第一章

行　列　式

行列式是线性代数学中的一个基本工具，后面章节的许多内容都要用到. 本章主要介绍行列式的基本概念(包括定义、性质等)和基本计算方法，以及克莱姆法则.

第一节　行列式的基本概念

一、行列式的定义

为了引入行列式的概念，首先给出一些必要的预备知识.

1. 排列及逆序数

定义 1　将 n 个不同的自然数 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列**.

由于这里主要考虑这 n 个数的前后次序关系，不妨设这 n 个数就为 $1, 2, \cdots, n$. 于是，上面的定义可以写成如下定义.

定义 1′　将自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n **级排列**.

人们通常按照定义 1′ 给出 n 级排列，并且具体写 n 级排列时，在不发生混淆的情况下，只是将数字并排放在一起. 例如，23541 即为一个 5 级排列.

由中学排列组合的知识可知，n 级排列的总个数为

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

例 1-1　试写出所有的 3 级排列.

解　由上面的讨论可知，总共有 $3! = 6$ 个不同的 3 级排列，它们分别是

$$123,\quad 132,\quad 213,\quad 231,\quad 312,\quad 321.$$

注意到在上例的3级排列里，除了123中的数是按从小到大的递增顺序以外，其余的排列中，都有较大的数排在较小的数前面. 例如，213中，2比1大，但是2排在1的前面. 同样，在 n 级排列中，也只有排列 $12\cdots n$ 中的数是按从小到大的递增顺序排列的，其他的排列都或多或少地破坏了这种顺序.

定义2 在一个 n 级排列中，如果某两个数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么就称它们为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**. 通常，将 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记成 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，并且我们将逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，将逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

一般地，可以利用如下方法计算一个 n 级排列的逆序数：设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是一个 n 级排列，如果把排在 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$ 前面且比 j_i 大的数的个数记为 s_i，则 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n)=s_1+s_2+\cdots+s_n.$$

例如，$\tau(23541)=0+0+0+1+4=5$，$\tau(32541)=0+1+0+1+4=6$，因此，23541是一个5级奇排列，而32541是一个5级偶排列. 更一般地，$\tau(12\cdots n)=0+0+\cdots+0=0$，从而 $12\cdots n$ 是一个 n 级偶排列.

直接验证可知，在例1-1中的6个3级排列里面，恰好有3个偶排列和3个奇排列. 这一事实不是偶然现象. 一般地，在 $n!$ 个 n 级排列中，偶排列和奇排列各占一半. 为了说明这个事实，还需要进一步研究排列的奇偶性.

定义3 在一个 n 级排列中，如果把这个排列里的任意两个数 i 和 j 交换一下位置，而其余的数保持不动，那么就得到了一个新的 n 级排列. 对排列施行这样的一个变化称为 n 级排列的一次**对换**，并且用符号 (i,j) 表示.

例如，经过对换(2,3)，可以将排列23541变成32541，将52431变成53421. 容易验证，对一个排列连续实施两次相同的对换，就将这个排列还原，变回原来的排列了. 由此可知，一个对换把全部 n 级排列两两配对，使每两个配成对的 n 级排列在这个对换下互变.

关于排列的奇偶性，可以不加证明地给出如下定理.

定理1 任何一个对换都可以改变排列的奇偶性，也就是说，经过一次对换，偶排列变成奇排列，奇排列变成偶排列.

这个定理说明了：当 $n\geqslant 2$ 时，n 级排列的奇排列和偶排列个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

定理2 设 $j_1j_2\cdots j_n$ 是任意一个 n 级排列，则 $j_1j_2\cdots j_n$ 与 $12\cdots n$ 可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数 $n(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性与 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性相同，即

$$(-1)^{n(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

2. 行列式的定义

下面给出行列式的定义.

定义 4　将由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的算式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-1}$$

称为 n 阶**行列式**,算式 D 定义为所有取自不同行不同列的 n 个数的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-2}$$

的代数和,其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列,并且对每一个乘积项(1-2) 式冠以正负号,规定:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,(1-2) 式带正号;当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,(1-2) 式带负号. 于是行列式的定义可以写成

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1-3}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列的求和. 通常把(1-3) 式等号右边的求和项称为行列式 D 的**展开式**.

提示　(1) 在(1-1) 式中,我们把 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式 D 的**元素**,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**,表示其处于第 i 行,第二个下标 j 称为**列标**,表示其处于第 j 列. 有时也把上面(1-1) 式中的行列式简记成 $D=|a_{ij}|_1^n$.

(2) 由定义可以看出,n 阶行列式是 $n!$ 个形如(1-2) 式乘积的代数和,并且由定理 1 知,$n!$ 个乘积中有一半带有正号,另一半带有负号.

(3) 行列式相当于一个计算公式,是一个运算法则,给定有顺序的 n^2 个数,按照这种运算法则(行列式的定义),我们得到一个数,也就是这个行列式的值.

定义 5　在(1-1) 式中,将 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 所在的那条对角线称为行列式的**主对角线**,而另外一条对角线称为**副对角线**,即 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 所在的对角线. 将除了主对角线以外元素全为 0 的行列式称为**对角行列式**;将主对角线以下都是 0 的行列式称为**上三角行列式**,即当 $i>j$ 时,$a_{ij}=0$;将主对角线以上都是 0 的行列式称为**下三角行列式**,即当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$.

