D.

(4) 根据题意,所求体积为

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\cdot\pi+0=\frac{\pi^2}{2}.$$

选 C.

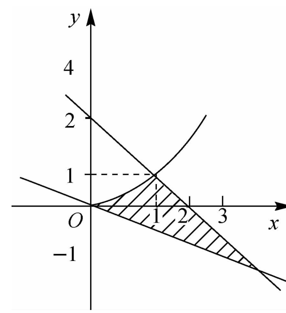


图 6-11

(5) 由于 $g(x)<f(x)<m$,故图形绕 $y=m$ 旋转时,旋转线的长度应为

$$m-f(x)+m-g(x)=2m-f(x)-g(x),$$

则所求旋转体的体积为

$$\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\,dx.$$

选 B.

3. 求曲线 $y=\cos x$,$y=\sin x$ 在 $x=0$ 与 $x=\pi$ 之间所围成的图形的面积.

解 根据题意,画图形如图 6-12 所示,两曲线交点为$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

故所围图形面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx\\&=-\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}+\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

4. 求曲线 $y=x^3$,$y=2x$ 所围成的图形的面积.

解　根据题意，画图形如图 6-13 所示，所围面积为

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\mathrm{d}x=2x^2\Big|_0^{\sqrt{2}}-\frac{x^4}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=2.$$

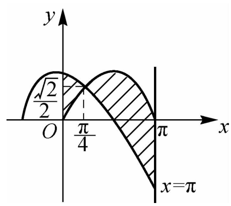


图 6-12

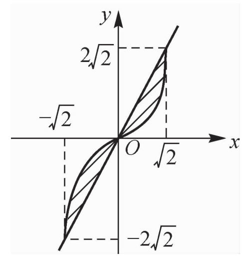


图 6-13

5. 求曲线 $y=x^2$，$y=2x$，$y=x$ 所围成的图形的面积.

解　根据题意，画图形如图 6-14 所示，所围面积为

$$S=\int_0^1(2x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{7}{6}.$$

6. 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 将圆 $x^2+y^2\leqslant 8$ 分割成两部分，求这两部分的面积.

解　$y=\frac{1}{2}x^2$ 与圆交点为$(\pm 2,2)$，可画图形如图 6-15 所示.

故图中上半部分面积为

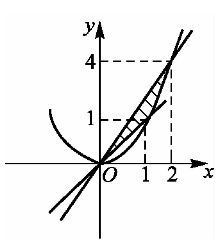


图 6-14

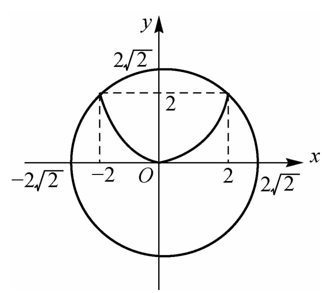


图 6-15

$$S_1=2\int_0^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi+\frac{4}{3},$$

下半部分面积为

$$S_2=\pi\cdot(2\sqrt{2})^2-S_1=6\pi-\frac{4}{3}.$$

7. 求由双曲线 $r^2\cos 2\theta=1$ 与 $\theta=0$ 及 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 所围成的图形的面积.

解 根据题意,所围图形面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{3}).$$

8. 求由双扭线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 与圆周 $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$ 公共部分的面积.

解 根据题意,两曲线的交点满足

$$x^2-y^2=\frac{1}{4},x^2+y^2=\frac{1}{2},$$

故 $x^2=\dfrac{3}{8},y^2=\dfrac{1}{8}$.

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则可得 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

故在两曲线的交点处有 $\theta=\pm\dfrac{\pi}{6}$,因此所求公共部分面积为

$$4\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta\right]=4\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}.$$

9. 求由抛物线 $y=x^2,y=2-x^2$ 及 $x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所形成立体的体积.

解 $y=x^2,y=2-x^2$ 与 $x=0$ 所围图形如图 6-16 所示.

所求体积为

$$V=\pi\cdot 2\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x+\pi\cdot 2\int_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

$$=2\pi-\frac{1}{5}+2\pi\cdot\left[4\sqrt{2}-4-\frac{4}{3}(2\sqrt{2}-1)+\frac{\sqrt{2}-1}{5}\right]$$

$$=\frac{16}{3}\pi.$$

10. 求由曲线 $xy=1$,直线 $x=1,x=2$ 及 x 轴所围成的图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

解 根据题意,画出图形如图 6-17 所示,则所求旋转体的体积为

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^1\left[\left(\frac{1}{y}\right)^2-1\right]\mathrm{d}y+\pi\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}(2^2-1)\,\mathrm{d}y=2\pi.$$

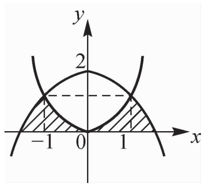


图 6-16

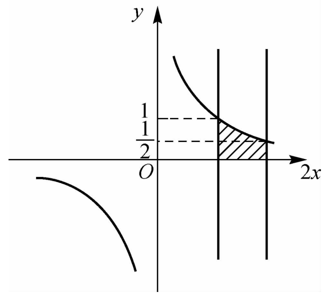


图 6-17

11. 求由直线 $x=\frac{1}{2}$ 与抛物线 $y^2=2x$ 所围成的图形绕直线 $y=1$ 旋转而成的旋转体的体积.

解 根据题意,旋转体的体积相当于由 $x=\frac{1}{2}$ 和 $(y+1)^2=2x$ 围成的图形绕 x 轴旋转所得的体积,即

$$V=\pi\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2x}-1)^2\mathrm{d}x=\pi\left(x-\sqrt{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\pi.$$

12. 求曲线 $x=\arctan t, y=\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ 自 $t=0$ 到 $t=1$ 的一段弧长.

解 所求弧长为

$$\begin{aligned}S&=\int_0^1\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\sqrt{\frac{1}{1+t^2}}\mathrm{d}t\\&=\ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

13. 求极坐标下曲线 $\theta=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)(1\leqslant r\leqslant 3)$ 的弧长.

解 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$,则 $x'_r=\cos\theta-r\theta'_r\sin\theta, y'_r=\sin\theta+r\theta'_r\cos\theta$. 由弧长公式得

$$\begin{aligned}S&=\int_1^3\sqrt{(x'_r)^2+(y'_r)^2}\mathrm{d}r=\int_1^3\sqrt{1+r^2(\theta'_r)^2}\mathrm{d}r\\&=\int_1^3\sqrt{1+r^2\times\frac{1}{4}(1-\frac{1}{r^2})^2}\mathrm{d}r\\&=\int_1^3\frac{\sqrt{(r^2+1)^2}}{2r}\mathrm{d}r\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 (r + \frac{1}{r}) \mathrm{d}r = 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

14. 半径为 R 的半球形水池，里面充满了水，问将池中的水全部吸出，需要做多少功？

解　取 x 轴的正向为铅直向下，球心为原点，取 x 为积分变量，则 x 变化范围为 $[0,R]$，区间 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 的薄片体积为

$$\mathrm{d}V = \pi(\sqrt{R^2 - x^2})^2 \mathrm{d}x = \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x.$$

要将水吸出，水的移动距离为 x，故所做的功为

$$W = \int_0^R g\pi(R^2 - x^2) \cdot x\mathrm{d}x = g\pi R^2 \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^R - g\pi \cdot \frac{x^4}{4}\bigg|_0^R = \frac{1}{4}g\pi R^4.$$

15. 质量为 1 kg 的壳形容器，装水后的初始质量为 20 kg，设水以 $\frac{1}{2}$ kg/s 的速率从容器中流出，问以 2 m/s 的速率从地面铅直上举此容器到距地面 10 m 高要做多少功？

解　根据题意，取时间 t 轴为 x 轴，且 $0 \leqslant t \leqslant 5$.

t 时刻容器的质量为 $m = 20 - \frac{1}{2}t$，t 时刻容器距地面的高度为 $2t$，故满足题意需做的功为

$$W = \int_0^5 \left(20 - \frac{1}{2}t\right) \cdot 2 \cdot g\mathrm{d}t = 40gt\bigg|_0^5 - \frac{t^2}{2}g\bigg|_0^5 = 187.5g.$$

16. 薄板形状为椭圆形，其轴为 $2a$ 和 $2b(a > b)$，此薄板的一半竖直沉入水中，而其短轴与水的表面相齐，计算水对此薄板一侧的压力.

解　根据题意，取椭圆薄板的长轴为 x 轴，则 $x \in [0,2a]$，然后对 x 进行积分，在区间 $[x,\mathrm{d}x + x]$ 内的薄板面积为

$$\mathrm{d}S = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x.$$

因此，薄板一侧水的压力为

$$F = \int_0^{2a} 4b\sqrt{1 - \frac{x^2}{4a^2}} \cdot x\mathrm{d}x = -\frac{b}{a} \cdot \int_0^{2a} \sqrt{4a^2 - x^2} \cdot \mathrm{d}(4a^2 - x^2)$$

$$= -\frac{b}{a} \cdot (4a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}\bigg|_0^{2a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8a^3 = \frac{16}{3}a^2 b.$$

*17. 已知某产品的边际成本为 $C'(x) = 4 + \frac{x}{4}$（万元 / 百台），边际收益为 $R'(x) = 8 - x$. 求：

(1) 产量由 1 百台增加到 5 百台时，总成本与总收益的增量；

(2) 产量为多少时，利润最大；

(3) 若固定成本为 1 万元，总成本函数与利润函数；

(4) 总利润最大时的总成本、收益与利润.

解 (1) 总成本的增量为

$$C(5)-C(1)=\int_1^5 C'(x)\mathrm{d}x=\int_1^5\left(4+\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x=4x\Big|_1^5+\frac{x^2}{8}\Big|_1^5=19\text{ 万元}.$$

总收益的增量为

$$R(5)-R(1)=\int_1^5 R'(x)\mathrm{d}=\int_1^5(8-x)\mathrm{d}x=8x\Big|_1^5-\frac{x^2}{2}\Big|_1^5=20\text{ 万元}.$$

(2) 设总利润函数为 $L(x)$，则

$$L'(x)=R'(x)-C'(x)=8-x-4-\frac{x}{4}.$$

令 $L'(x)=0$，可得 $x=\frac{16}{5}=3.2$ 是唯一驻点.

故产量为 3.2 万台时利润最大.

(3) 由题可得总成本函数为 $C(x)=\int_0^x\left(4+\frac{t}{4}\right)\mathrm{d}t+C(0)=4x+\frac{1}{8}x^2+1$，边际收益函数为 $R(x)=8x-\frac{x^2}{2}$，故利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=4x-\frac{5}{8}x^2-1.$$

(4) 产量为 3.2 万台时总利润最大，故总成本为

$$C(3.2)=12.8+\frac{1}{8}\times 3.2^2+1=15.08\text{ 万元}.$$

收益为

$$R(3.2)=8\times 3.2-\frac{3.2^2}{2}=20.48\text{ 万元}.$$

利润为

$$L(3.2)=4\times 3.2-\frac{5}{8}\times 3.2^2-1=5.4\text{ 万元}.$$

第七章

微 分 方 程

习题 7-1

1. 指出下列各微分方程的阶数：

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2xt+t^2-1$；　　(2) $x^2y''-xy'+y=0$；

(3) $y'^2-y=0$；　　(4) $x\dfrac{d^2x}{dt^2}+\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=1$；

(5) $3y^{(4)}+7y'''+6y'-xy=0$；　(6) $xy'''+2y''+x^2y=0$.

