第二章

导数、微分及其应用

导数与微分是微分学的基本概念，是微积分的重要组成部分. 导数反映了函数相对于自变量的变化快慢程度，微分描述了当自变量有微小变化时函数改变量的近似值. 导数与微分密切相关，在实际问题中具有广泛的应用. 本章除了阐明一元函数导数与微分的概念之外，还将建立一整套的微分法则和公式，从而系统地解决一元初等函数的求导问题，并介绍其应用.

第一节　函数的导数与微分

一、函数的导数

1. 变化率问题举例

导数概念同数学中的其他概念一样，也是客观世界事物运动规律在数量关系上的抽象. 从历史上看，导数的概念主要是从两个实际问题引出的，一个是物体运动的瞬时速度，另一个是曲线的切线斜率. 这两个问题直到今天仍然有着重要意义.

实例 1　变速直线运动的瞬时速度

设一质点做变速直线运动，其位移函数是

$$s=s(t),$$

其中 t 是时间，s 是位移，讨论它在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$.

当时间 t 由 t_0 变到 $t_0+\Delta t$ 时，质点在 Δt 内运动的路程为

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0).$$

于是，从时刻 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内，质点运动的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

当 $|\Delta t|$ 很小时，可以用 $\bar{v}$ 近似地表示质点在 t_0 时刻的瞬时速度. 显然，$|\Delta t|$ 越小，近似程度越好. 当 $\Delta t\to 0$ 时，如果极限 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 存在，则称该极限为质点在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}.$$

实例 2　平面曲线的切线及其斜率

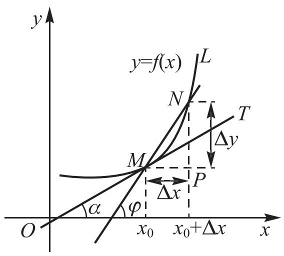

图 2-1

已知曲线 L 的方程为 $y=f(x)$，点 $M(x_0,f(x_0))$ 为曲线 L 上的一点，求曲线 L 在 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率.

设点 $N(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$ 为曲线 L 上的另一点，连接点 M 和点 N 的直线称为**曲线 L 的割线** $\overline{MN}$，割线 $\overline{MN}$ 当点 N 沿曲线 L 无限接近点 $M(\Delta x\to 0)$ 时的极限位置 $\overline{MT}$ 称为**曲线 L 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线**（见图 2-1）.

割线 $\overline{MN}$ 的斜率为

$$k_{\overline{MN}}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

其中，φ 是割线 $\overline{MN}$ 的倾角. 如果当点 N 沿曲线 L 趋于点 M 时，割线 $\overline{MN}$ 的极限位置存在，即点 M 处的切线存在，则此时 $\Delta x\to 0$，$\varphi\to\alpha$，割线 $\overline{MN}$ 的斜率 $\tan\varphi$ 趋向于切线 $\overline{MT}$ 的斜率 $\tan\alpha$，即

$$k_{切}=\tan\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\tan\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

上述两个问题，一个是物理问题，一个是几何问题，它们的实际意义完全不同，但从数量关系上来分析却是相同的，都是研究函数的增量与自变量增量的比值的极限问题. 自然科学和工程技术领域中的许多有关变化率的问题，如非恒稳的电流强度、化学反应速度等都可归结为这类极限问题，因此我们可以把它们抽象成导数的概念.

2. 导数的定义

定义 2.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0,x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内$)$时，相应的函数有增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**. 记为

$$f'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},\text{或}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0},$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.\tag{2-1}$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**不可导**.

根据导数的定义，变速直线运动的质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 为位移函数 $s=s(t)$ 在点 t_0 处的导数，即 $v(t_0)=s'(t_0)$；曲线 L 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线斜率为曲线方程 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即 $k=\tan\alpha=f'(x_0)$.

若令 $x_0+\Delta x=x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，则式(2-1)变成

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

定义 2.2　若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

存在，则分别称它们为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数，且分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$，也可分别记作 $f'(x_0-0)$ 和 $f'(x_0+0)$.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

定义 2.3 若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内的每一点处都可导，则称**函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导**. 若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 内可导，则对 $\forall x\in I$，都有唯一确定的导数值 $f'(x)$ 与之对应，这样就确定了一个定义在区间 I 上的函数，称之为函数 $y=f(x)$ 的**导函数**，简称**导数**，记作 $f'(x)$，y'，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$. 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

例 1 求幂函数 $y=x^n$（n 为正整数）的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x+\cdots+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1},$$

即

$$(x^n)'=nx^{n-1}\ (n\text{ 为正整数}).$$

一般地，$(x^a)'=ax^{a-1}\ (a\in\mathbf{R})$.

例如，$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\dfrac{1}{x^2}$.

例 2 求指数函数 $y=a^x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x\ln a}-1}{\Delta x}$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a\ (\text{因为 } \mathrm{e}^{\Delta x\ln a}-1\sim\Delta x\ln a,\ \Delta x\to 0),$$

即

$$(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0, a\neq 1).$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有 $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

例 3 求对数函数 $y=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\ln a}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x\ln a}=\frac{1}{x\ln a}\ \left(\text{因为 } \ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\sim\frac{\Delta x}{x},\ \Delta x\to 0\right),$$

即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时，有 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

例 4 求函数 $y=\sin x$ 的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

即 $(\sin x)'=\cos x$.

同理可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

3. 导数的几何意义

由实例 2 知，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线 $\overline{MT}$ 的斜率，即

$$f'(x_0)=\tan\alpha=k_{切},$$

其中，α 为切线的倾斜角. 这就是**导数的几何意义**.

如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数存在，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

过点 $M(x_0,y_0)$ 且与该点切线垂直的直线称为曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的**法线**. 若 $f'(x_0)\neq 0$，则过点 $M(x_0,y_0)$ 的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

而当 $f'(x_0)=0$ 时，过点 $M(x_0,y_0)$ 的法线为垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$.

例 5 求抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义知，抛物线 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线斜率为

$$k_{切}=y'\Big|_{x=2}=2x\Big|_{x=2}=2\times 2=4,$$

所求的切线方程为

$$y-4=4(x-2),$$

简化整理得

$$y=4x-4.$$

所求的法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2),$$

简化整理得

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}.$$

4. 可导与连续的关系

定理 2.1 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 一定在点 x_0 处连续.

证明 设自变量 x 在 x_0 处的增量为 Δx，相应函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. 因为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ 存在，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta x\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0,$$

由连续函数的定义可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

注意 定理 2.1 的逆定理不成立，即在 x_0 处连续的函数未必在 x_0 处可导.