具体写出上面定义的这些行列式如下:

$$\text{对角行列式}\quad \Lambda_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\text{上三角行列式}\quad U_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\text{下三角行列式}\quad L_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中没有写出的元素均为 0.

下面首先对低阶的行列式进行一下必要的说明：

(1) 一阶行列式：由定义知，一阶行列式 $|a| = a$. 注意这个符号不要与绝对值的符号相混淆.

(2) 二阶行列式：由定义知，二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

因此，二阶行列式可以直接记忆为：主对角线上的两个元素的乘积减去副对角线上两个元素的乘积. 也就是说，可以按如下的**对角线法则**来记忆：实线上两个元素的乘积减去虚线上两个元素的乘积，如图 1-1 所示.

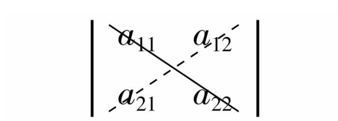

图 1-1　二阶行列式对角线法则

二阶行列式可以用于二元一次方程组解的表示：对于一个二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-4}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，利用消元法求解，可得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

如果记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2, D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

则方程组(1-4)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}.$$

在本章第三节中，对于多元线性方程组，这种解的表达方式能够给我们带来很大的方便.

(3) 三阶行列式：由定义知，三阶行列式

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

三阶行列式也可以按照图 1-2 的对角线法则来记忆：图中有三条实线可以看做是平行于主对角线的连线，三条虚线可以看做是平行于副对角线的连线，实线上的三个数的乘积冠以正号，虚线上的冠以负号.

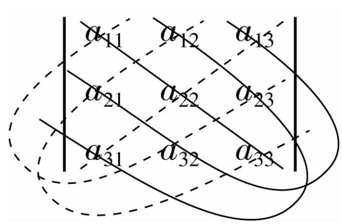

图 1-2 三阶行列式对角线法则

例 1-2 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

解 按照对角线法则，有

$$\begin{aligned} D&=1\times2\times(-1)+3\times2\times2+(-2)\times(-3)\times1-1\times2\times1-3\times(-3)\times(-1)-(-2)\times2\times2 \\ &=-2+12+6-2-9+8=13. \end{aligned}$$

例 1-3 证明 n 阶上三角行列式

$$U_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1-5}$$

证 由于在 U_n 中，当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，那么 U_n 的一般项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

只有当下标满足 $i\leqslant j_i$ 时，a_{ij_i} 才可能是非零元素. 下面确定 U_n 展开式中的非零项.

由于 $n\leqslant j_n$，a_{nj_n} 才可能是非零元素，又 $1\leqslant j_n\leqslant n$，故只有 $j_n=n$ 的才可能非零. 同理，$j_{n-1}=n$ 或者 $n-1$，$a_{n-1,j_{n-1}}$ 才可能是非零元素，但是 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 是取自不同行不同列的元素的乘积. 又 $j_n=n$，这样，必有 $j_{n-1}=n-1$. 依次类推，逐步进行下去，在 U_n 的展开式中除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项，其余的项均为零. 又因为 $\tau(12\cdots n)=0$，从而这一项带正号. 于是结论成立.

同理，可以得到下三角行列式

$$L_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}; \tag{1-6}$$

作为这两类行列式的特殊情形

$$\Lambda_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1-7}$$

例 1-4 证明 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中没有写出的元素均为 0.

证 按照元素在行列式中所处的位置，不妨设 $a_{i,n-i+1}=\lambda_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 则由行列式的定义知，在行列式的展开式中，除了乘积 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 以外全为零，且这一项的符号为 $(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}$，而

$$\tau[n(n-1)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

因此

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

二、行列式的基本性质

由行列式的定义可知，行列式是一个算式，所以行列式的计算就是一个重要的问题，但也是一个比较繁琐的问题. n 阶行列式的展开式是 $n!$ 项 n 个数的乘积的代数和，当 n 较大时，$n!$ 就是一个很大的数. 因此，必须考虑行列式的性质，通过行列式的一些性质，将行列式进行必要的简化，然后再计算.

在给出行列式的性质之前，我们先给出行列式展开式的另外一种表达方式. 设 D 是由定义 4 所定义的一个行列式，则 D 的展开式(1-3) 也可以写成如下形式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \tag{1-8}$$

事实上，在 D 的展开式(1-3) 中，为了确定 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号，将式中的 n 个数按照行标从小到大的顺序来排列. 但是数的乘法是满足交换律的，因此，这 n 个数的次序是可以任意交换的. 一般地，n 阶行列式中的任意一个乘积项都可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \tag{1-9}$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$；$j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的两个 n 级排列. 下面确定(1-9) 式所带的符号.