解　(1) 一阶.　(2) 二阶.　(3) 一阶.　(4) 二阶.　(5) 四阶.　(6) 三阶.

2. 验证下列所给函数是已知微分方程的解，并说明是通解还是特解：

(1) $y=C-\ln^2x$，$2\ln x dx+xdy=0$；

(2) $y=x+\dfrac{1}{2}x^2$，$y''-\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{2y}{x^2}=0$；

(3) $y=(C_1+C_2x)e^x+\dfrac{1}{2}x^2e^x$，$y''-2y'+y=e^x$.

解　(1) 由 $y=C-\ln^2x$ 得

$$\frac{dy}{dx}=-2\ln x\cdot\frac{1}{x},$$

即 $2\ln xdx+xdy=0$，故 $y=C-\ln^2x$ 是 $2\ln xdx+xdy=0$ 的解，并且是通解.

(2) 由 $y=x+\dfrac{1}{2}x^2$ 得

$$y'=1+x, y''=1.$$

于是

$$y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2y}{x^2}=1-\frac{2(1+x)}{x}+\frac{2\left(x+\frac{1}{2}x^2\right)}{x^2}$$

$$=1-\frac{2}{x}-2+\frac{2}{x}+1=0,$$

故 $y=x+\frac{1}{2}x^2$ 是 $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2y}{x^2}=0$ 的解，并且是特解.

(3) 由 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$ 得

$$y'=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x,$$

$$y''=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$$

$$=\mathrm{e}^x\left(C_1+2C_2+1+C_2x+2x+\frac{1}{2}x^2\right).$$

于是

$$y''-2y'+y=\mathrm{e}^x(C_1+2C_2+1+C_2x+2x+\frac{1}{2}x^2-2C_1-2C_2-2C_2x-2x-x^2)+\mathrm{e}^x\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=\mathrm{e}^x,$$

故 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x$ 是 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$ 的解，并且是通解.

3. 验证：$y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 是方程 $xy'=y+x\sin x$ 的解.

证明 由 $y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 得

$$y'=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+x\cdot\frac{\sin x}{x}=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\sin x.$$

于是

$$xy'=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+x\sin x=y+x\sin x,$$

故 $y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 是 $xy'=y+x\sin x$ 的解.

4. 验证：$y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$ 是方程 $4y''+4y'+y=0$ 的通解，并求满足初始条件 $y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$ 的特解.

证明 由 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$ 得

$$y'=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)+C_2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},$$

$$y''=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)-\frac{C_2}{2}e^{-\frac{x}{2}}-\frac{C_2}{2}e^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)-C_2e^{-\frac{x}{2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}4y''+4y'+y&=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x-4C_2)+e^{-\frac{x}{2}}(-2C_1-2C_2x+4C_2)+e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)\\&=0,\end{aligned}$$

故 $y=e^{-\frac{x}{2}}(C_1+C_2x)$ 是 $4y''+4y'+y=0$ 的通解.

当 $x=0$ 时,则 $y=C_1=2$;当 $x=0$ 时,则 $y'=-\frac{1}{2}C_1+C_2=0$.

故 $C_1=2,C_2=1$,则满足条件的特解为 $y=e^{-\frac{x}{2}}(2+x)$.

5. 验证:$y=2(\cos 2x-\sin 3x)$ 是方程 $y''+4y=10\sin 3x$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=-6$ 的特解.

解　由 $y=2(\cos2x-\sin3x)$ 得

$$y'=-4\sin2x-6\cos3x,y''=-8\cos2x+18\sin3x,$$

故 $y''+4y=-8\cos2x+18\sin3x+8\cos2x-8\sin3x=10\sin3x$.

当 $x=0$ 时,$y=2\cdot(1-0)=2$;当 $x=0$ 时,$y'=-4\cdot0-6\cdot1=-6$.

故原题得证.

6. 写出由下列条件确定的曲线所满足的微分方程:

(1) 一曲线过点(1,3),它在点(x,y)处的切线的斜率等于该点的横坐标的2倍;

(2) 一曲线过点(1,3),它在两坐标轴间的任一切线段均被切点所平分.

解　(1) 设曲线方程为 $y=y(x)$,则由题意知

$$y(1)=3,y'=2x.$$

故曲线满足的微分方程为 $\begin{cases}y'=2x,\\y(1)=3.\end{cases}$

(2) 设曲线方程为 $y=y(x)$,由题意知

$$y(1)=3,y'=-\frac{2y}{2x}=-\frac{y}{x},$$

故曲线满足的微分方程为 $\begin{cases}y(1)=3,\\y'=-\frac{y}{x}.\end{cases}$

习题 7-2

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$;　　　(2) $y\ln x\mathrm{d}x+x\ln y\mathrm{d}y=0$;

(3) $3xy' = 2y - xy\cos x$；　　(4) $y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$；

(5) $x(y^2-1)\mathrm{d}x + y(x^2-1)\mathrm{d}y = 0$；(6) $3\mathrm{e}^x \tan y\mathrm{d}x + (2-\mathrm{e}^x)\sec^2 y\mathrm{d}y = 0$；

(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{y-x}$；　　(8) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(\ln y - \ln x)$；

(9) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\ln\dfrac{y}{x}$；　　(10) $y^2 + x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　(1) 原方程可化为 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\ln y = 0$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$，则

$$\ln|\ln y| = \ln|x| + \ln C_1 = \ln|C_1 x|\ (C_1 > 0),$$

即 $\ln y = \pm C_1 x$.

故微分方程的通解为 $\ln y = Cx$，即 $y = \mathrm{e}^{Cx}$.

(2) 原微分方程分离变量为

$$\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y = -\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分得 $\displaystyle\int\frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y = -\int\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$，则

$$\frac{1}{2}\ln^2 y = -\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1,$$

故所求通解为 $\ln^2 y + \ln^2 x = C$.

(3) 原方程为 $3x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y - xy\cos x$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2 - x\cos x}{3x}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int\frac{2 - x\cos x}{3x}\mathrm{d}x,$$

即通解为 $\ln|y| = \dfrac{2}{3}\ln|x| - \dfrac{1}{3}\sin x + C_1$.

(4) 原方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

两端积分得

$$\arcsin y = \arcsin x + C,$$

即为原方程的通解.

(5) 将原微分方程分离变量得

$$\frac{y}{y^2-1}\mathrm{d}y = -\frac{x}{x^2-1}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = -\frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C_1,$$

即 $y^2 - 1 = \dfrac{C}{x^2-1}$.

故原微分方程的通解为 $(x^2-1)(y^2-1) = C$.

(6) 将原微分方程分离变量得

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}\mathrm{d}y = \frac{3\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-2}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$\ln|\tan y| = 3\ln|\mathrm{e}^x - 2| + C_1,$$

即 $\tan y = C(\mathrm{e}^x - 2)^3$,为原微分方程的通解.

(7) 令 $u = \dfrac{x}{y}$,即 $x = uy$,则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}.$$

原方程可化为

$$u + y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 1 - u,$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}u}{1-2u} = \frac{\mathrm{d}y}{y},$$

两端积分得

$$-\frac{1}{2}\ln|1-2u| = \ln|y| + C_1.$$

将 $u = \dfrac{x}{y}$ 代入并整理得 $2xy - y^2 = C$,即为原微分方程的通解.

(8) 令 $u = \dfrac{y}{x}$,即 $y = ux$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入原方程得

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln u,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(u\ln u-u)}\mathrm{d}u,$$

两端积分得

$$\ln x=\ln(\ln u-1)+C_1.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入并整理得 $Cx+1=\ln y-\ln x$,即为原微分方程的通解.

(9) 令 $u=\dfrac{y}{x}$,即 $y=ux$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入原方程得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\ln u,$$

分离变量得

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{u(\ln u-1)}\mathrm{d}u,$$

两端积分得

$$\ln|x|=\ln|\ln u-1|+C_1,$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入并整理得 $Cx+1=\ln\dfrac{y}{x}$,即为原微分方程的通解.

(10) 令 $u=\dfrac{y}{x}$,则 $y=ux$,$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,代入原方程得

$$u^2+u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u\left(u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right),$$

分离变量得

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

两端积分得

$$u-\ln|u|=\ln|x|+C_1.$$

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得 $y=Ce^{\frac{y}{x}}$,即为原微分方程的通解.

2. 求下列微分方程满足初始条件的通解:

(1) $(1+e^x)yy'=e^x$,$y|_{x=1}=1$;

(2) $\dfrac{x}{1+y}\mathrm{d}x-\dfrac{y}{1+x}\mathrm{d}y=0$,$y|_{x=0}=1$;

(3) $\sqrt{1+x^2}y'=xy^3$,$y|_{x=0}=1$;

(4) $(1+e^{-x})\sin y\mathrm{d}y+\cos y\mathrm{d}x=0$,$y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$;

(5) $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$,$y|_{x=1}=2$.

解 (1) 原方程可化为$(1+e^x)y\dfrac{dy}{dx}=e^x$,分离变量得

$$y\,dy=\frac{e^x}{1+e^x}dx.$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}y^2=\ln(1+e^x)+C,$$

代入初始条件得$\dfrac{1}{2}=\ln(1+e)+C$,故

$$C=\frac{1}{2}-\ln(1+e).$$

所求微分方程的通解为 $y^2-1=2\ln(1+e^x)-2\ln(1+e)$.

(2) 将原式分离变量得

$$x(1+x)dx=y(1+y)dy,$$

两端积分得

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+C,$$

将初始条件代入得 $0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+C$,故 $C=-\dfrac{5}{6}$.

故所求通解为 $3(x^2-y^2)+2(x^3-y^3)+5=0$.

(3) 原方程可化为$\sqrt{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}=xy^3$,分离变量得

$$\frac{1}{y^3}dy=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

两端积分得

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}=\sqrt{1+x^2}+C,$$

代入初始条件得$-\dfrac{1}{2}=1+C$,故 $C=-\dfrac{3}{2}$.

故所求通解为$\dfrac{1}{y^2}+2\sqrt{1+x^2}=3$.

(4) 将原式分离变量得

$$\frac{\sin y}{\cos y}dy=-\frac{1}{1+e^{-x}}dx,$$

两端积分得

$$\ln\cos y=\ln(1+e^x)+C,$$

代入初始条件可得 $\ln\cos\dfrac{\pi}{4}=\ln(1+e^0)+C$,故 $C=\ln\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

因此所求通解为 $\cos y = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+e^x)$，即 $(1+e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$.

(5) 原方程可变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，故原方程可化为

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u} + u,$$

分离变量得 $u\,du = \frac{1}{x}dx$，两端积分得

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln|x| + C.$$

将 $u = \frac{y}{x}$ 代入可得 $\frac{1}{2}\cdot\frac{y^2}{x^2} = \ln|x| + C$，代入初始条件得

$$\frac{1}{2}\cdot 4 = C,$$

故 $C = 2$.

因此所求通解为 $y^2 = 2x^2(\ln|x| + 2)$.

3. 设有连结点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$，对于 $\overset{\frown}{OA}$ 上任一点 $P(x,y)$，曲线弧 $\overset{\frown}{OP}$ 与直线 $\overline{OP}$ 所围图形的面积为 x^2，求曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程.

解 设曲线弧的方程为 $y = y(x)$，依题意则有

$$\int_0^x y(x)dx - \frac{1}{2}xy(x) = x^2,$$

上式两端求导可得

$$y(x) - \frac{1}{2}y(x) - \frac{1}{2}xy'(x) = 2x,$$

即可得微分方程 $y' = \frac{y}{x} - 4$.