例 6 考察函数 $y=|x|$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解 因为 $\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|$，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0,$$

即 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，而

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，所以函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

二、函数的微分

1. 微分的概念

实例 金属薄片面积的改变量

一块正方形金属薄片受温度变化影响时，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（见图 2-2），问此薄片的面积改变了多少？

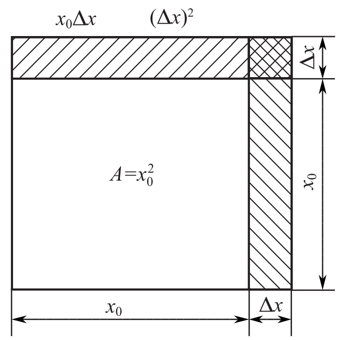

图 2-2

解 设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 $A=x^2$，薄片受温度变化影响时，面积的改变量可看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 A 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

上式中，ΔA 由两部分组成：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即

$$\Delta A=2x_0\Delta x+o(\Delta x).$$

当 $|\Delta x|$ 很小时，$(\Delta x)^2$ 可以忽略不计，面积增量 ΔA 可以近似地用 $2x_0\Delta x$ 表示，即

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x.$$

其中，ΔA 的线性主部 $2x_0\Delta x$ 在数学上就叫作面积函数 $A=x^2$ 在点 x_0 处的微分.

定义 2.4 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 可以表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x), \tag{2-2}$$

其中 A 与 Δx 无关，$o(\Delta x)$ 为比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x 处**可微**，并称其线性主部 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的**微分**，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

2. 函数可微的条件

函数的可微性与可导性之间存在着密切联系.

定理 2.2 $y=f(x)$ 在点 x 处可微的充分必要条件是它在点 x 处可导，且 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

证明 先证必要性. 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可微, 则有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, 两边同除以 Δx, 得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

于是, 当 $\Delta x\to 0$ 时, 有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}A+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A+0=A.$$

即函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 且 $A=f'(x)$.

再证充分性. 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在, 根据函数极限与无穷小的关系得 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$(其中 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$), 于是

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

显然, $\alpha\Delta x=o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$, 且 $f'(x)$ 不依赖于 Δx, 所以由微分的定义可知, 函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可微, 且 $dy=f'(x)\Delta x$.

当 $y=x$ 时, $dy=dx=x'\Delta x=\Delta x$, 即 $dy=\Delta x$, 所以 $dy=f'(x)dx$. 从而有 $\frac{dy}{dx}=f'(x)$, 即函数的导数等于函数的微分与自变量的微分之商, 故导数也称为**微商**, 而微分的商 $\frac{dy}{dx}$ 也常常被用作导数的符号.

例 7 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1, \Delta x=0.1$ 时的改变量及微分.

解 函数的改变量 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=1.1^2-1^2=0.21$.

在点 $x=1$ 处, $y'|_{x=1}=2x|_{x=1}=2$, 所以函数的微分 $dy=y'|_{x=1}\Delta x=2\times 0.1=0.2$.

例 8 求 $y=\cos x$ 的微分.

解 $dy=(\cos x)'dx=-\sin x dx$.

3. 微分在近似计算中的应用

由微分的定义知, 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微, 且 $|\Delta x|$ 很小, 则有近似公式

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x, \text{或 } \Delta y=dy$$

也即

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

若令 $x_0+\Delta x=x$, 则有

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0). \tag{2-3}$$

特别地, 当 $x_0=0$ 且 $|x|$ 很小时, 式(2-3)可写为

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x.$$

例 9 计算 $\sin 44°$ 的近似值.

解 令 $f(x)=\sin x$, 则 $f'(x)=\cos x$, 取 $x_0=45°=\frac{\pi}{4}$, $\Delta x=-1°=-\frac{\pi}{180}$, 有

$$\sin 44°=\sin(45°-1°)=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{\pi}{180}\right)\right]$$

$$\approx\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\times\left(-\frac{\pi}{180}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{180}\approx 0.694\ 8.$$

习题 2-1

1. 用导数定义求 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=4$ 处的导数.

2. 设 $f'(x_0)$ 或 $f'(0)$ 存在,按照导数定义观察下列极限,指出 A 各表示什么.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=A$;(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$,其中 $f(0)=0$;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=A$;(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=A$.

3. 一质点做直线运动,其运动方程为 $s=3t^2+1$,求 $t=2$ 时的瞬时速度.

4. 问曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 上哪一点的切线与直线 $y=3x-1$ 平行?

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$,求 $f'_+(0)$ 和 $f'_-(0)$,问 $f'(0)$ 是否存在?

6. 试确定常数 a,b 的值,使函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续且可导.

7. 求 $y=x^5$ 的微分.

8. 求 ln1.01 的值.

第二节 函数的求导法则

在第一节里,我们不仅阐述了导数概念的实质,也给出了根据定义求函数导数的方法,但如果对每一个函数,都用导数的定义去求它的导数,那将非常烦琐,甚至是困难的.本节将根据导数的定义和极限运算法则推出求导数运算的几个基本法则和导数的基本公式.借助这些法则和公式,就能比较方便地求出初等函数的导数.

一、导数的四则运算法则

定理 2.3 设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)都在点 x 处可导,且有如下求导法则:

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$.

(2) $(uv)'=u'v+uv'$.

(3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\ (v\neq 0)$.

下面只给出法则(2)的证明,法则(1)与法则(3)的证明从略.

证明 令 $y=u(x)v(x)$.

(1)求函数 y 的增量.给 x 以增量 Δx,相应地 $u(x),v(x),y(x)$ 各有增量

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x),\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x),$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)\\&=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]\\&=\Delta uv(x+\Delta x)+u(x)\Delta v.\end{aligned}$$

(2)求比值. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

(3)取极限. 由于 $u(x)$ 和 $v(x)$ 均在 x 处可导,所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x),\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'(x).$$

又因为 $v(x)$ 在 x 处可导,故 $v(x)$ 在 x 处必连续,即

$$\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x).$$

从而,有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

即

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

推论 1 法则(1)和法则(2)可推广到有限多个可导函数的情形.

推论 2 $(kf(x))'=kf'(x)$(k 为常数).

推论 3 $\left(\dfrac{k}{f(x)}\right)'=-k\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$($k$ 为常数).

例 10 已知 $f(x)=\log_a\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos x-3e^x+\sin\dfrac{\pi}{3}$,求 $f'(x)$.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=(\log_a\sqrt{x})'+(\sqrt{x}\cos x)'-(3e^x)'+\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)'\\&=\left(\frac{1}{2}\log_a x\right)'+(\sqrt{x})'\cos x+\sqrt{x}(\cos x)'-3(e^x)'+0\\&=\frac{1}{2}\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\cos x+\sqrt{x}\cdot(-\sin x)-3e^x\\&=\frac{1}{2x\ln a}+\frac{\cos x}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}\sin x-3e^x.\end{aligned}$$

例 11 求 $y=\tan x$ 的导数.

解
$$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

即

$$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

同理可得

$$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 12 求 $y=\sec x$ 的导数.