为了根据定义 4 中的(1-3) 式确定(1-9) 式所带的符号，就需要把这 n 个数，按行标从小到大的顺序进行重新排列，也就是排成

$$a_{1j'_1} a_{2j'_2} \cdots a_{nj'_n}, \tag{1-10}$$

而(1-10) 式所带的符号为 $(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)}$. 显然，由(1-9) 式变到(1-10) 式可以经过一系列元素的对换来得到. 每做一次对换，这 n 个元素的行标和列标所构成的 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都同时做了一次对换，这就是说 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 和 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性，于是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 的奇偶性不发生改变. 因此，经过一系列元素的对换之后，将(1-9) 式变到(1-10) 式时，$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 和 $\tau(12\cdots n) + \tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n) = \tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)$ 的奇偶性相同. 于是，(1-9) 式所带的符号

$$(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}. \tag{1-11}$$

这样，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 取成从小到大的自然顺序时，就可以确定乘积项 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 所带

的符号就为$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)}$. 从而(1-8) 式成立,即行列式 D 按列标从小到大的顺序展开.

提示 以后根据需要,可以将行列式 D 按(1-3) 式或(1-8) 式展开.

定义 6 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 n 阶行列式,如果把行列式 D 的行列互换(行变为列,列变为行),就得到一个新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将行列式 D^{T} 称为 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-12}$$

也可以写为 $|a_{ij}|_1^n=|a_{ji}|_1^n$.

证 因为在(1-12) 式右端的行列式中,a_{ij} 处于行列式的第 j 行第 i 列,即行标为 j,列标为 i,不妨用 b_{ji} 代表 a_{ij},即令 $b_{ji}=a_{ij}$,则有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \tag{1-13}$$

将(1-13) 式右端的行列式按(1-8) 式展开得到

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n},$$

因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}.$$

而

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

这正是(1-12)式的左端按(1-3)式展开后的结果，于是结论成立.

由这个性质，我们很容易从(1-5)式上三角行列式的结果得到(1-6)式下三角行列式的结果.

提示　此性质说明，行列式中的行与列是对称的，即行和列具有同等的地位. 对行成立的性质，对列也成立；对列成立的性质，对行也成立. 在以后说明行列式的性质时，主要是针对行进行证明，由这个性质可知，对列也成立，我们就不重复说明.

性质 2　交换行列式两行(列)的位置得到的新行列式与原行列式相差一个负号.

证　设原行列式为

$$D = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array},$$

其中旁边的 i 与 $j(i<j)$ 是为了标明行号. 交换行列式 D 的第 i 行和第 j 行，其他行保持不变，得到的新行列式记为

$$D_1 = \begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

由行列式的定义知，D 的每一项可以写成

$$a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}, \tag{1-14}$$

其中行标按从小到大的自然顺序，$k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列. 显然这一项也位于 D_1 的不同行不同列，所以它也是 D_1 的一项，这一项为

$$\underset{i}{a_{1k_1}\cdots a_{jk_j}}\cdots \underset{j}{a_{ik_i}}\cdots a_{nk_n}, \tag{1-15}$$

其中 i 与 j 表示 a_{jk_j} 和 a_{ik_i} 分别取自第 i 行与第 j 行，并且除了这两个元素以外其他元素都保持不变. 同理，D_1 的每一项也是 D 的一项. 从而 D_1 与 D 具有相同的项. 下面确定(1-14) 式在 D 中与(1-15) 式在 D_1 中的符号.

显然(1-14) 式在 D 中的符号为 $(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}$. 而在 D_1 中，原行列式的第 i 行与第 j 行交换了位置，但列的位置并没有发生改变. 因为 a_{jk_j} 和 a_{ik_i} 分别处于第 i 行第 k_j 列与第 j 行第 k_i 列，所以(1-15) 式在 D_1 中的符号为 $(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}$，由于 $k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n$ 是由 $k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n$ 经过一次 (k_i,k_j) 对换得到的，因此，由定理 1 有

$$(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}=-(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}.$$

于是

$$\begin{aligned}
D_1&=\sum_{k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_j\cdots k_i\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{nk_n}\\
&=-\sum_{k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}\\
&=-D.
\end{aligned}$$

推论 如果一个行列式的两行(列) 对应的数分别相等，则这个行列式等于 0.

证 设行列式 D 的第 i 行和第 j 行 $(i\neq j)$ 对应的数分别相等. 由性质 2 知，交换这两行后得到的新行列式的值为 $-D$；另一方面，由于这两行的数分别相等，交换这两行后，行列式没有发生改变. 因此 $D=-D$. 于是 $D=0$.

性质3 用一个数 k 乘以行列式的某一行(列) 得到的新行列式等于这个数乘以原行列式，即

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1-16}$$

证 把(1-16) 式的左端的行列式记为 D_1，则 D_1 的第 i 行元素为

$$ka_{i1},ka_{i2},\cdots,ka_{in}.$$

于是，D_1 按(1-3) 式展开有

$$D_1=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&= kD.
\end{aligned}
$$

其中 D 表示(1-16)式右端的行列式.因此结论成立.

推论 1 行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式外面.

提示 这个推论即为性质 3 用一个数乘以行列式某一行(列)的逆过程.

推论 2 行列式的某两行(列)对应成比例,则这个行列式的值为 0.

提示 利用性质 3 的推论 1 与性质 2 的推论很容易得到这个结论.

推论 3 行列式的某一行(列)全为零,则这个行列式的值为 0.

提示 利用性质 3 的推论 1,将零提到行列式的外面.