令 $u = \frac{y}{x}$，有 $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，则微分方程可化为

$$\frac{du}{dx} = -\frac{4}{x},$$

积分得

$$u = -4\ln x + C.$$

因 $u = \frac{y}{x}$，故 $y = x(-4\ln x + C)$.

又因曲线过点 $A(1,1)$，故 $C = 1$. 于是得曲线弧 $\overset{\frown}{OA}$ 的方程为

$$y = x(1 - 4\ln x).$$

4. 一曲线过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分,求这曲线方程.

解 设曲线方程为 $y=y(x)$,切点为(x,y).依条件,切线在 x 轴与 y 轴上的截距分别为 $2x,2y$.于是切线的斜率为

$$y'=\frac{2y-0}{0-2x}=-\frac{y}{x},$$

分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$,积分得

$$\ln|y|=-\ln|x|+\ln C,$$

即 $xy=C$.

因曲线过点(2,3),故 $C=6$.因此所求曲线方程为 $xy=6$.

习题 7-3

1. 求下列微分方程的通解:

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\mathrm{e}^{-x}$; (2) $y'+y\tan x=\sin 2x$;

(3) $y'+2xy=2x\mathrm{e}^{-x^2}$; (4) $xy'+y=\sin x$;

(5) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3$; (6) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{y-x}$;

(7) $y\ln y\mathrm{d}x+(x-\ln y)\mathrm{d}y=0$; (8) $y'+f'(x)y=f(x)f'(x)$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\mathrm{e}^{-x}(x+C)$.

(2) $y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{\sin 2x}\cdot\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\cos x\left(\int\frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x+C\right)$

$=\cos x\left(\int 2\sin x\mathrm{d}x+C\right)$

$=C\cos x-2\cos^2 x$.

(3) $y=\mathrm{e}^{-\int 2x\mathrm{d}x}\left[\int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{\int 2x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-x^2}\left[\int 2x\mathrm{e}^{-x^2}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x+C\right]$

$=\mathrm{e}^{-x^2}\left(\int 2x\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x^2}(x^2+C)$.

(4) 将方程改写成 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$,则通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x\mathrm{d}x + C\right) = \frac{1}{x}(-\cos x + C).$$

(5) 将方程改写成 $y' - \frac{1}{x-2}y = 2(x-2)^2$，则通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int -\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x}\left(\int 2(x-2)^2 \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{-1}{x-2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{\ln(x-2)} \cdot \left(\int 2(x-2)^2 \cdot \mathrm{e}^{-\ln(x-2)}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= (x-2) \cdot \left(\int 2(x-2)\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= (x-2)^3 + C(x-2).$$

(6) 将方程改写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y}x = 1$，则通解为

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left(\int 1 \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y + C_1\right) = \mathrm{e}^{-\ln y}\left(\int \mathrm{e}^{\ln y}\mathrm{d}y + C_1\right) = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2}y^2 + C_1\right),$$

即 $y^2 - 2xy = C$.

(7) 将原方程改写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{y\ln y}x = \frac{1}{y}$，则

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y}\left(\int \frac{1}{y} \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{1}{y\ln y}\mathrm{d}y} + C_1\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-\ln|\ln y|}\left[\int \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\ln|\ln y|}\mathrm{d}y + C_1\right]$$

$$= \frac{1}{\ln y}\left(\int \frac{\ln y}{y}\mathrm{d}y + C_1\right) = \frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C_1\right),$$

即 $2x\ln y = \ln^2 y + C$.

(8) $y = \mathrm{e}^{-\int f'(x)\mathrm{d}x}\left(\int f(x)f'(x) \cdot \mathrm{e}^{\int f'(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$

$$= \mathrm{e}^{-f(x)}\left(\int f(x) \cdot f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-f(x)} \cdot \left(\int f(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x) + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-f(x)} \cdot \left(\int f(x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{f(x)} + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-f(x)}\left(f(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)} - \int \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}f(x) + C\right)$$

$$= \mathrm{e}^{-f(x)} \cdot (f(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)} - \mathrm{e}^{f(x)} + C)$$

$$= f(x) - 1 + C\mathrm{e}^{-f(x)}.$$

2. 求下列微分方程满足初始条件的特解：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 8, y|_{x=0} = 2$；　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\tan x = \sec x, y|_{x=0} = 0$；

(3) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x, y\big|_{x=\pi}=1$；　(4) $xy'+y-e^{2x}=0, y\big|_{x=\frac{1}{2}}=2e$；

(5) $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2-3x^2}{x^3}y=1, y\big|_{x=1}=0$.

解　(1) 因 $y=e^{-\int 3dx}\left(\int 8\cdot e^{\int 3dx}dx+C\right)=e^{-3x}\left[\int 8\cdot e^{3x}dx+C\right]=e^{-3x}\left(\dfrac{8}{3}e^{3x}+C\right)$，

则 $y\Big|_{x=0}=\dfrac{8}{3}+C=2$，故 $C=-\dfrac{2}{3}$.

因此所求特解为 $y=\dfrac{2}{3}(4-e^{-3x})$.

(2) 因 $y=e^{\int \tan dx}\left(\int \sec x\cdot e^{\int -\tan x dx}dx+C\right)=\dfrac{1}{\cos x}\left(\int \sec x\cos x dx+C\right)=\dfrac{1}{\cos x}(x+C)$，

则 $y\Big|_{x=0}=C=0$，故所求特解为 $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

(3) 由第1题第(4)题知，原微分方程的通解为

$$y=\frac{1}{x}(-\cos x+C).$$

因 $y\Big|_{x=\pi}=\dfrac{1}{\pi}(1+C)=1$，故 $C=\pi-1$.

因此所求特解为 $y=\dfrac{\pi-1-\cos x}{x}$.

(4) 原方程可化为 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{e^{2x}}{x}$，则

$$\begin{aligned} y&=e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{e^{2x}}{x}\cdot e^{\int \frac{1}{x}dx}dx+C\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(\int \frac{e^{2x}}{x}\cdot x dx+C\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(\int e^{2x}dx+C\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C\right), \end{aligned}$$

于是 $y\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2\left(\dfrac{1}{2}e+C\right)=2e$，故 $C=\dfrac{1}{2}e$.

因此所求特解为 $2xy=e^{2x}+e$.

(5) 因 $y=e^{-\int \frac{2-3x^2}{x^3}dx}\left(\int 1\cdot e^{\int \frac{2-3x}{x^3}dx}dx+C\right)=e^{(x^{-2}+3\ln x)}\left(\int e^{-x^{-2}-3\ln x}dx+C\right)$

$$\begin{aligned} &=e^{x^{-2}}\cdot x^3\left(\int e^{-x^{-2}}\cdot x^{-3}dx+C\right)\\ &=x^3e^{x^{-2}}\left(\frac{1}{2}e^{-x^{-2}}+C\right), \end{aligned}$$

故 $y\Big|_{x=1}=e\left(\dfrac{1}{2}e^{-1}+C\right)=0$，则 $C=-\dfrac{1}{2}e^{-1}$.

因此所求特解为 $2y = x^3 - x^3 e^{x^{-2}} - 1$.

3. 求一曲线方程，这曲线通过原点，并且它在点 (x, y) 处的切线斜率等于 $2x + y$.

解　设曲线方程为 $y = y(x)$，依题意有 $y' = 2x + y$，即 $y' - y = 2x$.

因曲线过原点，则 $y\Big|_{x=0} = 0$，故

$$y = e^{\int dx}\left(\int 2x e^{-\int dx} dx + C\right) = e^x\left(\int 2x e^{-x} dx + C\right)$$
$$= e^x(-2xe^{-x} - 2e^{-x} + C) = -2x - 2 + Ce^x,$$

由 $y\Big|_{x=0} = -2 + C$ 可解得 $C = 2$.

故所求曲线的方程为

$$y = 2(e^x - x - 1).$$

4. 求下列伯努利方程的通解：

(1) $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$;　　(2) $3y' + y = \dfrac{1}{y^2}$;

(3) $y' + 2xy + xy^4 = 0$;　　(4) $y' = \dfrac{1}{xy + x^2 y^3}$;

(5) $x dy - [y + xy^3(1 + \ln x)]dx = 0$.

解　(1) 原方程可改写成 $\dfrac{1}{y^2}y' + \dfrac{1}{y} = \cos x - \sin x$.

令 $z = \dfrac{1}{y}$，则 $z' = -\dfrac{1}{y^2}y'$，于是原方程化为

$$z' - z = \sin x - \cos x.$$

故 $z = e^{\int dx}\left[\int(\sin x - \cos x) \cdot e^{-\int dx} dx + C\right]$

$= e^x\left[\int(\sin x - \cos x)e^{-x} dx + C\right]$

$= e^x\left(\int \sin x e^{-x} dx - \int \cos x e^{-x} dx + C\right)$.

其中 $\int \sin x e^{-x} dx = -\int \sin x d(e^{-x}) = -\sin x e^{-x} + \int e^{-x}\cos x dx$，则

$$z = e^x(-\sin x e^{-x} + C) = Ce^x - \sin x,$$

即 $\dfrac{1}{y} = Ce^x - \sin x$.

因此所求通解为 $y(Ce^x - \sin x) = 1$.

(2) 原方程可改写成

$$3y^2 y' + y^3 = 1.$$

令 $z = y^3$，则 $z' = 3y^2 \cdot y'$，于是原方程化为

$$z' + z = 1.$$

故 $z = e^{-\int dx}\left(\int 1 \cdot e^{\int dx} dx + C\right) = e^{-x}\left(\int e^{x} dx + C\right) = e^{-x}(e^{x} + C)$,

即 $y^3 = 1 + Ce^{-x}$,即为所求通解.

(3) 原方程可改写成 $y^{-4}y' + 2xy^{-3} + x = 0$.

令 $z = y^{-3}$,则 $z' = -3y^{-4} \cdot y'$,于是原方程化为

$$-\frac{1}{3}z' + 2xz = -x,$$

即 $z' - 6xz = 3x$.

故 $z = e^{-\int -6x dx}\left(\int 3x \cdot e^{\int -6x dx} dx + C\right) = e^{3x^2}\left(\int 3x \cdot e^{-3x^2} dx + C\right)$

$= e^{3x^2}\left(-\frac{1}{2}e^{-3x^2} + C\right) = -\frac{1}{2} + Ce^{3x^2}$,

即 $y^3\left(Ce^{3x^2} - \frac{1}{2}\right) = 1$,即为所求通解.

(4) 原方程可改写成 $\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3$,即 $x^{-2}x' - \frac{y}{x} = y^3$.

令 $z = x^{-1}$,则 $z' = -x^{-2} \cdot x'$,于是原方程化为

$$z' + zy = -y^3,$$

故 $z = e^{-\int y dy}\left(\int -y^3 \cdot e^{\int y dy} dy + C\right) = e^{-\frac{1}{2}y^2}\left(\int -y^3 \cdot e^{\frac{1}{2}y^2} dy + C\right)$

$= e^{-\frac{1}{2}y^2}(2e^{\frac{1}{2}y^2} - y^2e^{\frac{1}{2}y^2} + C)$

$= 2 - y^2 + Ce^{-\frac{1}{2}y^2}$,

即 $x(2 - y^2 + Ce^{-\frac{1}{2}y^2}) = 1$,即为所求通解.