解
$$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x,$$

即

$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$

同理可得

$$(\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

例 13 设 $f(x)=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$,求 $f'(x)$.

解
$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{(x\sin x)'(1+\cos x)-x\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}\\&=\frac{(\sin x+x\cos x)(1+\cos x)-x\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin x(1+\cos x)+x(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x+x}{1+\cos x}.$$

二、复合函数的求导法则

在实际问题中遇到的函数多是由几个基本初等函数复合而成的复合函数，因此复合函数的求导法则是求导运算中经常应用的一个重要法则. 关于复合函数的求导，我们有下面的定理：

定理 2.4（链锁法则） 若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，函数 $y=f(u)$ 在对应点 u 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{或}\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x).\tag{2-4}$$

证明 设自变量 x 有改变量为 Δx 时，对应函数 $u=\varphi(x)$ 和 $y=f(u)$ 的改变量分别为 Δu 和 Δy，由于 $y=f(u)$ 可导，即 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ 存在，故由无穷小与函数极限的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha\left(\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0\right).\tag{2-5}$$

用 Δu 乘以式(2-5)两边，得

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\Delta u+\alpha\Delta u.\tag{2-6}$$

再用 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$ 除式(2-6)两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

于是，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{或}\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\varphi'(x).$$

式(2-4)说明，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，可先求出 $y=f(u)$ 对 u 的导数和 $u=\varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可. 显然，复合函数的求导法则可以推广到含有多个中间变量的情形. 例如，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 都可导，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\text{或 }y'=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x).$$

例 14 求 $y=\sin\sqrt{x}$ 的导数.

解 函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 由函数 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 复合而成，根据复合函数的求导法则，得

$$y'=(\sin u)'(\sqrt{x})'=\cos u\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

例 15 求函数 $y=\ln\tan\frac{x}{2}$ 的导数.

解 此函数可看作由 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$ 复合而成，因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=(\ln u)'\cdot(\tan v)'\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{u}\cdot\sec^2 v\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

对复合函数的分解及复合函数的求导法则比较熟练后，就可以不写中间变量，只要认清函数的复合层次并默记在心，然后由外向内逐层求导就可以了，关键是必须清楚每一步对哪个变量求导. 比如对上述函数，有

$$y'=\left(\ln\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\sin x}=\csc x.$$

例 16 设 $y=3^{\sin^2\frac{1}{x}}$，求 y'.

解 $y'=(3^{\sin^2\frac{1}{x}})'=3^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 3\left(\sin^2\frac{1}{x}\right)'=3^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 3\cdot 2\sin\frac{1}{x}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$

$$=3^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 3\cdot 2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=3^{\sin^2\frac{1}{x}}\ln 3\cdot\sin\frac{2}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{\ln 3}{x^2}3^{\sin^2\frac{1}{x}}\cdot\sin\frac{2}{x}.$$

例 17 设 $y=e^{\arctan\sqrt{x}}$，求 y'.

解 $y'=e^{\arctan\sqrt{x}}\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\arctan\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

三、反函数的求导法则

定理 2.5 若函数 $x=\varphi(y)$ 在点 y 处单调可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应点 x 处可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

证明 由于 $x=\varphi(y)$ 单调连续，所以它的反函数 $y=f(x)$ 也单调连续，给 x 以增量 $\Delta x\neq 0$，由 $y=f(x)$ 的单调性可知 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$，因而有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \tag{2-7}$$

根据 $y=f(x)$ 的连续性可知，当 $\Delta x\to 0$ 时，必有 $\Delta y\to 0$. 而 $x=\varphi(y)$ 可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，于是式(2-7)两端取极限得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即反函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且有 $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

例 18 求 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，$x=\sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\dfrac{dx}{dy}=\cos y\neq 0$，所以

$$y'=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

即
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得
$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

四、导数的基本公式

(1) $(C)'=0$（C 为常数）；　(2) $(x^a)'=ax^{a-1}$（$a\in\mathbf{R}$）；

(3) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$；　(4) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(5) $(a^x)'=a^x\ln a$（$a>0, a\neq 1$）；　(6) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$；　(8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$；　(10) $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$；　(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$；　(16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

导数的基本公式是进行导数运算的基础，应熟记.

习题 2-2

1. 求下列各函数的导数.

(1) $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{4}$；(2) $y=\frac{x^5+\sqrt{x}+1}{x^3}+\cos\frac{\pi}{3}$；(3) $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$；

(4) $y=x^2\sin x$；(5) $y=\frac{1}{x+\cos x}$；(6) $y=x\sin x\ln x$；(7) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.

2. 求下列各函数在指定点处的导数值.

(1) $f(x)=6a^x-3\tan x+5$（$a>0$），求 $y'|_{x=0}$；(2) $f(t)=\frac{t-\sin t}{t+\sin t}$，求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. 求曲线 $y=2x^3+3x^2-12x+1$ 上具有水平切线的点.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=(x^3-x)^6$；(2) $y=\cos\sqrt{x}$；(3) $y=\arcsin(1-x)$；(4) $y=\ln(x^2+\cos x)$；

(5) $y=\mathrm{e}^{x^3+x^2-1}$；(6) $y=\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$；(7) $y=\csc^3 x$；(8) $y=\sec^2\frac{x}{2}$；

(9) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；(10) $y=10^{x^2\tan x}$；(11) $y=\mathrm{e}^{\sin^2\frac{1}{x}}$；(12) $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$.

5. 求下列函数的导数(f,g 是可导函数).

(1) $y=f(x^2)$;(2) $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$;

(3) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;(4) $y=f(e^x)e^{g(x)}$.

第三节　隐函数及参数方程确定的函数的导数与高阶导数

第二节给出的求导公式和求导法则,对于有些特殊形式的函数,或者不能直接套用,或者直接利用公式和法则会很烦琐.因此,本节就几类特殊形式的函数,讨论其相应的求导方法.

一、隐函数的导数

1. 隐函数的求导方法

前面遇到的函数都是形如 $y=f(x)$ 的函数,这种函数称为**显函数**.但在实际问题中,还会遇到用方程表示函数关系的情形,如 $e^{x+y}-xy=0$.这种由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数称为**隐函数**.

有些隐函数是可以化为显函数的,比如由 $x+y-5=0$ 确定的隐函数,可从方程中解出 y,化为 $y=5-x$(称为隐函数的**显化**).但在很多情况下,隐函数是很难或根本无法显化的,如 $xy-e^x+e^y=0$ 就无法显化.

如何在不显化的情况下求出隐函数的导数呢?一般的作法是:方程两边同时对 x 求导,把 y 看成 x 的函数,应用复合函数的求导法则得到一个含有 y' 的方程,再解出所求的隐函数的导数 y'.这就是**隐函数的求导法**.

例 19　求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数的导数 y'.