性质 4 行列式某一行(列)的所有元素都可以写成两项的和,则这个行列式可以拆成两个行列式之和,即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1-17}
$$

证 把(1-17)式左端的行列式记为 D,则 D 的第 i 行元素为

$$a_{i1}+b_{i1},a_{i2}+b_{i2},\cdots,a_{in}+b_{in}.$$

将 D 按(1-3)式展开得

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(a_{ij_i}+b_{ij_i})\cdots a_{nj_n}\\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n}\\
&= D_1+D_2,
\end{aligned}
$$

其中 D_1 和 D_2 分别为(1-17)式右端的两个行列式.因此结论成立.

性质5 将行列式的某一行(列)的所有元素同乘以一个数 k 加到另外一行(列)上,行列式不变,即

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1-18}
$$

证 将(1-18)式右端的行列式记为 D_1,则由性质 4 和性质 3 的推论 2 有

$$D_1=\begin{array}{r}\\ \\ i\\ \\ j\\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D+0=D.$$

有了行列式的这些性质,就使得行列式的计算变得简单.关于行列式性质的应用,首先看两个例子.

例 1-5 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 首先利用性质 5,将第 1 行的 -1 倍、-2 倍、-1 倍分别加到第 2 行、第 3 行、第 4 行上,得到

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

再利用性质 2 将第 2 行和第 4 行交换一下,得到

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix},$$

对于这个新的行列式,再利用性质 5,将第 2 行的 3 倍加到第 4 行上,然后利用性质 3

的推论 1,将第 4 行的公因子 -1 提到行列式外面,得到

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&4&-3\\0&0&-2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&4&-3\\0&0&2&1\end{vmatrix},$$

然后,再利用性质 2 将第 3 行和第 4 行交换一下,并利用性质 5 将新行列式的第 3 行的 -2 倍加到第 4 行上,得到

$$D=-\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&4&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&1&2\\0&1&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&-5\end{vmatrix},$$

最后利用例 3 的结果有 $D=10$.

例 1-6　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}.$$

分析　通过观察,我们发现这个行列式的每一行所有元素的和都是一样的,都是 $x_1+\cdots+x_n-m$. 这样,我们就可以根据性质 5,将其余各列都加到第 1 列上;再利用性质 3 的推论 1,将第 1 列的公因子提到行列式外面.

解　根据上面的分析,将第 2 列,…,第 n 列分别加到第 1 列,并提取第 1 列的公因子,得到

$$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}x_1+\cdots+x_n-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1+\cdots+x_n-m&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1+\cdots+x_n-m&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}\\&=(x_1+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix}1&x_2&\cdots&x_n\\1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix},\end{aligned}$$

利用性质 5,将第 1 列的 $-x_i$ 倍分别加到后面的第 i($i=2,3,\cdots,n$) 列,得到

$$D=(x_1+\cdots+x_n-m)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & -m & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & -m\end{vmatrix},$$

再利用(1-6)式下三角行列式的结论，有

$$D=(x_1+\cdots+x_n-m)(-m)^{n-1}.$$

思考 是否所有的行列式都可以按行列式的定义来计算？

习题 1-1

(1) 计算下面排列的逆序数：

① 45671238； ② $(2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n$.

(2) 计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}$； ② $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}$； ③ $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2\end{vmatrix}$.

(3) 计算行列式：

① $\begin{vmatrix}a_1 & 0 & b_1 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & d_1\\ a_2 & 0 & b_2 & 0\\ 0 & c_2 & 0 & d_2\end{vmatrix}$； ② $\begin{vmatrix}b & -1 & 0 & 0\\ 0 & b & -1 & 0\\ 0 & 0 & b & -1\\ a_1 & a_2 & a_3 & b+a_4\end{vmatrix}$.

第二节　行列式的计算

上一节介绍了利用行列式的定义计算行列式的值，而对于一个阶数较高的行列式，利用定义求值并不是一个简便的方法. 这一节将介绍几种常用的计算行列式的方法.

一、化三角形法计算行列式

通过观察上一节的例 1-5、例 1-6，我们发现针对具体的行列式，利用行列式的性质对其进行变形，将其变形成我们熟悉的两类行列式：上三角行列式和下三角行

列式. 这两类行列式的值可以很容易得到,即

$$U_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$L_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

还有这两类行列式的特殊情形 —— 对角行列式,它的值我们也很容易得到,即

$$\Lambda_n = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

因此,如果可以利用行列式的性质,将一个行列式化成上面这三类行列式,那么我们就很容易地得到行列式的值. 这种想法是可行的,下面给出说明.

根据行列式的性质,对行列式进行如下三类变换,我们仍然能够确定行列式的值:

(1) 用一个非零数 k 乘以行列式的某一行(列),行列式变为原行列式的 k 倍.

(2) 用任意数 k 乘以行列式的某一行(列) 加到另外一行(列) 上,行列式的值不变.

(3) 交换行列式中两行(列) 的位置,此时行列式改变符号.

定理 3　任意一个行列式经过一系列上述的三类变换,总能化成上三角或下三角行列式进行求值.

证　在这里,仍然是只针对行的情形进行证明(对列的情形可以类似证明). 设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

对于第一列的元素 $a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}$ 分两种情形考虑.

情形 1:如果第 1 列的元素全为零,由上一节性质 3 的推论 3 知,$D = 0$.