(5) 原方程可写成 $y' - \frac{1}{x}y = (1 + \ln x)y^3$,即

$$y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = 1 + \ln x.$$

令 $z = y^{-2}$,则 $z' = -2y^{-3}y'$,于是原方程化为

$$z' + \frac{2}{x}z = -2(1 + \ln x).$$

故 $z = e^{-\int \frac{2}{x} dx}\left[\int -2(1 + \ln x) \cdot e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + C\right]$

$= x^{-2}\left[\int -2(1 + \ln x)x^2 dx + C\right]$

$= x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1 + \ln x) + \frac{2}{3}\int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx + C\right]$

$$= x^{-2}\left[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{9}x^3+C\right]$$

$$=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2},$$

即$\frac{x^2}{y^2}=-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+C$,即为所求通解.

习题 7-4

1. 求下列各微分方程的通解:

(1) $y''=\frac{1}{1+x^2}$;　　(2) $y''=x+\sin x$;

(3) $xy''+y'=e^x$;　　(4) $yy''+1=y'^2$;

(5) $y''=\frac{y'^2}{y-1}$;　　(6) $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$;

(7) $y''=y'+x$;　　(8) $y^3y''-1=0$;

(9) $y''=y'^3+y'$;　　(10) $xy''+y'=0$.

解　(1) 根据原式可得 $y'=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C_1$,则

$$y=\int(\arctan x+C_1)dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx+C_1x$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2.$$

(2) 根据原式可得 $y'=\int(x+\sin x)dx=\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1$,故

$$y=\int\left(\frac{x^2}{2}-\cos x+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2.$$

(3) 令 $y'=p(x)$,则 $y''=p'(x)$,代入原方程有 $p'+\frac{1}{x}p=\frac{e^x}{x}$,故

$$p=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)=\frac{1}{x}\left(\int\frac{e^x}{x}\cdot xdx+C_1\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(\int e^xdx+C_1\right)=\frac{1}{x}(e^x+C_1).$$

再次积分可得方程通解为

$$y=C_1\ln|x|+\int\frac{e^x}{x}dx+C_2.$$

(4) 令 $y'=p(y)$,则

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy},$$

代入原方程有

$$py\frac{dp}{dy}+1=p^2,$$

分离变量得$\frac{pdp}{1-p^2}=\frac{dy}{y}$,积分得

$$\frac{1}{2}\ln(-p^2+1)=\ln y+\ln C'_1.$$

故$-p^2+1=(C'_1y)^2$,则

$$p=\pm\sqrt{-(C'_1y)^2+1},$$

即 $y'=\sqrt{1-(C'_1y)^2}$,分离变量并积分得

$$x=\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{1-(C_1y)^2}}=\frac{1}{C'_1}\arcsin C'_1y+C'_2,$$

故所求通解为 $y=C_1\sin\left(\frac{x}{C_1}+C_2\right)$.

(5) 令 $y'=p(y)$,则 $y''=p\frac{dp}{dy}$,代入原方程有

$$p\frac{dp}{dy}=\frac{p^2}{y-1},$$

分离变量得$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y-1}$,两边积分得

$$\ln p=\ln(y-1)+\ln C_1,$$

则 $p=C_1(y-1)$,即 $y'-C_1y=-C_1$. 因此

$$y=e^{\int C_1dx}\left(\int-C_1\cdot e^{-\int C_1dx}dx+C_2\right)=e^{C_1x}\left(\int-C_1e^{-C_1x}dx+C_2\right)$$
$$=e^{C_1x}(e^{-C_1x}+C_2)=C_2e^{C_1x}+1.$$

(6) 原式两端乘以 $2y'$ 得 $2y'y''=\frac{2y'}{\sqrt{y}}$,即

$$(y'^2)'=(4\sqrt{y})',$$

故 $y'^2=4\sqrt{y}+C'_1$.

于是有 $y'=\pm2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\left(C_1=\frac{C'_1}{4}\right)$,分离变量得

$$dx=\pm\frac{dy}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}},$$

积分得

$$x=\pm\int\frac{d(\sqrt{y})^2}{2\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\pm\int\frac{\sqrt{y}d\sqrt{y}}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}=\pm\int\frac{(\sqrt{y}+C_1)}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}d(\sqrt{y})$$

$$=\pm\left[\int\sqrt{\sqrt{y}+C_1}\,\mathrm{d}(\sqrt{y}+C_1)-C_1\int\frac{1}{\sqrt{\sqrt{y}+C_1}}\mathrm{d}(\sqrt{y}+C_1)\right]$$

$$=\pm\left[\frac{2}{3}(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{3}{2}}-2C_1(\sqrt{y}+C_1)^{\frac{1}{2}}\right]+C_2.$$

(7) 令 $y'=p$,则 $y''=p'$,于是原方程可化为 $p'-p=x$. 故

$$p=\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\left(\int x\cdot\mathrm{e}^{\int-1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right)=\mathrm{e}^x\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C_1\right)$$

$$=\mathrm{e}^x(-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}+C_1)=-x-1+C_1\mathrm{e}^x,$$

积分得 $y=C_1\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}-x+C_2$.

(8) 令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,于是原方程化为

$$y^3p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-1=0,$$

分离变量得 $p\mathrm{d}p=\dfrac{1}{y^3}\mathrm{d}y$,积分得

$$p^2=-\frac{1}{y^2}+C_1,$$

故 $y'=p=\pm\sqrt{C_1-y^{-2}}=\pm\dfrac{1}{|y|}\sqrt{C_1y^2-1}$. 分离变量得

$$\frac{|y|\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x,$$

上式两端积分可得

$$\mathrm{sgn}(y)\int\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1y^2-1}}=\pm\int\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{sgn}(y)\sqrt{C_1y^2-1}=\pm C_1x+C_2,$$

两边平方得 $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$.

(9) 令 $y'=p$,则 $y''=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$,原方程化为

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^3+p,$$

即 $p\left[\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2-1\right]=0$.

若 $p\equiv0$,则 $y\equiv C$,$y\equiv C$ 是原方程的解,但不是通解;

若 $p\neq0$,由于 p 的连续性,必在 x 的某区间有 $p\neq0$.

于是有$\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-(1+p^2)=0$. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}y,$$

积分得 $\arctan p=y-C_1$，即

$$p=\tan(y-C_1),$$

亦即 $\cot(y-C_1)\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$.

再积分得 $\ln\sin(y-C_1)=x+\ln C_2$，即

$$\sin(y-C_1)=C_2\mathrm{e}^x,$$

也可写成 $y=\arcsin(C_2\mathrm{e}^x)+C_1$.

(10) 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，于是原方程化为

$$xp'+p=0,$$

分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$，积分得

$$\ln|p|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|+\ln C_1,$$

即 $p=\frac{C_1}{x}$.

再积分得 $y=C_1\ln|x|+C_2$.

2. 求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $y^3y''+1=0, y|_{x=1}=1, y'|_{x=1}=0$;

(2) $y''=\mathrm{e}^{2y}, y|_{x=0}=y'|_{x=0}=0$;

(3) $(1+x^2)y''=2xy', y|_{x=0}=1, y'|_{x=1}=3$;

(4) $2yy''-y'^2=y^2, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=2$.

解 原方程可写成 $y''+\frac{1}{y^3}=0$，两端乘以 $2y'$ 得

$$2y'y''+\frac{2y'}{y^3}=0,$$

即 $(y'^2-\frac{1}{y^2})'=0$，因此得

$$y'^2-\frac{1}{y^2}=C_1,$$

代入初始条件得 $C_1=-1$，故有

$$y'^2=\frac{1}{y^2}-1=\frac{1-y^2}{y^2}, y'=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y},$$

分离变量得 $\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\pm\mathrm{d}x$，积分得

$$-\sqrt{1-y^2}=\pm x+C_2.$$

代入初始条件得 $C_2 = \mp 1$，于是

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm(x-1),$$

两边平方得 $x^2 + y^2 = 2x$.

由于在点 $x=1$ 处，$y=1$，故在 $x=1$ 邻域内 $y>0$，因而特解可表示为

$$y = \sqrt{2x - x^2}.$$

(2) 原方程两端同乘以 $2y'$ 得 $2y'y'' = 2y'e^{2y}$，即

$$(y'^2)' = (e^{2y})',$$

积分得 $y'^2 = e^{2y} + C_1$，代入初始条件 $x=0, y'=0$ 得 $C_1 = -1$，从而有

$$y' = \pm\sqrt{e^{2y}-1},$$

分离变量后积分可得 $\int \frac{dy}{\sqrt{e^{2y}-1}} = \pm\int dx$，即

$$\int \frac{d(e^{-y})}{\sqrt{1-e^{-2y}}} = \mp\int dx,$$

于是可得 $\arcsin(e^{-y}) = \mp x + C_2$.

代入初始条件 $x=0, y=0$ 得 $C_2 = \frac{\pi}{2}$. 因此特解为

$$e^{-y} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x,$$

即 $y = -\ln\cos x = \ln\sec x$.

(3) 令 $y' = p(x)$，则 $y'' = p'(x)$.

原方程可化为 $(1+x^2)p' = 2xp$，即

$$(1+x^2)\frac{dp}{dx} = 2xp.$$

分离变量得 $\frac{1}{p}dp = \frac{2x}{1+x^2}dx$，两边积分得

$$\ln p = \ln(1+x^2) + \ln C_1,$$

故 $p = C_1(1+x^2)$，即 $y' = C_1(1+x^2)$.

代入初始条件 $x=1, y'=3$ 得 $C_1 = \frac{3}{2}$，故

$$y' = \frac{3}{2}(1+x^2),$$

积分得 $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}x^3 + C_2$，代入初始条件 $x=0, y=1$ 得 $C_2 = 1$，故特解为

$$y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1.$$

(4) 令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$，代入方程有

$$2yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=y^2,$$

整理得$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-\frac{p}{2y}=\frac{y}{2p}$.

令 $u=\frac{p}{y}$,则 $p=uy$,$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$,于是有

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-\frac{u}{2}=\frac{1}{2u},$$

分离变量得$\frac{2u}{1-u^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{y}\mathrm{d}y$.

故 $\ln y=-\ln(1-u^2)+C_1$,则

$$y=C_1\cdot\frac{1}{1-u^2}=C_2\cdot\frac{1}{1-\frac{p^2}{y^2}}.$$

又因 $y\Big|_{x=0}=1$,$y'\Big|_{x=0}=2$,所以 $C_2=-3$.故有

$$y-\frac{1}{y}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=-3.$$

再次分离变量可得

$$y+\frac{3}{2}+\sqrt{y(3+y)}=\frac{9}{2}\mathrm{e}^x.$$

3.对任意 $x>0$,曲线 $y=f(x)$ 上点$(x,f(x))$处的切线在 Oy 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求 $f(x)$ 的一般表达式.

解 由题意知$\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)}{0-x}=f'(x)$,即

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf'(x)-f(x)=0,$$

亦即$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f'(x)-xf(x)=0$,求导得

$$xf''(x)+f'(x)=0.$$

令 $y=f(x)$,则 $xy''+y'=0$;令 $y'=p(x)$,则 $y''=p'(x)$,于是

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+p=0,$$

分离变量得$-\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$,积分得

$$-\ln|p|=\ln x+\ln C'_1,$$

故 $p=\frac{C_1}{x}$,即 $y'=\frac{C_1}{x}$,则 $y=C_1\ln x+C_2$.