解　方程两边同时对 x 求导.注意到 y 是 x 的函数,由复合函数的求导法则得

$$y+xy'-e^x+e^y y'=0,$$

解出 y',得隐函数的导数为

$$y'=\frac{e^x-y}{x+e^y}\,(x+e^y\neq 0).$$

例 20　求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ 在点 $(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ 处的切线方程.

解　方程两边同时对 x 求导,得 $\frac{x}{2}+\frac{y}{8}y'=0$,所以

$$y'=-\frac{4x}{y}\,(y\neq 0),\ y'\big|_{(\sqrt{2},2\sqrt{2})}=-2.$$

故所求的切线方程为

$$y-2\sqrt{2}=-2(x-\sqrt{2}),$$

即

$$2x+y-4\sqrt{2}=0.$$

2. 隐函数求导法的应用——对数求导法

当直接求某些显函数的导数比较烦琐时,可将它化为隐函数,用隐函数的求导法求其导

数. 将显函数化为隐函数的常用方法是等号两边取对数,称为**对数求导法**. 对数求导法适用于由乘、除、乘方、开方运算所构成的比较复杂的函数及幂指函数 $y=[f(x)]^{g(x)}$.

例 21 设 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$,求 y'.

解 方程两边同时取对数,得 $\ln y=\dfrac{1}{2}\ln(x+2)+4\ln(3-x)-5\ln(x+1)$,

方程两边同时对 x 求导,得 $\dfrac{1}{y}y'=\dfrac{1}{2(x+2)}-\dfrac{4}{3-x}-\dfrac{5}{x+1}$,

所以 $$y'=\frac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}\left[\frac{1}{2(x+2)}-\frac{4}{3-x}-\frac{5}{x+1}\right].$$

例 22 设 $y=x^{\sin x}(x>0)$,求 y'.

解 方程两边同时取对数,得 $\ln y=\sin x\ln x$,

方程两边同时对 x 求导,得 $\dfrac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\dfrac{1}{x}\sin x$,

所以 $$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

二、参数方程确定的函数的导数

设由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$($t$ 为参数)确定了函数 $y=f(x)$. 下面根据复合函数与反函数的求导法则,推导出由参数方程确定的函数的导数公式.

若函数 $x=\varphi(t)$,$y=\psi(t)$都可导,且 $\varphi'(t)\neq0$,又 $x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,则函数 $y=f(x)$可看成是由 $y=\psi(t)$与 $t=\varphi^{-1}(x)$复合而成的复合函数,根据复合函数与反函数的求导法则,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 23 求由参数方程 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ 确定的函数 $y=f(x)$的导数.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

三、高阶导数

定义 2.5 若函数 $y=f(x)$的导数 $y'=f'(x)$仍是 x 的可导函数,则 $f'(x)$的导数称为 $f(x)$的**二阶导数**,记作 y'',$f''(x)$,$\dfrac{d^2y}{dx^2}$或$\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

类似地,二阶导数的导数称为**三阶导数**,记作 y'''或$\dfrac{d^3y}{dx^3}$;三阶导数的导数称为**四阶导数**,记作 $y^{(4)}$或$\dfrac{d^4y}{dx^4}$. 一般地,$n-1$ 阶导数的导数称为$f(x)$的 n **阶导数**,记作 $y^{(n)}$或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

二阶或二阶以上的导数统称为**高阶导数**. 相应地,函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$叫作函数

$f(x)$的**一阶导数**. 显然,求高阶导数就是多次接连地求导.

例 24 求指数函数 $y=a^x$ 的 n 阶导数.

解 $y'=a^x\ln a, y''=a^x\ln^2 a, y'''=a^x\ln^3 a$,依次类推 $y^{(n)}=a^x\ln^n a$,即

$$(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a.$$

特别地

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$

例 25 设 $y=\sin x$,求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$y''=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)$,

$y'''=\cos\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\times\frac{\pi}{2}\right),\cdots$

$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{Z})$.

同理可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)(n\in\mathbf{Z}).$$

例 26 求函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 的二阶及三阶导数.

解 $y'=-\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$,

$y''=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-\mathrm{e}^{-x}(-\sin x+\cos x)=2\mathrm{e}^{-x}\sin x$,

$y'''=-2\mathrm{e}^{-x}\sin x+2\mathrm{e}^{-x}\cos x=2\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x)$.

例 27 求由方程 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 所确定的函数的二阶导数.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{b}{a}\csc^2 t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

一般地,由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ 确定的函数的二阶导数$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$可以这样得到:

因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$
$$=\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\Big/\varphi'(t)=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

习题 2-3

1. 求由下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$的对数.

(1)$y^3+x^3-3xy=0$;(2)$y^2=\cos(x+y)$.

2. 用对数求导法求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{(2x+3)\sqrt[4]{x-6}}{\sqrt[3]{x+1}}$；(2) $y=(\sin x)^{\cos x}(\sin x>0)$.

3. 求由下列各参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的对数.

(1) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1} \\ y=\dfrac{t}{(t+1)^2} \end{cases}$；(2) $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$.

4. 求曲线 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法线方程.

5. 求下列函数指定阶的导数.

(1) $f(x)=e^x\cos x$，求 $f^{(4)}(x)$；(2) $f(x)=\ln\sin x$，求 $y''(x)$；

(3) $f(x)=xe^x$，求 $f^{(n)}(x)$；(4) $f(x)=\ln(1+x)$，求 $y^{(n)}$.

6. 设 $\begin{cases} x=2e^t \\ y=e^{-t} \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

第四节　导数的应用

导数在自然科学与工程技术中都有极其广泛的应用. 本节将在介绍微分中值定理的基础上，引出计算未定型极限的新方法——洛必达法则；并以导数为工具，讨论函数及其图形的性态，解决一些常见的应用问题.

一、微分中值定理与洛必达法则

1. 微分中值定理

微分中值定理包括罗尔定理、拉格朗日中值定理和柯西中值定理，它们是微分学的基本定理，是导数通向微分学许多应用的桥梁，在微分学的理论和应用中均占有重要地位.

定理 2.6［罗尔(Rolle)定理］　若函数 $y=f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(2) 在开区间 (a,b) 内可导.

(3) $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明从略.

罗尔定理的几何意义是：若连续曲线除端点外处处都有不垂直于 x 轴的切线，且端点的函数值相等，则曲线上至少存在一点，过该点的切线平行于 x 轴(见图 2-3).

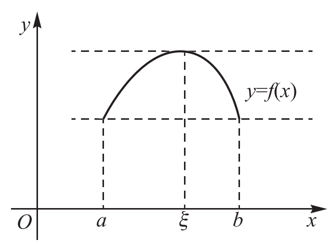

图 2-3

罗尔定理中 $f(a)=f(b)$ 这个条件相当特殊，它使罗尔定理的应用受到限制. 若把 $f(a)=f(b)$ 这个条件取消，但仍保留其余两个条件，并相应地改变结论，则可得到微分学中十分重要的拉格朗日中值定理.