情形 2:如果第 1 列的元素不全为零,利用第三类行的变换,总可以使第 1 列的第一个元素不为零,得到的新行列式与原行列式相等或相差一个负号. 然后,利用第二

类行变换,将第1行的适当倍数加到其他各行上,使得行列式的第1列除了第1个元素以外全为零,而行列式的值不变.

行列式经过一系列行的变换后,将行列式 D 变成如下形式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 D_1 的右下部分

$$\begin{matrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{matrix}$$

重复上面的做法. 如此继续下去,直到行列式变成上三角行列式为止. 因此结论成立.

提示 定理保证了可以利用行列式的性质,将行列式化成我们比较容易计算的上(下)三角行列式,以达到简化计算的目的,通常我们将这种计算行列式的方法称为**化三角形法**. 事实上,上一节的例1-5、例1-6就是利用了这种方法.

例1-7 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_n \end{vmatrix}.$$

解 当 $x=0$ 时,原行列式就变成

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix},$$

由行列式的定义,得到

$$D_n = a_1(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = a_1.$$

当 $x \neq 0$ 时，将行列式 D_n 的第 1 行乘以 $\frac{1}{x}$ 加到第 2 行，然后再把第 2 行乘以 $\frac{1}{x}$ 加到第 3 行，依次类推，再把第 $n-1$ 行乘以 $\frac{1}{x}$ 加到第 n 行，得到

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & a_2 + \frac{a_1}{x} \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & a_3 + \frac{a_2}{x} + \frac{a_1}{x^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-2}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x + a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \end{vmatrix}$$

$$= x^{n-1}\left(x + a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}}\right)$$

$$= x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1.$$

我们也可以将这两种情况统一写成

$$D_n = x^n + a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1.$$

例 1-8 证明

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

通过定理 3 的证明知，只利用行的变换就可以将 D_1 化为下三角行列式，不妨设为

$$D_1=\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} \end{vmatrix}=u_{11}u_{22}\cdots u_{mm}.$$

类似地，只利用列的变换可以将 D_2 也化为下三角行列式，不妨设为

$$D_2=\begin{vmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}=v_{11}v_{22}\cdots v_{nn}.$$

因此，对 D 的前 m 行进行行的变换，对 D 的后 n 列进行列的变换，可以把 D 化成下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mm} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} & v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} & v_{21} & v_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} & v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}.$$

于是 $D=u_{11}u_{22}\cdots u_{mm}v_{11}v_{22}\cdots v_{nn}=D_1D_2$.

二、按行（列）展开计算行列式

由行列式的定义可知，n 阶行列式是 $n!$ 个形如 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 乘积的代数和，那么

随着 n 的变小，乘积的项数大幅减少，并且低阶的行列式要比高阶的行列式计算简便. 因此，可以考虑用低阶的行列式来表示高阶的行列式.

定义 7　设

$$D=\begin{array}{cc}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ j & \end{array}$$

是一个 n 阶行列式，其中 i 和 j 表示第 i 行和第 j 列. 在 D 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，将剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的顺序构成一个新的 $n-1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-19}$$

称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}，并且将 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，在行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

中，处于第 2 行第 3 列的元素 -4 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=3, A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-3.$$

引理 1

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \tag{1-20}$$

其中等号左端的行列式是一个 n 阶行列式；等号右端的行列式是左端 n 阶行列式的

前 $n-1$ 行前 $n-1$ 列的元素所组成的 $n-1$ 阶行列式，即左端行列式第 n 行第 n 列元素 1 的余子式 M_{nn}.

证 由行列式定义，(1-20) 式左端的 n 阶行列式展开成

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

在这里，只有当 $j_n=n$ 的项才有可能不为零，并且 $a_{nn}=1$. 在上式中去掉一些值为零的项后，得到

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1}n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}1=\sum_{j_1j_2\cdots j_{n-1}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_{n-1})}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}},$$

而上式的右端恰好是(1-20) 式的右端行列式的展开式. 因此结论成立.

引理 2

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中等号左端的行列式是一个 n 阶行列式，第 i 行除了 a_{ij} 以外均为零；等号右端的行列式是左端行列式第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij}，从而右端即为 $a_{ij}A_{ij}$.

证 首先利用行列式的第一类行变换，将等号左端的行列式的第 i 行的公因子提到行列式外面；并利用第三类行变换，将第 i 行分别与第 $i+1$ 行，第 $i+2$ 行，…，第 n 行交换，然后利用第三类列变换，将第 j 列分别与第 $j+1$ 列，第 $j+2$ 列，…，第 n 列交换，总共相差 $(n-i)+(n-j)$ 个负号，于是

$$D=a_{ij}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} & a_{n,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

再利用引理 1 即可知结论成立.

定理 4 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个 n 阶行列式,A_{ij} 为 D 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij} 的代数余子式,则有

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j; \end{cases} \tag{1-21}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases} \tag{1-22}$$

如果使用连加号和 Kronecker 符号

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

则结果可以简写成

$$\sum_{s=1}^{n}a_{is}A_{js}=\delta_{ij}D,\ \sum_{s=1}^{n}a_{si}A_{sj}=\delta_{ij}D.$$

证 仍然是只针对行的结果进行证明,列的结果可以类似证明. 下面首先证明

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}.$$

事实上,利用本章第一节行列式的性质 4,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

再由引理 2 有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

如果 $i \neq j$（不妨设 $i < j$）时，则由引理 2 有

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

$$= a_{i1}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + a_{in}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 1 和 0 所处的行为第 j 行. 再利用行列式的性质，得到

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

因此得到了 $i \neq j$ 时 $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$. 从而定理成立.