习题 7-5

1. 下列函数组中，在定义域的区间内，哪些是线性无关的：

(1) e^x, e^{-x}；　　(2) $3\sin^2 x, 1-\cos^2 x$；

(3) $\cos 2x, \sin 2x$；　　(4) $x\ln x, \ln x$；

(5) $2x, x^3$；　　(6) $\ln(1+x), \ln(1+x)^3$.

分析　对于两个函数构成的函数组，如果两函数的比值为常数，则它们是线性相关的，否则就线性无关.

解　(1) $\dfrac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$，故 e^x, e^{-x} 线性无关.

(2) $\dfrac{3\sin^2 x}{1-\cos^2 x} = 3$，故 $3\sin^2 x, 1-\cos^2 x$ 线性相关.

(3) $\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x$，故 $\cos 2x, \sin 2x$ 线性无关.

(4) $\dfrac{x\ln x}{\ln x} = x$，故 $x\ln x, \ln x$ 线性无关.

(5) $\dfrac{2x}{x^3} = \dfrac{2}{x^2}$，故 $2x, x^3$ 线性无关.

(6) $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+x)^3} = \dfrac{1}{3}$，故 $\ln(1+x), \ln(1+x)^3$ 线性相关.

2. 验证：$y_1 = e^{x^2}$ 及 $y_2 = xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解　由 $y_1 = e^{x^2}$ 得 $y'_1 = 2xe^{x^2}$，$y''_1 = (2+4x^2)e^{x^2}$；

由 $y_2 = xe^{x^2}$ 得 $y'_2 = (1+2x^2)e^{x^2}$，$y''_2 = (6x+4x^3)e^{x^2}$.

由于 $y''_1 - 4xy'_1 + (4x^2-2)y_1 = (2+4x^2)e^{x^2} - 4x\cdot 2xe^{x^2} + (4x^2-2)e^{x^2} = 0$，

$y''_2 - 4y'_2 + (4x^2-2)y = (6x+4x^3)e^{x^2} - 4x(1+2x^2)e^{x^2} + (4x^2-2)xe^{x^2} = 0$，

故 y_1, y_2 都是方程的解.

又因 $\dfrac{y_2}{y_1} = x \neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关，于是方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = (C_1 + C_2 x)e^{x^2}.$$

3. 验证：$y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$（$C_1, C_2$ 为任意常数）是方程 $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ 的通解.

解　记 $y_1 = x^2$，$y_2 = x^2 \ln x$，则

$$y'_1 = 2x,\ y''_1 = 2,\ y'_2 = 2x\ln x + x,\ y''_2 = 2\ln x + 3,$$

且 $x^2 y''_1 - 3xy'_1 + 4y_1 = x^2 \cdot 2 - 3x\cdot 2x + 4x^2 = 0$，

$$x^2y''_2-3xy'_2+4y_2=x^2(2\ln x+3)-3x(2x\ln x+x)+4x^2\ln x=0,$$

故 y_1 与 y_2 是方程的解，且 y_1 与 y_2 线性无关，所以

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1x^2+C_2x^2\ln x$$

是方程的通解.

4. 验证：$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$（$C_1$，$C_2$ 为任意常数）是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 的通解.

解 记 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=\mathrm{e}^{2x}$，$y^*=\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$，则

$$y''_1-3y'_1+2y_1=\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x=0,$$

$$y''_2-3y'_2+2y_2=4\mathrm{e}^{2x}-6\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{2x}=0,$$

故 y_1，y_2 是原方程对应的齐次方程的解，且 y_1，y_2 是线性无关的.

又因 $y^{*\prime\prime}-3y^{*\prime}+2y^*=\frac{25}{12}\mathrm{e}^{5x}-\frac{15}{12}\mathrm{e}^{5x}+\frac{y}{12}\mathrm{e}^{5x}=\mathrm{e}^{5x}$，故 y^* 是原方程的一个特解. 因此

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{12}\mathrm{e}^{5x}$$

是原方程的通解.

习题 7-6

1. 求下列各微分方程的通解：

（1）$y''+y'-12y=0$；

（2）$y''+14y'=0$；

（3）$y''+4y=0$；

（4）$y''+y'+y=0$；

（5）$4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-20\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+25x=0$；

（6）$y''-5y'+2y=0$.

解 （1）原方程的特征方程为 $r^2+r-12=0$，解得 $r_1=3$，$r_2=-4$，故方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-4x}$.

（2）原方程的特征方程为 $r^2+14r=0$，解得 $r_1=0$，$r_2=-14$，故方程的通解为 $y=C_1+C_2\mathrm{e}^{-14x}$.

（3）原方程的特征方程为 $r^2+4=0$，解得 $r_1=2\mathrm{i}$，$r_2=-2\mathrm{i}$，故方程通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

（4）原方程的特征方程为 $r^2+r+1=0$，解得 $r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，故方程通解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

(5) 原方程的特征方程为 $4r^2-20r+25=0$，解得 $r_1=r_2=\dfrac{5}{2}$，故方程通解为 $x=(C_1+C_2t)e^{\frac{5}{2}t}$.

(6) 原方程的特征方程为 $r^2-5r+2=0$，解得 $r_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$，故方程通解为 $y=C_1e^{\frac{5-\sqrt{17}}{2}x}+C_2e^{\frac{5+\sqrt{17}}{2}x}$.

2.求下列方程满足初始条件的特解：

(1) $y''-4y'+3y=0, y|_{x=0}=6, y'|_{x=0}=10$；

(2) $4y''+4y'+y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=0$；

(3) $y''+y'-2y=0, y|_{x=0}=2, y'|_{x=0}=1$；

(4) $y''+y'+y=0, y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=0$.

解 (1) 原方程的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，解得 $r_1=1, r_2=3$，故方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

于是有 $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1+C_2=6,\\ C_1+3C_2=10,\end{cases}$$

故 $\begin{cases}C_1=4,\\ C_2=2,\end{cases}$ 因此所求特解为 $y=4e^x+2e^{3x}$.

(2) 原方程的特征方程为 $4r^2+4r+1=0$，解得 $r_{1,2}=-\dfrac{1}{2}$，故方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

于是有 $y'=\left(-\dfrac{C_1}{2}+C_2-\dfrac{C_2}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1=2,\\ -\dfrac{C_1}{2}+C_2=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}C_1=2,\\ C_2=1,\end{cases}$ 因此所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{1}{2}x}$.

(3) 原方程的特征方程为 $r^2+r-2=0$，解得 $r_1=1, r_2=-2$，故方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

于是有 $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1+C_2=2,\\ C_1-2C_2=1,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}C_1=\dfrac{5}{3},\\ C_2=\dfrac{1}{3},\end{cases}$ 因此所求特解为 $y=\dfrac{5}{3}e^x+\dfrac{1}{3}e^{-2x}$.

(4) 原方程的特征方程为 $r^2+r+1=0$，解得 $r_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，故方程通解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

于是有 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2\right)\\-\left(\dfrac{1}{2}C_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_1\right)\cdot\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\end{bmatrix}$，代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1=1,\\-\dfrac{1}{2}C_1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}C_2=0,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}C_1=1,\\C_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$，故所求特解为 $y=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$ 且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $f(x)$.

解　由 $g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$ 知 $g(x)$、$f(x)$ 中必含有 e^x.

令 $g(x)=\mathrm{e}^x+r(x)$，则

$$f(x)=\mathrm{e}^x-r'(x),$$
$$g'(x)=f(x)=2r'(x),$$
$$g''(x)=f(x)=2r''(x).$$

又因 $g''(x)=2\mathrm{e}^x-f'(x)$，故

$$g''(x)-g'(x)=-f'(x)+f(x),$$

从而 $r''(x)+r(x)=0$. 因此有

$$r=\mathrm{e}^0\cdot(C_1\cos x+C_2\sin x)=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

故

$$g(x)=\mathrm{e}^x+C_1\cos x+C_2\sin x,$$
$$f(2)=\mathrm{e}^x+C_1\sin-C_2\cos x,$$
$$g(0)=1+C_1=2, f(0)=1-C_2=0,$$

解得 $C_1=1$，$C_2=1$，则

$$f(x)=\mathrm{e}^x+\sin x-\cos x.$$

4. 函数 $\varphi(x)$ 连续，且满足求 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x+\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t-x\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$，求 $\varphi(x)$.

解　根据题意可得

$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x+x\varphi(x)-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t-x\varphi(x)=\mathrm{e}^x-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t,$$
$$\varphi''(x)=\mathrm{e}^x-\varphi(x),$$

则 $\varphi''(x)-\frac{1}{2}e^x=\frac{1}{2}e^x-\varphi(x)$.

令 $r(x)=\varphi(x)-\frac{1}{2}e^x$，则 $r''(x)=-r(x)$，故

$$r(x)=e^0\cdot(C_1\cos x+C_2\sin x)=C_1\cos x+C_2\sin x,$$

因此 $\varphi(x)=\frac{1}{2}e^x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

又因 $\varphi(0)=e^0=1$，所以 $\varphi'(0)=e^0=1$，故得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，所以

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(e^x+\cos x+\sin x).$$

习题 7-7

1. 求下列各微分方程的通解：

(1) $2y''+y'-y=2e^x$；

(2) $y''+y'-6y=x^2e^{2x}$；

(3) $2y''+5y'=5x^2-2x-1$；

(4) $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$；

(5) $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$；

(6) $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$.

解 (1) 由 $2r^2+r-1=0$ 解得 $r_1=\frac{1}{2}$，$r_2=-1$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=2e^x$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ae^x$ 是原方程的一个特解，将其代入原方程得

$$2ae^x+ae^x-ae^x=2e^x,$$

解得 $a=1$，即 $y^*=e^x$. 故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-x}+e^x.$$

(2) 由 $r^2+r-6=0$ 解得 $r_1=2$，$r_2=-3$ 故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}.$$

因 $f(x)=x^2e^{2x}$，$\lambda=2$ 是特征方程的单根，故可设

$$y^*=xe^{2x}(ax^2+bx+C)=e^{2x}(ax^3+bx^2+Cx)$$

是原方程的一个特解，将其代入方程得

$$15ax^2+(6a+10b)x+5c+2b=x^2,$$

比较系数得 $a=\frac{1}{15}$，$b=-\frac{1}{25}$，$c=\frac{2}{125}$，故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+\frac{x}{125}\left(\frac{25}{3}x^2-5x+2\right)e^{2x}.$$

(3) 由 $2r^2+5r=0$ 解得 $r_1=0, r_2=-\frac{5}{2}$，故对应的齐次方程的通解为$Y=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}$.

因 $f(x)=5x^2-2x-1$，$\lambda=0$ 是特征方程的单根，故可设 $y^*=x(b_0x^2+b_1x+b_2)$ 是原方程的一个特解，将其代入方程得

$$15b_0x^2+(12b_0+10b_1)x+4b_1+5b_2=5x^2-2x-1,$$

比较系数得 $b_0=\frac{1}{3}, b_1=-\frac{3}{5}, b_2=\frac{7}{25}$，即

$$y^*=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{-\frac{5}{2}x}+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{25}x.$$

(4) 由 $r^2+3r+2=0$ 解得 $r_1=-1, r_2=-2$，故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$.

因 $f(x)=3xe^{-x}$，$\lambda=-1$ 是特征方程的单根，故可设

$$y^*=xe^{-x}(ax+b)=e^{-x}(ax^2+bx)$$

是原方程的一个特解，将其代入原方程得

$$2ax+(2a+b)=3x,$$

比较系数得 $a=\frac{3}{2}, b=-3$，即 $y^*=e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right)$.