定理 2.7［拉格朗日(Lagrange)中值定理］　若函数 $y=f(x)$ 满足条件：

(1)在闭区间$[a,b]$上连续.

(2)在开区间(a,b)内可导,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)\text{或 }f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

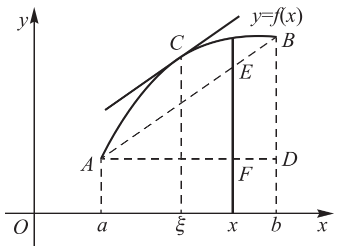

图 2-4

先看拉格朗日中值定理的几何意义:若连续曲线除端点外处处都有不垂直于x轴的切线,则曲线上至少存在一点,过该点处曲线的切线平行于过两端点的割线(见图 2-4).

怎样证明呢?从图形看,若能把弓形ABC放置到水平位置,它就是罗尔定理的几何意义.为此需要把$\triangle ABD$移走,即在$x\in[a,b]$对应的$f(x)$中减去对应于$\triangle ABD$中的一段.具体讲,构造一个函数$F(x)$,使

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

证明 令$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,显然,$F(x)$在$[a,b]$上连续,在$(a,b)$内可导,且$F(a)=f(a)$,$F(b)=f(a)$,即$F(x)$满足罗尔定理的条件,故至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

推论 1 设函数$f(x)$在区间I上可导,且$f'(x)\equiv 0$,则$f(x)$在区间I上是一个常数.

推论 2 设$f(x)$与$g(x)$都在区间I上可导,且$f'(x)=g'(x)$,则$f(x)=g(x)+C$.

定理 2.8[柯西(Cauchy)中值定理] 若函数$f(x)$,$F(x)$满足下列条件:

(1)在闭区间$[a,b]$上连续.

(2)在开区间(a,b)内可导,且$F'(x)\neq 0$,

则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}. \tag{2-8}$$

证明从略.

例 28 不求函数$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$的导数,说明方程$f'(x)=0$有几个实根,并指出它们所在的区间.

解 显然,$f(x)$在区间$[1,2]$,$[2,3]$上满足罗尔定理,所以,至少存在一点$\xi_1\in(1,2)$,$\xi_2\in(2,3)$,使得$f'(\xi_1)=0$,$f'(\xi_2)=0$,即方程$f'(x)=0$至少有两个实根,又因为$f'(x)=0$是一个一元二次方程,最多有两个实根,所以方程$f'(x)=0$有且仅有两个实根,且分别在区间$(1,2)$和$(2,3)$内.

例 29 证明$e^x>1+x(x>0)$.

证明 设$f(x)=e^x-1-x$,要证$f(x)>0$,由于$f(0)=0$,故只需证$f(x)-f(0)>0$.易知$f(x)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理的条件,则在$(0,x)$内至少存在一点$\xi(0<\xi<x)$,使得$f(x)-f(0)=f'(\xi)x$成立,即

$$f(x)-f(0)=(e^\xi-1)x.$$

又因为$\xi>0$时,$e^\xi>1$,故$(e^\xi-1)x>0$,从而$f(x)>0$,即

$$e^x>1+x(x>0).$$

2. 洛必达法则

两个无穷小之比或两个无穷大之比的极限分别称为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式. 洛必达法则就是以导数为工具计算未定式极限的一种新方法.

定理 2.9 设函数$f(x)$与$F(x)$满足条件:

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim\limits_{x\to x_0}F(x)=0$.

(2)$f(x)$和$F(x)$在点x_0的某去心邻域内可导,且$F'(x)\neq 0$.

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A$(或$\infty$),则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=A(\text{或}\infty). \tag{2-9}$$

证明 因为$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}$是否存在与$f(x_0)$和$F(x_0)$的值无关,故可假定$f(x_0)=F(x_0)=0$,又由条件(1)和条件(2)可知$f(x)$与$F(x)$在点$x_0$的某去心邻域内连续.

设x是该邻域内的任意一点($x\neq x_0$),则在$[x_0,x]$上$f(x)$与$F(x)$满足柯西中值定理的条件,因此存在一点$\xi(x_0<\xi<x)$,使

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{F(x)-F(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

当$x\to x_0$时,有$\xi\to x_0$,所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

说明 (1)将此定理中的"$\frac{0}{0}$"型换成"$\frac{\infty}{\infty}$"型;"$x\to x_0$"换成"$x\to\infty$",结论仍成立.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$仍为"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式,且$f'(x)$与$F'(x)$满足定理2.9中$f(x)$与$F(x)$所满足的条件,则可继续使用,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\cdots \tag{2-10}$$

式(2-10)定理给出的这种在一定的条件下,通过对分子、分母分别求导,再求极限来确定未定式值的方法称为**洛必达法则**.

例 30 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$;(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$;(3)$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x}$;(4)$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}(n\in\mathbf{N},\lambda>0)$.

解 (1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\cos x}=2$;

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\left(\text{“}\frac{0}{0}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$;

(3)$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}=2\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=2\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$;

(4)$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}\left(\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}\right)=\cdots$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots2\times1}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0\text{（连续施行 }n\text{ 次洛必达法则）}.$$

对于其他未定式（如 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 型），可以经过适当变形，化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型未定式.

例 31 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$；(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$；(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$；(4) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)$（“$\infty\cdot0$”型）$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$（“$\frac{0}{0}$”型）

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1;$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$（“$\infty-\infty$”型）$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$（“$\frac{0}{0}$”型）$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x+1-1}{\ln x+\frac{x-1}{x}}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\text{（“}\tfrac{0}{0}\text{”型）}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

(3) 这是“∞^0”型未定式，利用对数恒等式 $\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^{-\tan x\ln x}$，有

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}\text{（“}\infty^0\text{”型）}=\lim_{x\to0^+}e^{-\tan x\ln x}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\tan x\ln x}\text{（“}0\cdot\infty\text{”型）}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\tan x}}}\text{（“}\tfrac{\infty}{\infty}\text{”型）}$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin^2x}{x}}=e^0=1;$$

(4) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}$（“$1^\infty$”型）$=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{1-x}\ln x}=\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}}$（“$\frac{0}{0}$”型）$=e^{\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}$.

洛必达法则虽然是求未定式极限的一种有效方法，但若能与其他求极限的方法相结合，效果会更好，如能化简时尽量化简，等价无穷小代换，两个重要极限等，以达到简化运算的目的. 另外，使用洛必达法则时，一定要随时注意检验是否满足所需条件.

例 32 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{(1-\cos x)\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\frac{1}{2}x^2\cdot2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.$$

例 33 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\sin x}{x}$.