提示 (1)(1-21)式和(1-22)式说明，行列式的某一行(列)的元素分别乘以它们的代数余子式再求和即为行列式的值，而乘以其他行(列)的相应元素的代数余子式再求和其值为 0.

(2) 这个定理也说明，行列式可以按照某一行(列)元素分别乘以它们的代数余子式进行展开，这也就达到了从高阶行列式降为低阶行列式的目的.

例 1-9 计算 4 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -y \end{vmatrix}$.

解 重复利用定理4,将行列式按第1行展开,再对新的三阶行列式按第2行展开,得到

$$D=\begin{vmatrix}-x&1&0\\0&1&0\\0&1&-y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-x&0\\0&-y\end{vmatrix}=xy.$$

三、递推法计算行列式

有时在利用行列式的性质计算行列式时,不一定能够直接得到行列式的值,只能推导出一个递推公式,下面通过例题进行说明.

例 1-10 将 n 阶行列式

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}\tag{1-23}$$

称为 n 阶的**范德蒙(Vandermonde)行列式**. 证明:对于任意的正整数 $n(n\geqslant2)$,n 阶范德蒙行列式

$$V_n=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),\tag{1-24}$$

其中 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$ 表示全体满足条件 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 的因子 x_i-x_j 的乘积,即 n 阶范德蒙行列式等于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 这 n 个数的所有可能的差 $x_i-x_j(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的乘积.

证 对行列式的阶数 n 作数学归纳法.

当 $n=2$ 时,

$$V_2=\begin{vmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j),$$

结论(1-24)式成立.

假设对于 $n-1$ 阶的范德蒙行列式结论(1-24)式成立. 下面来看 n 阶的情形.

在 V_n 中,将第 $n-1$ 行的 $-x_1$ 倍加到第 n 行,再将第 $n-2$ 行的 $-x_1$ 倍加到第 $n-1$ 行,$\cdots$,最后将第1行的 $-x_1$ 倍加到第2行,即依次将前一行的 $-x_1$ 倍加到后一行,则有

$$V_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\0&x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1&x_3-x_1&\cdots&x_n-x_1\\x_2(x_2-x_1)&x_3(x_3-x_1)&\cdots&x_n(x_n-x_1)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}(x_2-x_1)&x_3^{n-2}(x_3-x_1)&\cdots&x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_2&x_3&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

上式右端的行列式是一个 $n-1$ 阶范德蒙行列式,由归纳假设有

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

因此,结论对 n 阶范德蒙行列式成立.

根据数学归纳法,对任意的正整数 $n(n\geqslant 2)$,结论均成立.

例 1-11 设 $y\neq z$,计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}x&y&\cdots&y&y\\z&x&\cdots&y&y\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&\cdots&x&y\\z&z&\cdots&z&x\end{vmatrix}$.

解 利用第一节行列式的性质 4,将最后一列拆开得

$$D_n=\begin{vmatrix}x&y&\cdots&y&0\\z&x&\cdots&y&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&\cdots&x&0\\z&z&\cdots&z&x-y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&y&\cdots&y&y\\z&x&\cdots&y&y\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\z&z&\cdots&x&y\\z&z&\cdots&z&y\end{vmatrix}$$

$$=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}.$$

由于 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$,同样可以得到

$$D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}.$$

两个等式联立,可以得到以 D_n 和 D_{n-1} 为未知量的方程组

$$\begin{cases} D_n = (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1}, \\ D_n = (x-z)D_{n-1} + z(x-y)^{n-1}. \end{cases}$$

消去 D_{n-1}，解得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z}.$$

思考　除了这里介绍的计算行列式的方法，还能否举一些其他的计算方法？另外，这些计算方法是彼此孤立的吗？

习题 1-2

（1）计算下面的行列式：

① $\begin{vmatrix} a+2b & a+4b & a+6b \\ a+3b & a+5b & a+7b \\ a+4b & a+6b & a+8b \end{vmatrix}$；　　② $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

（2）计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y & y \\ y & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & y & \cdots & x & y \\ y & y & \cdots & y & x \end{vmatrix}$.

（3）计算 $n+1$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, i = 0, 1, 2, \cdots, n$.

第三节　克莱姆法则

在第一节中，我们对低阶行列式进行说明时，曾用二阶行列式去表示形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的二元一次方程组的解，这一节我们将这个结果推广到一般的情形.

定理 5 设

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-25}$$

是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为未知数,含有 n 个线性方程的方程组.如果方程组的系数行列式(即方程组的系数按照在方程中的位置关系所构成的行列式)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1-26}$$

则线性方程组(1-25)有唯一的解,并且解可以表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,2,\cdots,n, \tag{1-27}$$

其中 D_j 为常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换 D 中的第 j 列后所得到的行列式.