故原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\left(\frac{3}{2}x^2-3x\right).$$

(5) 由 $r^2-2r+5=0$ 解得 $r_{1,2}=1\pm 2i$，故对应的齐次方程的通解为 $Y=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

因 $f(x)=e^x\sin 2x=e^x(0\cdot\cos 2x+1\cdot\sin 2x)$，且 $\lambda+i\omega=1+2i$ 是特征方程的单根，故可设

$$y^*=xe^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$$

是原方程的一个特解，将其代入方程并消去 e 得

$$4b\cos 2x-4a\sin 2x=\sin 2x,$$

比较系数得 $a=-\frac{1}{4}, b=0$，即

$$y^*=xe^x\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)=-\frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{4}xe^x\cos 2x.$$

(6) 由 $r^2 - 6r + 9 = 0$ 得 $r_{1,2} = 3$,故对应的齐次方程的通解为 $Y = e^{3x}(C_1 + C_2x)$.

因 $f(x) = e^{3x}(x+1)$,$\lambda = 3$ 是特征方程的根,故可设 $y^* = x^2e^{3x}(ax+b)$ 是原方程的一个特解.

将其代入方程得

$$6ax + 2b = x + 1,$$

比较系数得 $a = \frac{1}{6}$,$b = \frac{1}{2}$,即 $y^* = x^2e^{3x}\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}\right) = \frac{x^2}{2}e^{3x}\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$.

故原方程的通解为

$$y = Y + y^* = e^{3x}(C_1 + C_2x) + \frac{x^2}{2}e^{3x}(\frac{1}{3}x + 1).$$

2. 求下列方程满足初始条件的特解:

(1) $y'' + y = -\sin 2x, y|_{x=\pi} = 1, y'|_{x=\pi} = 1$;

(2) $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1, y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 0$;

(3) $y'' - 10y' + 9y = e^{2x}, y|_{x=0} = \frac{1}{7}, y'|_{x=0} = \frac{3}{7}$;

(4) $y'' - y = 4xe^x, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$.

解 (1) 由 $r^2 + 1 = 0$ 解得 $r_{1,2} = \pm i$,故对应的齐次方程的通解为

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

因 $f(x) = -\sin 2x = e^{0x}(0 \cdot \cos 2x - \sin 2x)$,且 $\lambda + i\omega = 2i$ 不是特征方程的根,故可设

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x$$

是原方程的一个特解,将其代入方程得

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = -\sin 2x,$$

比较系数得 $A = 0$,$B = \frac{1}{3}$,即 $y^* = \frac{1}{3}\sin 2x$.

故原方程的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

于是有 $y' = -C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{2}{3}\cos 2x$,将其代入初始条件可得

$$\begin{cases} -C_1 = 1, \\ -C_2 + \frac{2}{3} = 1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} C_1 = -1, \\ C_2 = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

故所求特解为

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

(2) 由 $r^2-2r-3=0$ 解得 $r_1=3, r_2=-1$，故对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$.

因 $f(x)=3x+1, \lambda=0$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=ax+b$ 是原方程的一个特解，将其代入方程得

$$-3ax-2a-3b=3x+1,$$

比较系数得 $a=-1, b=\frac{1}{3}$，即 $y^*=\frac{1}{3}-x$.

故原方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}+\frac{1}{3}-x$.

于是有 $y'=3C_1e^{3x}-C_2e^{-x}-1$，将其代入初始条件有

$$\begin{cases}C_1+C_2+\dfrac{1}{3}=1,\\ 3C_1-C_2-1=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}C_1=\dfrac{5}{12},\\ C_2=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=\frac{5}{12}e^{3x}+\frac{1}{4}e^{-x}+\frac{1}{3}-x.$$

(3) 由 $r^2-10r+9=0$ 解得 $r_1=1, r_2=9$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}.$$

因 $f(x)=e^{2x}, \lambda=2$ 不是特征方程的根，故可设 $y^*=Ae^{2x}$ 是原方程的一个特解，将其代入原方程得 $A=-\frac{1}{7}$，即 $y^*=-\frac{1}{7}e^{2x}$.

故原方程的通解为

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

于是有 $y'=C_1e^{x}+9C_2e^{9x}-\frac{2}{7}e^{2x}$，将其代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1+C_2-\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{7},\\ C_1+9C_2-\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{7},\end{cases} \text{即} \begin{cases}C_1=\dfrac{13}{56},\\ C_2=\dfrac{3}{56}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=\frac{13}{56}e^{x}+\frac{3}{56}e^{9x}-\frac{1}{7}e^{2x}.$$

(4) 由 $r^2-1=0$ 得特征根 $r_{1,2}=\pm 1$，故对应的齐次方程的通解为

$$Y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$$

因 $f(x)=4xe^x$，$\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设

$$y^*=xe^x(Ax+B)=e^x(Ax^2+Bx)$$

是原方程的一个特解，将其代入原方程得

$$4Ax+2A+2B=4x,$$

比较系数得 $A=1$，$B=-1$，即

$$y^*=e^x(x^2-x).$$

故原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+e^x(x^2-x).$$

于是有 $y'=e^x(x^2+x-1+C_1)-C_2e^{-x}$，将其代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\C_1-C_2-1=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}C_1=\dfrac{1}{2},\\C_2=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

故所求特解为

$$y=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}+e^x(x^2-x).$$

*习题 7-8

求下列欧拉方程的通解：

(1) $x^2y''+xy'-y=0$；　　(2) $x^2y''+2xy'-n(n+1)y=0$；

(3) $x^2y''+xy'+y=2\sin\ln x$；　　(4) $x^3y'''+xy'-y=3x^4$.

解　(1) 令 $x=e^t$，记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则原方程化为

$$[D(D-1)+D-1]y=0, \qquad ①$$

其特征方程为 $r(r-1)+r-1=0$，即 $r^2-1=0$，可解出其特征根 $r_{1,2}=\pm1$，故方程 ① 有通解，即

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t}.$$

因此原方程的通解为

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}$$

(2) 令 $x=e^t$，记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则原方程化为

$$[D(D-1)+2-n(n+1)]y=0, \qquad ②$$

其特征方程为 $r(r-1)+2r-n(n+1)=0$，即 $r^2+r-n(n+1)=0$，可解出其特征根 $r_1=n$，$r_2=-n-1$，故方程 ② 有通解，即

$$y = C_1 e^{nt} + C_2 e^{(-n-1)t}.$$

故原方程的通解为

$$y = C_1 x^n + C_2 x^{-(n+1)}.$$

(3) 令 $x = e^t$，记 $D = \frac{d}{dt}$，则原方程化为

$$[D(D-1) + D + 1]y = 2\sin t. \qquad ③$$

方程 ③ 对应的齐次方程的特征方程为

$$r(r-1) + r + 1 = 0,$$

即 $r^2 + 1 = 0$，可解出其特征根 $r = \pm i$.

故方程对应的齐次方程的通解为

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

因 $f(t) = 2\sin t = e^{0t}(0 \cdot \cos t + 2\sin t)$，且 $\lambda + i\omega = i$ 是特征方程的根，故可设

$$y^* = t(a\cos t + b\sin t)$$

是原方程的一个特解，将其代入方程得

$$-2a\sin t + 2b\cos t = 2\sin t,$$

比较系数得 $a = -1, b = 0$，故方程有通解，即

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t - t\cos t.$$

因此原方程的通解为

$$y = C_1 \cos\ln|x| + C_2 \sin\ln|x| - \ln|x| \cos\ln|x|.$$

(4) 令 $x = e^t$，记 $D = \frac{d}{dt}$，则原方程化为

$$[D(D-1)(D-2) + D - 1]y = 3e^{4t}. \qquad ④$$

方程 ④ 对应的齐次方程的特征方程为

$$r(r-1)(r-2) + r - 1 = 0,$$

即 $(r-1)^3 = 0$，可解出其特征根 $r_{1,2,3} = 1$.

故方程 ④ 对应的齐次方程的通解为

$$y = e^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2).$$

因 $f(t) = 3e^{4t}$，$\lambda = 4$ 不是特征方程的根，故可设 $y^* = Ae^{4t}$ 是方程 ④ 的一个特解，将其代入方程得 $A = \frac{1}{9}$.

故方程 ④ 的通解为

$$y = e^t(C_1 + C_2 t + C_3 t^2) + \frac{1}{9}e^{4t}.$$

因此原方程的通解为

$$y = C_1 x + C_2 x\ln|x| + C_3 x\ln^2|x| + \frac{1}{9}x^4.$$

* 习题 7-9

1. 求下列微分方程组的通解：

(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y,\\ \dfrac{dy}{dt}=4x+3y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-x+y+3,\\ \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{dy}{dt}=x+y-3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y,\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\\ \dfrac{dy}{dt}-x-3y=e^{2t}.\end{cases}$

分析　求解线性微分方程组一般采用“消去法”.

解　(1) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+2y, & ①\\ \dfrac{dy}{dt}=4x+3y, & ②\end{cases}$

由式 ① 得

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}-x\right),\tag{③}$$

对式 ③ 求导得

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\right).\tag{④}$$

将式 ③ 和式 ④ 代入式 ② 得

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}-5x=0,$$

解得 $x=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}$. 将此解代入式 ③ 得 $y=2C_1e^{5t}-C_2e^{-t}$.

因此，方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1e^{5t}+C_2e^{-t},\\ y=2C_1e^{5t}-C_2e^{-t}.\end{cases}$$

(2) $\begin{cases}x'+y'=-x+y+3, & ①\\ x'-y'=x+y-3, & ②\end{cases}$

① + ② 得

$$x'=y.\tag{③}$$

将式 ③ 代入式 ① 得 $x'+x''=-x+x'+3$，即

$$x''+x=3.\tag{④}$$

可解出式 ④ 对应的齐次方程的特征根为 $r_{1,2}=\pm i$，且易见 $x^*=3$ 是式 ④ 的特

解，于是

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+3.$$

由式 ③ 得 $y=-C_1\sin t+C_2\cos t$，因此方程组通解为

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+3,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t.\end{cases}$$

(3) $\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}=y, & ①\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}=x, & ②\end{cases}$

将式 ① 两端关于 t 求二阶导数，得 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=\dfrac{d^2y}{dt^2}$，将其代入式 ② 得 $\dfrac{d^4x}{dt^4}=x$，即 $\dfrac{d^4x}{dt^4}-x=0$. 由它的特征方程 $r^4-1=0$ 得 $r_{1,2}=\pm 1$，$r_{3,4}=\pm i$，于是

$$x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t.$$

再由式 ① 得 $y=\dfrac{d^2x}{dt^2}=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t$，因此，方程组的通解为

$$\begin{cases}x=C_1e+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t,\\ y=C_1e^t+C_2e^{-t}-C_3\cos t-C_4\sin t.\end{cases}$$

(4) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$，则方程组可表示为

$$\begin{cases}(D+5)x+y=e^t, & ①\\ -x+(D-3)y=e^{2t}, & ②\end{cases}$$

记 $\Delta=\begin{vmatrix}D+5 & 1\\ -1 & D-3\end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}e^t & 1\\ e^{2t} & D-3\end{vmatrix}$，则有 $\Delta=\Delta_x$，即

$$(D^2+2D-14)x=-2e^t-e^{2t}. \qquad ③$$

由其对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r-14=0$ 得

$$r_{1,2}=-1\pm\sqrt{15}.$$

令 $x^*=Ae^t+Be^{2t}$，将其代入式 ③ 并比较系数得

$$x^*=\frac{2}{11}e^t+\frac{1}{6}e^{2t},$$

于是 $x=C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}+\dfrac{2}{11}e^t+\dfrac{1}{6}e^{2t}$.