解 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sin x)$ 不存在，故该极限不能使用洛必达法则计算，应考虑用其他

方法.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=1-0=1.$$

二、函数的单调性与曲线的凹凸性

1. 函数的单调性

单调性是函数的重要性态之一，它既决定着函数递增和递减的状况，又能帮助我们研究函数的极值，还能证明某些不等式和分析函数的图形. 下面利用导数来判断函数的单调性.

定理 2.10 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，则有

(1) 若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

证明 现只对(1)进行证明，(2)类似可证.

设 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 上的任意两点，且 $x_1<x_2$，在 $[x_1,x_2]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\ (x_1<\xi<x_2),$$

由于在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，且 $x_2-x_1>0$，故有

$$f(x_2)-f(x_1)>0,\text{即 } f(x_2)>f(x_1).$$

又由于 x_1,x_2 是 $[a,b]$ 上的任意两点，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

注意 若把定理中的闭区间换成其他各种区间，结论仍然成立.

例 34 讨论函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 的单调性.

分析 要判断 $f(x)$ 的单调性，要确定 $f'(x)$ 的符号，为此可先求出 $f'(x)=0$ 的根及函数的不可导点(如果有的话)，用这些点将函数的定义域划分成若干区间，逐个判断 $f'(x)$ 的符号，从而确定出函数在各个区间上的单调性.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，令

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)=0$$

则得 $x_1=1$，$x_2=3$. 用 x_1,x_2 把定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成三个区间，下面分别讨论 $f'(x)$ 的符号：

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调增加；

当 $x\in(1,3)$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 在 $[1,3]$ 上单调减少；

当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调增加.

例 35 试证：当 $x>0$ 时，不等式 $\ln(1+x)<x$.

证明 令 $f(x)=\ln(1+x)-x$，由于 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1$.

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)=\ln(1+x)-x$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少，从而有

$$f(x)<f(0)=0,\text{即 } \ln(1+x)-x<0.$$

所以，当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)<x$.

2. 曲线的凹凸性

函数的单调性反映在图形上，就是曲线的上升或下降. 但是在上升或下降的过程中，还有一个弯曲方向的问题. 例如，图 2-5 中的两条曲线弧都是单调上升的，但弯曲方向明显不同. 弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 是向上凸的曲线弧，而弧 $\overset{\frown}{ADB}$ 是向下凸的曲线弧.

从几何上看，在有的曲线弧上任取两点，则连接这两点的弦总是位于这两点间的弧段上

方[见图 2-6(a)];而有的曲线弧则正好相反[见图 2-6(b)].曲线的这种性质就是曲线的凹凸性.下面给出曲线凹凸性的定义.

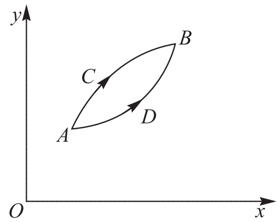

图 2-5

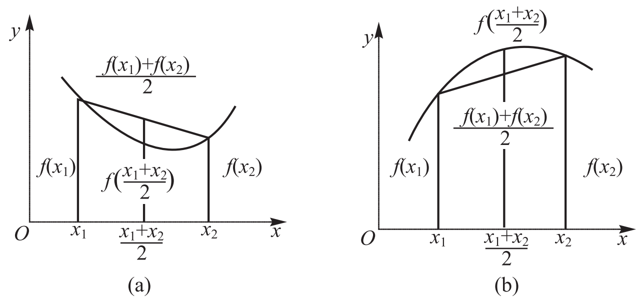

图 2-6

定义 2.6 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续,若对 I 上任意两点 x_1,x_2,恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\left(\text{或 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$

则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是**凹的**(或**凸的**),区间 I 称为**凹区间**(或**凸区间**).凹(或凸)的曲线称为**凹弧**(或**凸弧**).凹弧与凸弧的分界点称为**拐点**.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 内有二阶导数,则可以利用二阶导数来判断曲线的凹凸性.

定理 2.11 设函数 $f(x)$ 在 I 内具有二阶导数,则

(1)若在 I 内 $f''(x)>0$,则曲线 $y=f(x)$ 在 I 内是凹的.

(2)若在 I 内 $f''(x)<0$,则曲线 $y=f(x)$ 在 I 内是凸的.

例 36 判定曲线 $y=x^3$ 的凹凸性与拐点.

解 函数 $y=x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,$y'=3x^2$,$y''=6x$.令 $y''=0$,得 $x=0$.当 $x<0$ 时,$y''<0$,曲线是凸的;当 $x>0$ 时,$y''>0$,曲线是凹的.曲线的拐点是 $(0,0)$.由于拐点是曲线凹凸的分界点,所以拐点左右两侧近旁 $f''(x)$ 必然异号.因此,曲线拐点的横坐标 x_0 只可能是使 $f''(x)=0$ 的点或 $f''(x)$ 不存在的点.从而可得判断曲线凹凸与拐点的步骤如下:

(1)求出函数的定义域及 $f''(x)$.

(2)求出 $f''(x)=0$ 的点及 $f''(x)$ 不存在的点.

(3)对于(2)中的每一个点,考察 $f''(x)$ 在其左右两侧的符号,确定函数的凹凸区间及拐点.

例 37 求曲线 $y=x^4-2x^3+1$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且

$$y'=4x^3-6x^2,y''=12x^2-12x=12x(x-1).$$

令 $y''=0$,得 $x=0$,$x=1$.列表讨论如下:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	+	0	−	0	+
y	凹	拐点	凸	拐点	凹

所以,曲线在 $(-\infty,0)$,$(1,+\infty)$ 内是凹的;在 $(0,1)$ 内是凸的;$(0,1)$ 和 $(1,0)$ 是曲线的拐点.

例 38 求曲线 $y=(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间及拐点.

解 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$y'=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}},y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}.$$

当 $x=2$ 时，y'' 不存在；没有二阶导数为零的点. 列表讨论如下：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
y''	$-$	不存在	$+$
y	凸	拐点	凹

所以，曲线在 $(-\infty,2)$ 内是凸的，在 $(2,+\infty)$ 内是凹的，拐点是 $(2,0)$.

三、函数的极值与最值

1. 函数的极值

定义 2.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，若对该邻域内任一点 $x(x\neq x_0)$ 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（或 $f(x)\geqslant f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的**极大值**（或**极小值**），x_0 称为函数 $f(x)$ **极大值点**（或**极小值点**）. 函数的极大值和极小值统称为**极值**，极大值点和极小值点统称为**极值点**（见图 2-7）.

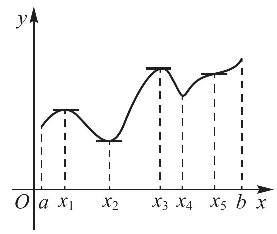

图 2-7

注意 极值是函数的局部性态，而函数的最值是指定区域内的整体性态，两者不可混淆.

定理 2.12（极值的必要条件） 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

方程 $f'(x)=0$ 的实根叫作函数 $f(x)$ 的**驻点**.