分析 这个定理分两个方面,一是解是存在的,将(1-27)式中的解代入每一个方程,使得方程左右两边相等;二是解是唯一的,如果还有另外一组解 $c_1,c_2,\cdots,c_n$,必有

$$c_j=\frac{D_j}{D},j=1,2,\cdots,n.$$

证 先证存在性.只需验证(1-27)式确实是方程组(1-25)的一组解.由于

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

利用定理 4,将 D_j 按第 j 列展开有

$$D_j=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}=\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj}.$$

另外,(1-25)式方程组也可以用连加号表示为

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,2,\cdots,n.$$

于是将(1-27)式代入(1-25)式中的第 i 个方程的左端,并且再利用定理 4,得到

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{D_j}{D}=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{s=1}^{n}b_sA_{sj}\Big)=\frac{1}{D}\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}a_{ij}b_sA_{sj}$$

$$= \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj})b_s = \frac{1}{D}\sum_{s=1}^{n}(\delta_{is}D)b_s = \frac{1}{D}Db_i = b_i,$$

即(1-27)式使得线性方程组每个方程的左右两边相等,从而是这个方程组的解.

下面证解的唯一性. 设 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是方程组(1-25)的另外一组解,即

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = b_n. \end{cases}$$

在上面的 n 个方程的左右两端分别乘以 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$,然后对左右两端分别求和得

$$(\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{ij})c_1 + (\sum_{i=1}^{n}a_{i2}A_{ij})c_2 + \cdots + (\sum_{i=1}^{n}a_{in}A_{ij})c_n = \sum_{i=1}^{n}b_iA_{ij}.$$

但是,由定理 4 知,上式的左端除了 c_j 的系数为 D 以外,其他 $c_k(k \neq j)$ 的系数全为零,而上式的右端即为 D_j,从而 $Dc_j = D_j$,于是

$$c_j = \frac{D_j}{D}.$$

由 j 的任意性知,对于任何 $j = 1, 2, \cdots, n$,上式均成立. 这就证明了方程组的解是唯一的.

定理 5 通常称为**克莱姆(Cramer)法则**,这个法则从理论上提供了一套处理含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组的解法,揭示了系数行列式与解的关系. 但是计算量太大,又有条件限制,不适合实际线性方程组的求解.

定义 8 对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

当 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$,也就是常数项全为零时,则称线性方程组为**齐次线性方程组**,否则称线性方程组为**非齐次线性方程组**.

显然,齐次线性方程组必有解,事实上,$(0, 0, \cdots, 0)$ 即是它的一组解,通常称这个解为**零解**. 而对齐次线性方程组来说,人们更关心它的非零解.

定理 6 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1-28}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组只有零解.

证 直接应用克莱姆法则即可证明.

提示 这个定理的逆否命题就是,如果齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式为零.

例 1-12 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

解 利用行列式的性质,可以计算方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

由克莱姆法则知,这个方程组有唯一的解.另外用常数项去替换行列式的每一列,同样计算得到

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 8, D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&2&1&-1\\2&3&3&2\\1&3&2&1\\2&4&2&-3\end{vmatrix}=2,D_4=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\2&3&-1&3\\1&3&2&2\\2&4&3&2\end{vmatrix}=2.$$

因此，方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2},x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2},x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{1}{2}.$$

思考　定理 6 的逆命题是否成立，即当齐次线性方程组只有零解时，其系数行列式非零吗？

习题 1-3

(1) 计算下列线性方程组：

① $\begin{cases}x_1+x_2+5x_3+2x_4=1,\\2x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3,\\2x_1+3x_2+11x_3+5x_4=2,\\x_1+x_2+3x_3+4x_4=-3;\end{cases}$　　② $\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8,\\x_1-3x_2-6x_4=9,\\2x_2-x_3+2x_4=-5,\\x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0.\end{cases}$

(2) 判断线性方程组 $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+4x_3=0,\\5x_1+8x_2-2x_3=0\end{cases}$ 是否有非零解.

(3) 求当 k 取何值时，方程组 $\begin{cases}kx_1+x_2+x_3=0,\\x_1+kx_2-x_3=0,\\2x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解.

本章小结

一、行列式简史

行列式(determinant)是伴随着线性方程组的求解而发展起来的. 最早行列式的提出可以追溯到 17 世纪，其雏形是由日本数学家关孝和(Seki Takakazu，1642—1708)与德国数学家莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)各自独立得出，时间大致相同.

关孝和于 1683 年写了一部名为《解伏题之法》的著作，现在看来，意思就是“解行列式问题的方法”. 书中对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述，并使用

行列式来解高次方程组.

欧洲第一个提出行列式概念的是莱布尼茨. 1693 年在他写给法国数学家洛比达的一封信中引用了行列式的内容,并开始使用系数记号来表示有三个未知数的三个一次方程组的系数. 他从三个方程中消去了两个未知数后得到一个行列式. 这个行列式等于零,就意味着有一组解同时满足三个方程. 由于当时没有矩阵的概念,莱布尼茨将行列式中元素的位置用 i_j 来表示,其代表第 i 行第 j 列的元素. 莱布尼茨对行列式的研究成果中已经包括了行列式的展开和克莱姆法则,但这些结果在当时并不为人所知,这封信件直到 1850 年才发表.