由式 ① 得 $y=e^t-(D+5)x$，即

$$y=(-4-\sqrt{15})C_1e^{(-1+\sqrt{15})t}-(4-\sqrt{15})C_2e^{(-1-\sqrt{15})t}-\frac{1}{11}e^t-\frac{7}{6}e^{2t}.$$

2. 求下列初值问题的解：

(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+5x+y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-2x+3y=0, \\ x\big|_{t=0}=0, y\big|_{t=0}=1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}-x=0, \\ \dfrac{dx}{dt}+y=0, \\ x\big|_{t=0}=1, y\big|_{t=0}=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2\dfrac{dx}{dt}-4x+\dfrac{dy}{dt}-y=e^t, \\ \dfrac{dx}{dt}+3x+y=0, \\ x\big|_{t=0}=\dfrac{3}{2}, y\big|_{t=0}=0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+3x-y=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-8x+y=0, \\ x\big|_{t=0}=1, y\big|_{t=0}=4. \end{cases}$

解　(1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}+5x+y=0, & ① \\ \dfrac{dy}{dt}-2x+3y=0, & ② \end{cases}$

由式 ① 得

$$y=-\frac{dx}{dt}-5x, \quad ③$$

对式 ③ 求导得

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}, \quad ④$$

将式 ③ 和式 ④ 代入式 ② 得

$$\frac{d^2x}{dt^2}+8\frac{dx}{dt}+17x=0,$$

解得 $x=e^{-4t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$，将其代入式 ③ 得

$$y=e^{-4t}[(-C_2-C_1)\cos t+(C_1-C_2)\sin t].$$

由初始条件知

$$\begin{cases} C_1=0, \\ -C_2-C_1=1, \end{cases} \text{故} \begin{cases} C_1=0, \\ C_2=-1. \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} x=-e^{-4t}\sin t, \\ y=e^{-4t}(\cos t+\sin t). \end{cases}$

(2) 记 $D=\dfrac{d}{dt}$，原方程组即为

$$\begin{cases} (D^2-1)x+2Dy=0, & ① \\ Dx+y=0, & ② \end{cases}$$

则有 $\begin{vmatrix} D^2-1 & 2D \\ D & 1 \end{vmatrix} x=0$，即

$$(D^2+1)x=0. \tag{③}$$

由式 ③ 的特征方程 $r^2+1=0$ 得 $r_{12,2}=\pm i$，于是 $x=C_1\cos t+C_2\sin t$，将其代入初始条件得

$$C_1=1，即\ x=\cos t+C_2\sin t.$$

又由式 ② 得 $y=-Dx=\sin t-C_2\cos t$，将其代入初始条件得 $C_2=0$，因此

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t.\end{cases}$$

(3) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组即为

$$\begin{cases}(2D-4)x+(D-1)y=\mathrm{e}^t, & ①\\ (D+3)x+y=0, & ②\end{cases}$$

则有 $\begin{vmatrix}2D-4 & D-1\\ D+3 & 1\end{vmatrix}x=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^t & D-1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$，即

$$(D^2+1)x=\mathrm{e}^{-t}. \tag{③}$$

由方程 ③ 对应的齐次方程的特征方程 $r^2+1=0$ 得 $r_{1,2}=\pm i$.

令 $x^*=A\mathrm{e}^t$，将其代入方程 ③ 并比较系数得 $A=-\dfrac{1}{2}$，于是

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^t.$$

又由式 ② 得 $y=(C_1-3C_2)\sin t-(3C_1+C_2)\cos t+2\mathrm{e}^t$，将其代入初始条件得

$$\begin{cases}C_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2},\\ -3C_1-C_2+2=0,\end{cases}\quad 故\begin{cases}C_1=2,\\ C_2=-4.\end{cases}$$

因此 $\begin{cases}x=2\cos t-4\sin t-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t,\\ y=14\sin t-2\cos t+2\mathrm{e}^t.\end{cases}$

(4) 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组即为

$$\begin{cases}(D+3)x-y=0, & ①\\ -8x+(D+1)y=0, & ②\end{cases}$$

则有 $\begin{vmatrix}D+3 & -1\\ -8 & D+1\end{vmatrix}x=0$，即

$$(D^2+4D-5)x=0. \tag{③}$$

由式 ③ 的特征方程 $r^2+4r-5=0$ 得 $r_1=1,r_2=-5$，于是

$$x=C_1\mathrm{e}^t+C_2\mathrm{e}^{-5t}.$$

又由式 ① 得 $y=(D+3)x=4C_1\mathrm{e}^t-2C_2\mathrm{e}^{-5t}$，将其代入初始条件得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 - 2C_2 = 4, \end{cases} \text{故} \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t, \\ y = 4\mathrm{e}^t. \end{cases}$

习题 7-10

1. 某种新产品要推向市场，设该产品的销量 $x(t)$ 是时间 t 的可导函数，如果该产品的销售量对时间的增长率 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 与销售量 $x(t)$ 及尚未购买该产品的潜在顾客的数量 $N-x(t)$ 之积成正比（N 为该产品的市场容量，比例常数为 $k>0$），且当 $t=0$ 时，$x=\frac{1}{4}N$. 求：

（1）销售量 $x(t)$；

（2）销售量 $x(t)$ 的增长最快的时刻 T.

解　（1）由题意可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(N - x(t)),$$

将上式分离变量并积分，可以解得

$$x(t) = \frac{N}{(1 + C\mathrm{e}^{-kNt})}.$$

又知 $x(0) = \frac{1}{4}N$，可解得 $C = 3$.

故销售量的表达式为 $x(t) = \frac{N}{1 + 3\mathrm{e}^{-kNt}}$.

（2）根据第（1）题可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{3kN^2\mathrm{e}^{-kNt}}{(1 + 3\mathrm{e}^{-kNt})^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{9k^2N^3\mathrm{e}^{-2kNt} - 3k^2N^3\mathrm{e}^{-kNt}}{(1 + 3\mathrm{e}^{-kNt})^3}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0$ 得 $t = \frac{\ln 3}{Nk}$.

因 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 只有一个极值点，故在 $t = \frac{\ln 3}{NR}$ 处取得最大值，即 $T = \frac{\ln 3}{Nk}$.

2. 某商品的价格由供求关系决定，若供给量 S 与需求量 Q 均是价格 P 的线性函数：

$$S = -1 + 3P, Q = 4 - P,$$

若价格 P 是时间 t（年）的函数，且已知在时刻 t 时，价格 P 的变化率与 $Q-S$ 成正比，比例系数为 2，试求价格 P 与时刻 t 的函数关系，且已知初始价格 $P_0 = 2$ 元，问当 $t=$

0.3 年时的价格应为多少？

解　由题意知

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=2(Q-S)=10-8P,$$

解上述微分方程得

$$P(t)=C\mathrm{e}^{-8t}+\frac{5}{4}.$$

又知 $P(0)=2$，故 $C=\frac{3}{4}$，所以 $P(t)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-8t}+\frac{5}{4}$，则

$$P(0.3)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2.4}+\frac{5}{4}\approx 1.32(\text{元}),$$

即当 $t=0.3$ 年时的价格约为 1.32 元.

总复习题七

1. 选择题：

(1) 设 $y=f(x)$ 是 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$ 且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）.

A. 取得极大值　　B. 取得极小值

C. 某个邻域内单调递增　　D. 某个邻域内单调递减

(2) 设线性无关函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1,C_2 是待定常数，则此方程的通解是（　　）.

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$　　B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$　　D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$

(3) 若有界可积函数满足关系式 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+3x-3$，则 $f(x)=$（　　）.

A. $-3\mathrm{e}^{-3x}+1$　　B. $-2\mathrm{e}^{3x}-1$

C. $-\mathrm{e}^{3x}-2$　　D. $-3\mathrm{e}^{-3x}-1$

(4) 设 $y=f(x)$ 是满足方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 和初始条件 $y(0)=1$ 的解，则 $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}f(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

A. $-\ln 2$　　B. $\ln 2$　　C. $\frac{1}{2}\ln 2$　　D. $-\frac{1}{2}\ln 2$

解　(1) $y''-2y'+4y=0$ 的特征方程为 $r^2-2r+4=0$，解得特征根 $r=1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$.

故方程的通解为 $y=\mathrm{e}^x(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)$.

设 $f(x)=\mathrm{e}^x(a\cos\sqrt{3}x+b\sin\sqrt{3}x)$，则

$$f'(x) = e^x[(a+\sqrt{3}b)\cos x + (b-\sqrt{3}a)\sin\sqrt{3}x],$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^x[2\sqrt{3}b - 2a]\cos\sqrt{3} + (-2\sqrt{3}a - 2b)\sin\sqrt{3}x \\ &= 2f'(x) - 4f(x), \end{aligned}$$

故 $f''(x_0) = 2f'(x_0) - 4f(x_0) < 0$,因此 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值.

选 A.

(2) 因 $y_1 - y_3$ 和 $y_2 - y_3$ 是对应的齐次方程的解,且由 y_1, y_2, y_3 线性无关可推知 $y_1 - y_3$ 和 $y_2 - y_3$ 线性无关,而 y_3 是非齐次方程的特解,故

$$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3 = C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$$

是非齐次方程的通解.

选 D.

(3) 设 $F'(x) = f(x)$,则

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)dt + 3x - 3 = \int_0^x 3f(a)da + 3x - 3 \\ &= 3F(x) - F(0) + 3x - 3, \end{aligned}$$

故 $F'(x) - 3F(x) = 3x - 3 - F(0)$,于是

$$F(x) = e^{\int 3dx}\left[\int(3x - 3 - F(0)) \cdot e^{\int -3dx}dx + C\right] = \frac{2}{3} - x + Ce^{3x},$$

$$f(x) = F'(x) = 3Ce^{3x} - 1,$$

只有 B 满足.

选 B.

(4) 原方程可改写成 $y' + \frac{2x}{x^2-1}y = \frac{\cos x}{x^2-1}$,则

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1} \cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx + C\right] = \frac{1}{x^2-1}\left[\int\cos x dx + C\right] \\ &= \frac{1}{x^2-1}(\sin x + C), \end{aligned}$$

于是 $y\Big|_{x=0} = -C = 1$,故 $C = -1$. 因此

$$y = f(x) = \frac{\sin x - 1}{x^2 - 1},$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1 - \sin x}{1 - x^2}dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1 - x^2}dx - \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{1 - x^2}dx.$$

因 $\frac{\sin x}{1-x^2}$ 为奇函数,故 $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{\sin x}{1-x^2}dx = 0$,所以

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \ln 2.$$

选 B.

2. 某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性为 $-p\ln 3$，该商品的市场最大需求量为 1 500 件，求需求函数.

解 由题意知 $\frac{Ex}{Ep} = \frac{p}{x} \cdot x' = -p\ln 3$，故 $x' + \ln 3 \cdot x = 0$，可得

$$x = \mathrm{e}^{-\int \ln 3 \mathrm{d}p}\left[\int 0 \cdot \mathrm{e}^{-\int \ln 3 \mathrm{d}p} \mathrm{d}p + C\right] = C \cdot 3^{-p}.$$

因 $x(p)$ 单调递减，故 $x(0) = C = 1\ 500$，故需求函数为

$$x(p) = 1\ 500 \cdot 3^{-p}.$$

3. 求下列微分方程的通解：

(1) $(1+x^2)y\mathrm{d}y - x(1+y^2)\mathrm{d}x = 0$； (2) $y^2 + x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

(3) $(x^2 - y)\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$； (4) $y' + y\cos x = \mathrm{e}^{-\sin x}$；

(5) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x - y^2}$； (6) $x + yy' = x(x^2 + y^2)^2$；

(7) $xy'' - y' = x^2$； (8) $y'' - 6y' + 5y = x - 3\mathrm{e}^x$.