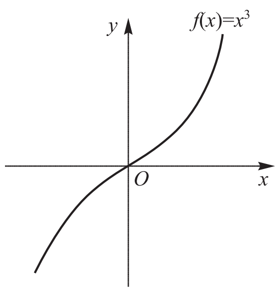

图 2-8

由定理 2.12 知，可导函数的极值点必定是它的驻点，但函数的驻点不一定是它的极值点. 例如，对函数 $f(x)=x^3$ 来说，$f'(0)=0$，但当 $x<0$ 时 $f(x)<0$；当 $x>0$ 时 $f(x)>0$，所以 $x=0$ 不是它的极值点（见图 2-8）.

另外，函数还可能在连续但不可导的点处取得极值. 例如，函数 $y=|x|$，显然在 $x=0$ 处连续但不可导，而 $x=0$ 为该函数的极小值点.

综上所述，函数在其驻点或在连续但不可导的点处取得极值.

定理 2.13（极值的第一充分条件） 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在点 x_0 的某一去心邻域内可导. 若

(1) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值.

(2) 当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值.

(3) 当 $x<x_0$ 与 $x>x_0$ 时，$f'(x)$ 具有相同的符号，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

证明 (1) 由于 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧单调增加，所以当 $x<x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$；又 $f(x)$

在点 x_0 的右侧单调减少，所以当 $x>x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)$. 即在 x_0 附近总有 $f(x)<f(x_0)$. 因此 $f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值.

同理可证(2)和(3).

由此可得求连续函数极值的步骤：

(1)确定函数的定义域，求出 $f'(x)$.

(2)解方程 $f'(x)=0$，求出定义域内的所有驻点及不可导点.

(3)讨论$f(x)$的驻点及不可导点左右两侧邻近范围内 $f'(x)$的符号，确定函数的极值点.

(4)求出各极值点的函数值，得到$f(x)$的全部极值.

例 39　求函数$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ 的极值.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3).$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，$x=3$；又$f(x)$无不可导点. 列表讨论如下：

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

由上表可知，函数$f(x)$的极大值是 $f(1)=1$，极小值是$f(3)=-3$，如图 2-9 所示.

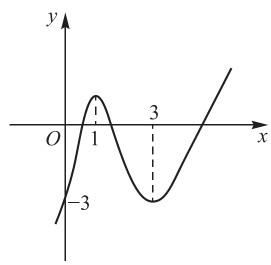

图 2-9

例 40　求函数$f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$的极值.

解　函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且 $f'(x)=\dfrac{10}{3}\cdot\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ $(x\neq0)$.

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$，又 $x=0$ 是不可导的点. 列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

由上表可知，函数$f(x)$的极大值是 $f(0)=0$，极小值是 $f(1)=-3$，如图 2-10 所示.

若可导函数在驻点处具有不为零的二阶导数，则可用极值存在的第二充分条件判定该驻点是否为极值点，有时这种方法比前述方法简便一些.

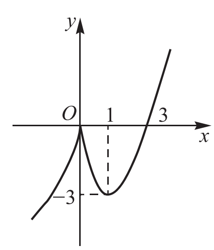

图 2-10

定理 2.14(极值的第二充分条件)　设函数$f(x)$在点 x_0 处具有二阶导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq0$，则

(1)当 $f''(x_0)<0$ 时，函数$f(x)$在点 x_0 处取得极大值.

(2)当 $f''(x_0)>0$ 时，函数$f(x)$在点 x_0 处取得极小值.

证明　(1)由二阶导数的定义及$f'(x_0)=0$，有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

由极限的保号性知，存在 x_0 的某个邻域，使该邻域内的一切 $x(x\neq x_0)$，都有

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0.$$

因此，当 $x<x_0$ 时，有 $f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，有 $f'(x)<0$，由极限的第一充分条件知，$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值.

同理可证(2).

例 41 求函数$f(x)=x^3-3x$ 的极值.

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，且

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1),f''(x)=6x.$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=-1,x=1$. 由于 $f''(-1)=-6<0$，$f''(1)=6>0$，所以函数有极大值 $f(-1)=2$，极小值 $f(1)=-2$.

2. 函数的最值

若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值和最小值，且只能在区间(a,b)内的极值点(驻点或不可导点)或区间的端点处取得. 于是，求闭区间$[a,b]$上连续函数的最值就是求出上述各点的函数值并进行比较，其中最大者就是最大值，最小者就是最小值.

例 42 求函数 $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ 在$[0,3]$上的最大值和最小值.

解 由于函数在$[0,3]$上连续且 $y'=\dfrac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$. 所以，函数在$(0,3)$内的驻点为 $x=1$，不可导点为 $x=2$.

又 $y(0)=y(2)=0$，$y(1)=1$，$y(3)=\sqrt[3]{9}$，故函数在$[0,3]$上的最大值为 $y(3)=\sqrt[3]{9}$，最小值为 $y(0)=y(2)=0$.

对于实际问题，往往根据问题的性质就可断定目标函数 $f(x)$确有最大值(或最小值). 此时，若在定义区间内只有唯一的驻点 x_0，则无须讨论 $f(x_0)$是否为极值，就可断定 $f(x_0)$就是所求的最大值(或最小值).

例 43 设有一块边长为 a 的正方形铁皮(见图 2-11)，在其每个角截去同样大小的一个正方形，问截去的正方形的边长多大，才能使用剩下的铁皮折成的无盖方盒的容积最大？

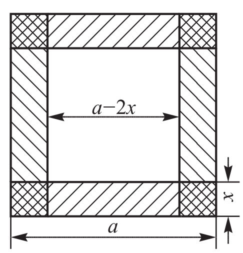

图 2-11

解 设截去的正方形的边长为 x，则方盒的容积为

$$V=(a-2x)^2x\left(0<x<\frac{a}{2}\right).$$

$$V'=a^2-8ax+12x^2=(a-2x)(a-6x).$$

令 $V'=0$，得驻点 $x=\dfrac{a}{2}$(不合题意，舍去)，$x=\dfrac{a}{6}$.

由于 V 在$\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$内只有唯一的驻点 $x=\dfrac{a}{6}$，且盒子的最大容积是存在的，所以当 $x=\dfrac{a}{6}$时，V 取得最大值，即方盒的容积最大.

例 44 一公司生产某种商品，其年销售量为 100 万件，每生产一批商品需增加准备费

1 000 元，商品的库存费为每件 0.05 元，若年销售率是均匀的且上一批销售完后，立即生产下一批(此时商品库存为批量的 1/2). 问分几批生产，才能使生产准备费与库存费之和最小？

解 设分 x 批生产，生产准备费与库存费之和为 y，根据题意，得

$$y=1\ 000x+\frac{1\ 000\ 000}{2x}\times 0.05=1\ 000x+\frac{25\ 000}{x}\ (x>0),$$

$$y'=1\ 000-\frac{25\ 000}{x^2}.$$

令 $y'=0$，得 $x=5$，$x=-5$(不合理，舍去).