后来,行列式思想在解线性方程组中得到发展. 瑞士数学家克莱姆(G. Cramer, 1704—1752)于 1750 年在其著作《代数曲线分析引论》中提出了系数行列式来确定线性方程组解的表达式法则,即现在的克莱姆法则(麦克劳林在 1748 年也得到了同样的法则). 行列式理论后来被法国数学家范德蒙(A. T. Vandermonde, 1735—1796)系统化了,他的研究使得行列式与线性方程组求解相分离成为独立的研究对象,因此他也被认为是行列式理论的奠基人.

行列式理论在 19 世纪又被柯西、凯莱和西尔维斯特等人进一步发展. 行列式这个名称是柯西 1815 年提出的,凯莱于 1841 年首先创用了行列式的符号“$|\quad|$”.

二、本章知识结构

本章主要介绍了行列式的基本内容. 在第一节中,首先为给出行列式的定义作准备,介绍了 n 级排列和逆序数的概念. 行列式其实可以看做是 n^2 个数组成的算式,其结果是一个数. 但是利用定义直接计算行列式是比较困难的,这里只给出了几种特殊形式行列式的计算. 既然直接计算不可行,就要另寻办法. 为此,本章介绍了行列式的基本性质,这些性质是计算行列式的关键.

在第二节中,给出了行列式计算的几种方法. 首先是化三角形法,这种方法是很实用的,特别是对一些具体的行列式. 这种方法的中心思想就是化行列式为人们所熟悉的上(下)三角行列式. 其次是行列式的按行(列)展开,中心思想就是降阶,把行列式降成更低阶的行列式. 最后,介绍了常用的递推法计算行列式,其实这种方法的本质可以认为是数学归纳法. 值得一提的是,计算行列式的方法不是孤立的,有时是几种方法的共同使用.

第三节给出了解决具有 n 个方程 n 个未知数的线性方程组的克莱姆法则,这种法则在理论上是很有价值的,但在实际应用过程中,往往计算量很大. 克莱姆法则在行列式理论的发展中,起到了重要作用.

复习题一

A　组

(1) 求下列排列的逆序数，并指出它们的奇偶性：

① 7531264；　② 14326875；

③ 542136；　④ $n(n-1)(n-2)\cdots 321$.

(2) 根据行列式的定义，计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；　② $\begin{vmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

(3) 如果 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，用 D 表示 $\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 的值.

(4) 计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix} 200 & 427 & 227 \\ 300 & 643 & 343 \\ 400 & 721 & 421 \end{vmatrix}$；　② $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$；

③ $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$；　④ $\begin{vmatrix} c & a & b & a \\ a & c & a & b \\ b & a & c & a \\ a & b & a & c \end{vmatrix}$.

(5) 计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$；　② $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$.

(6) 根据行列式的性质,计算下列行列式:

① $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

② $\begin{vmatrix} a & b+a & c+b+a & d+c+b+a \\ a & b+2a & c+2b+3a & d+2c+3b+4a \\ a & b+3a & c+3b+6a & d+3c+6b+10a \\ a & b+4a & c+4b+10a & d+4c+10b+20a \end{vmatrix}$.

(7) 按第 3 列展开,计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$.

(8) 设 $\begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ 8 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=4$,则 a 为何值?

(9) 计算 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

(10) 计算下列行列式:

① $D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$; ② $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

③ $D_3=\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix}$; ④ $D_n=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$.

(11) 设 $a \neq b$，证明：n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

(12) 求方程 $D(x)=0$ 的根，其中

$$D(x) = \begin{vmatrix} x-1 & x-2 & x-1 & x \\ x-2 & x-4 & x-2 & x \\ x-3 & x-6 & x-4 & x-1 \\ x-4 & x-8 & 2x-5 & x-2 \end{vmatrix}.$$

(13) 解方程

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2}+a_{n-1}-x & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix} = 0.$$

(14) 在 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，已知 $a_{ij}=-a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明：当 n 是奇数时，$D=0$.

(15) 用克莱姆法则解下列方程组：

① $\begin{cases} x+y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4; \end{cases}$　　② $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8. \end{cases}$

(16)λ 取何值时，齐次线性方程组：

$$\begin{cases}\lambda x+y-z=0,\\ x+\lambda y-z=0,\\ 2x-y+z=0\end{cases}$$

仅有零解？

B 组

(1) 计算下列行列式：

① $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

② $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$；

③ $\begin{vmatrix} a+x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_n & a \\ a & a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$；

④ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$.

(2) 证明：$\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$.

(3) 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

(4) 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式，求：

① $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；　　② $A_{34}+A_{35}$.

(5) 证明：$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=n+1$.

(6) 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

(7) 设 a,b,c 是方程 $x^3-2x+4=0$ 的三个根，求行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

(8) 确定参数 λ,使齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ \lambda^2 x_1+2x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$ 有非零解.

(9) 求 λ 取何值时,齐次线性方程组 $\begin{cases} (1-\lambda)x-2y+4z=0, \\ 2x+(3-\lambda)y+z=0, \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ 有非零解.

(10) 已知齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ax_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-3x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2+ax_3+bx_4=0 \end{cases}$ 有非零解时,a,b 必须满足什么条件?