解 (1) 将原方程分离变量可得

$$\frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

两边积分得 $1 + y^2 = C(1+x^2)$.

(2) 原方程可化为 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

令 $\frac{y}{x} = u$，则 $y = ux$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，故原方程化为

$$u + \frac{1}{u}\left(u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

分离变量得 $\left(1 - \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$，两边积分得

$$u - \ln u = \ln x + \ln C_1,$$

则 $C_1 x = \frac{\mathrm{e}^u}{u}$，将 $u = \frac{y}{x}$ 代入并整理得 $y = C\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$.

(3) 原方程可化为 $y' + \frac{1}{x}y = x$，则

$$y = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int x \cdot \mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = \frac{1}{x}\left[\int x \cdot x\mathrm{d}x + C_1\right] = \frac{1}{3}x^2 + \frac{C_1}{x},$$

故通解为 $\frac{1}{3}x^3 - xy = C$.

(4) 所求通解为

$$y = e^{-\int \cos x dx}\left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{\int \cos x dx} dx + C\right] = e^{-\sin x}\left[\int e^{-\sin x} \cdot e^{\sin x} dx + C\right]$$

$$= e^{-\sin x}(x + C).$$

(5) 由$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$知$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = -y$,故

$$x = e^{\int \frac{2}{y} dy}\left[\int -y \cdot e^{\int -\frac{2}{y} dy} dy + C\right] = y^2\left[\int -y \cdot \frac{1}{y^2} dy + C\right] = y^2[-\ln y + C].$$

(6) 令 $x^2 + y^2 = p$,则有 $2x + 2y\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dx}$,所以

$$2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 2x \cdot p^2 = \frac{dp}{dx},$$

分离变量得$\frac{1}{p^2}dp = 2x dx$,故

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = x^2 + C,$$

即 $x^2 + y^2 = \frac{1}{x^2 + C}$.

(7) 令 $y' = p(x)$,则 $y'' = p'(x)$,于是原方程可化为 $xp' - p = x^2$,即

$$p' - \frac{1}{x}p = x,$$

$$y' = p = e^{\int \frac{1}{x} dx}\left[\int x e^{\int -\frac{1}{x} dx} dx + C_1\right] = x[x + C_1] = x^2 + C_1 x,$$

故所求通解为

$$y = \int (x^2 + C_1 x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

(8) 齐次方程对应的特征方程为 $r^2 - 6r + 5 = 0$,可解得特征根为 $r_1 = 5, r_2 = 1$,故齐次方程通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}.$$

因方程 $y'' - 6y' + 5y = x$ 的特解为 $y_1^* = Ax + B$,方程 $y'' - 6y' + 5y = -3e^x$ 的特解为 $y_2^* = axe^x$,故原方程的一个特解为

$$y^* = Ax + B + axe^x,$$

解得 $y^{*\prime} = A + axe^x + ae^x$, $y^{*\prime\prime} = 2ae^x + axe^x$,将其代入方程得

$$-4ae^x + 6A + 5Ax + 5B = x - 3e^x,$$

故 $a = \frac{3}{4}, A = \frac{1}{5}, B = \frac{6}{25}$.

因此原方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x} + \frac{1}{5}x + \frac{6}{25} + \frac{3}{4}xe^x$.

4. 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解 假设方程的一个特解为 $y^*=Ax\cos2x+B\sin2x$,则

$$y^{*\prime}=(A+2B)\cos2x-2Ax\sin2x,$$

$$y^{*\prime\prime}=(-4A-4B)\sin2x-4Ax\cos2x,$$

故 $y^{*\prime\prime}+y^*=(-4A-3B)\sin2x-3Ax\cos2x=x\cos2x$,解得

$$A=-\frac{1}{3},B=\frac{4}{9}.$$

因此特解为 $y^*=-\frac{1}{3}x\cos2x+\frac{4}{9}\sin2x$.

5. 求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

(1) $y^3\mathrm{d}x+2(x^2-xy^2)\mathrm{d}y=0,y|_{x=1}=1$;

(2) $2y''-\sin 2y=0,y|_{x=0}=\frac{\pi}{2},y'|_{x=0}=1$;

(3) $y''+2y'+y=\cos x,y|_{x=0}=0,y'|_{x=0}=\frac{3}{2}$.

解 (1) 原方程可以表示成伯努利方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x=-\frac{2}{y^3}x^2,$$

即 $x^{-2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}x^{-1}=-\frac{2}{y^3}$.

令 $z=x^{-1}$,则$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$,且原方程化为一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{2}{y}z=\frac{2}{y^3},$$

解得 $z=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left(\int\frac{2}{y^3}\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y^2}\left(\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y^2}(2\ln|y|+C)$.

将 $z=x^{-1}$ 代入上式得

$$x^{-1}=\frac{1}{y^2}(2\ln|y|+C),$$

即原方程的通解为 $y^2=x(2\ln|y|+C)$.

由初始条件 $x=1,y=1$,得 $C=1$,故所求特解为 $y^2=x(2\ln|y|+1)$.

(2) 在方程 $2y''-\sin2y=0$ 两端同乘以 y',则有 $2yy''-y'\cdot\sin2y=0$,即

$$\left(y'^2+\frac{1}{2}\cos2y\right)'=0,$$

于是 $y'^2+\frac{1}{2}\cos2y=C_1$,代入初始条件 $y=\frac{\pi}{2},y'=1$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$,故有

$$y'^2+\frac{1}{2}\cos2y=\frac{1}{2},$$

即 $y'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2y = \sin^2 y$.

因 $y = \frac{\pi}{2}$ 时，$y' = 1$，故上式开方后取 $y' = \sin y$.

分离变量并积分 $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = \int \mathrm{d}x$ 得

$$\ln\tan\frac{y}{2} = x + C_2,$$

代入初始条件 $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$，得 $C_2 = 0$，故所求特解为 $\ln\tan\frac{y}{2} = x$，即

$$y = 2\arctan e^x.$$

(3) 由原方程对应的齐次方程的特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$ 解得 $r_{1,2} = -1$，故对应齐次方程的通解为

$$Y = (C_1 + C_2 x)e^{-x}.$$

因 $f(x) = \cos x$，$\lambda + i\omega = 0 + i$ 不是特征方程的根，故令 $y^* = A\cos x + B\sin x$ 是原方程的特解，并代入原方程可得

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x,$$

比较系数得 $A = 0, B = \frac{1}{2}$，故 $y^* = \frac{1}{2}\sin x$，且原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}\sin x,$$

且有 $y' = (C_2 - C_1 - C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x$，代入初始条件 $x = 0, y = 0, y' = \frac{3}{2}$ 可得

$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 - C_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \end{cases}$ 即 $C_1 = 0, C_2 = 1$.

故所求特解为 $y = xe^{-x} + \frac{1}{2}\sin x$.

6. 设 $y = f(x)$ 满足 $\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = x^2 + f(x)$，求 $f(x)$.

解 方程两边求导得 $xy = 2x + y'$，即 $y' - xy = -2x$，则

$$y = e^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int -2x \cdot e^{\int -x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}\left(\int -e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x^2 + C\right) = e^{\frac{1}{2}x^2}(2e^{\frac{1}{2}x^2} + C)$$

$$= 2 + Ce^{\frac{1}{2}x^2},$$

由上述方程得 $f(0) = 0$，故 $C = -2$.

故 $y = 2(1 - e^{\frac{1}{2}x^2})$.

7. 设函数 $y(x)(x \geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上

任一点 $P(x,y)$ 作曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

解 曲线过点 $P(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$，其与 x 轴的交点为 $\left(x_0-\dfrac{y_0}{y'(x_0)},0\right)$，故面积 S_1 为

$$S_1=\left[x-x+\frac{y}{y'(x)}\right]\cdot y\cdot\frac{1}{2}.$$

而区间 $[0,x]$ 上的两边梯形面积 $S_2=\int_0^x y(x)\mathrm{d}x$，所以

$$2S_1-S_2=\frac{y^2}{y'}-\int_0^x y\mathrm{d}x=1,$$

可求得 $y=\mathrm{e}^x+C$.

又因 $f(0)=1+C=1$，所以 $C=0$，则 $y=\mathrm{e}^x$.

*8. 求欧拉方程 $x^2y''-4xy'+6y=x$ 的通解.

解 令 $x=\mathrm{e}^t$，即 $t=\ln x$，并记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，则原方程可化为

$$[D(D-1)-4D+6]y=\mathrm{e}^t,$$

即 $(D^2-5D+6)y=\mathrm{e}^t$.

该方程对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-5r+6=0$，解得其特征根为 $r_1=2$，$r_2=3$.

故齐次方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{3t}$.

因 $f(t)=\mathrm{e}^t$，$\lambda=1$ 不是特征方程的根，故可令 $y^*=A\mathrm{e}^t$，代入 $(D^2-5D+6)y=\mathrm{e}^t$ 中并消去 e^t 得 $A=\dfrac{1}{2}$，于是 $y=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\mathrm{e}^{3t}+\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$，即原方程通解为

$$y=C_1x^2+C_2x^3+\frac{x}{2}.$$

*9. 求微分方程组 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=0,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x+\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=\mathrm{e}^t\end{cases}$ 的通解.

解 记 $D=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，方程组可表示为

$$\begin{cases}(D^2+2D+1)x+(D+1)y=0,\\(D+1)x+(D^2+2D+1)y=\mathrm{e}^t,\end{cases}\text{即}$$

$$\begin{cases}(D+1)^2x+(D+1)y=0, & ①\\(D+1)x+(D+1)^2y=\mathrm{e}^t, & ②\end{cases}$$

则有$\begin{vmatrix} (D+1)^2 & D+1 \\ D+1 & (D+1)^2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 0 & D+1 \\ e^t & (D+1)^2 \end{vmatrix}$，即

$$(D^3+3D^2+2D)x = e^t. \tag{③}$$

方程 ③ 对应齐次方程特征方程为 $r(r^2+3r+2)=0$，解得其特征根为 $r_1=0$，$r_2=-1$，$r_3=-2$.

而 $f(t)=e^t$，$\lambda=1$ 不是特征根，故可令 $x^*=Ae^t$，代入式 ③ 得 $A=-\frac{1}{6}$.

故方程 ③ 的通解为 $x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t$.

又由方程 ① 得

$(D+1)y=-(D+1)^2x=-D^2x-2Dx-x=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t$，

即 $y'+y=-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t$，可解得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int dt}\left[\int\left(-C_1-C_3e^{-2t}+\frac{2}{3}e^t\right)e^{\int dt}dt+C_4\right] \\ &= e^{-t}\left[\int\left(-C_1e^t-C_3e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}\right)dt+C_4\right] \\ &= -C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t+C_4e^{-t}. \end{aligned}$$

故方程通解为$\begin{cases} x=C_1+C_2e^{-t}+C_3e^{-2t}-\frac{1}{6}e^t, \\ y=C_4e^{-t}-C_1+C_3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^t. \end{cases}$