因此，当 $x=5$ 时，y 取最小值，即应分 5 批生产，就能使生产准备费与库存费之和最小.

*四、函数图形的描绘

准确描绘函数图形，除了要清楚函数的定义域、值域、单调性、极值、最值、凹凸性、拐点等性态外，有时还需要清楚图形无限延伸的趋势. 下面介绍渐近线的定义.

定义 2.8 对曲线 $y=f(x)$，若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$)，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$ 的**垂直渐近线**；设曲线 $y=f(x)$ 的定义域是无穷区间，若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$)，则称直线 $y=b$ 为 $y=f(x)$ 的**水平渐近线**.

例如，曲线 $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ 有两条垂直渐近线 $x=-1$，$x=2$；曲线 $y=\arctan x$ 有两条水平渐近线 $y=\pm\dfrac{\pi}{2}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}\right)$.

例 45 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平渐近线和垂直渐近线.

解 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$，因此，$y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平渐近线；又由于 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$，因此，$x=1$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的一条垂直渐近线.

综合前面的讨论，描绘函数的图形可按下述步骤进行：

(1)确定函数的定义域.

(2)考察函数的奇偶性及周期性.

(3)求出 $f'(x)=0$ 与 $f''(x)=0$ 的点及 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 不存在的点.

(4)列表讨论函数的单调区间、极值、凹凸区间、拐点.

(5)考察曲线的渐近线.

(6)求出某些特殊点的坐标，如曲线与坐标轴的交点、极值点、拐点等.

(7)用光滑曲线描绘出函数的图形.

例 46 描绘函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

解 该函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$y'=-\frac{4(x+2)}{x^3},\ y''=\frac{8(x+3)}{x^4}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x=-2$；令 $y''=0$，得 $x=-3$. 由于使 y' 和 y'' 不存在的点 $x=0$ 不在定义区间内部，所以不予考虑. 列表讨论单调性、极值、凹凸性、拐点如下：

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$-$		$-$	0	$+$		$-$
y''	$-$	0	$+$		$+$		$+$
y	↘	$\left(-3,-2\frac{8}{9}\right)$	↘	$f(-2)=-3$	↗	间断	↘
	凸	拐点	凹	极小值	凹		凹

因为 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right)=-2$，所以，$y=-2$ 是水平渐近线.

又因为$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right)=\infty$，所以 $x=0$ 是垂直渐近线.

描出几个点 $A(-1,-2)$，$B(1,6)$，$C(2,1)$，$D\left(3,-\frac{2}{9}\right)$，极小值点为 $E(-2,-3)$，拐点为 $F\left(-3,-2\frac{8}{9}\right)$，与 x 轴的交点为$(1+\sqrt{3},0)$，$(1-\sqrt{3},0)$.

根据以上讨论作出函数的图形，如图 2-12 所示.

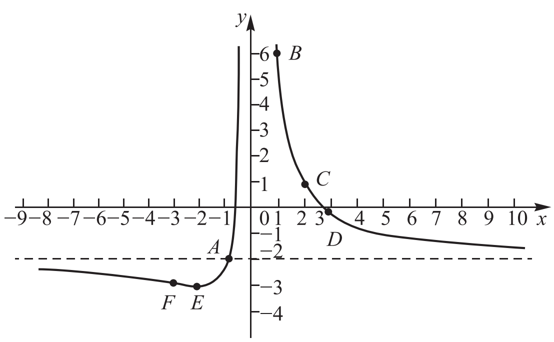

图 2-12

习题 2-4

1. 验证下列各题，并求出相应的点 ξ.

(1)对函数 $f(x)=\cos 2x$ 在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上验证罗尔定理；

(2)对函数 $f(x)=x^4$ 在区间$[1,2]$上验证拉格朗日中值定理.

2. 求下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；(2)$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$；(3)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\sin x}$；(4)$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$；

(5)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$；(6)$\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}$；(7)$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；(8)$\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

3. 求下列函数的单调区间.

(1)$y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$；(2)$y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

4. 证明下列不等式.

(1)当 $x\leqslant 0$ 时，$x\leqslant\arctan x$，当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant\arctan x$；

(2)当 $x>0$ 时，$e^x>1+x$.

5.求下列函数的极值.

(1)$f(x)=2x^3-3x^2-12x+21$；(2)$y=x+\sqrt{1-x}$.

6.求下列函数在给定区间上的最大值与最小值.

(1)$y=x+2\sqrt{x}, x\in[0,4]$；(2)$y=\sin 2x-x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

7.要做一个圆锥形漏斗，其母线长 20 cm，问其高应为多少才能使漏斗的体积最大？

8.有甲、乙两城，甲城位于一直线形的河岸边，乙城离岸边 40 km，乙城到岸边的垂足与甲城相距 50 km，两城要在此河边合建一水厂取水，从水厂到甲城和到乙城的水管费用分别为每公里 500 元和 700 元，问此水厂建在河边何处，才能使水管费用最省？

9.求下列函数图形的凹凸区间和拐点.

(1)$y=x^3-5x^2+3x-5$；(2)$y=\ln(1+x^2)$.

10.求下列函数的渐近线.

(1)$y=e^x$；(2)$y=\frac{e^x}{1+x}$.

11.作出下列函数的图形.

(1)$y=x^3-x^2-x+1$；(2)$y=\frac{x}{x^2+1}$.

第五节　导数在经济分析中的应用

需求函数、供给函数、成本函数、收益函数和利润函数等这些在讨论经济问题时涉及的函数，通常称为经济函数.本节利用导数来讨论经济分析中的边际分析、弹性分析和最优化问题.

一、边际函数与边际分析

边际概念是经济学中的一个重要概念，通常指经济变量的变化率.变化率一般分为平均变化率和瞬时变化率，平均变化率是指函数的增量与自变量的增量之比，瞬时变化率就是函数对自变量的导数.在经济分析中，常用“边际”这个概念来描述一个变量 y 关于另一个变量 x 的变化情况.“边际”表示在 x 的某一个值的“边缘上”y 的变化情况，即当 x 在某一个给定值的附近发生微小变化时 y 的变化情况，即变量 y 对变量 x 的导数.

定义 2.9　设经济函数 $y=f(x)$是可导函数，则其导函数 $f'(x)$称为 $y=f(x)$的**边际函数**，$y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$称为在点 x_0 处的**边际函数值**，而利用导数研究经济变量的边际变化的方法称为**边际分析法**.

注意　根据导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，当 x 在 x_0 处改变一个单位($\Delta x=1$)时，函数的增量为 $\Delta y=f(x_0+1)-f(x_0)$；但当 x 改变的“单位”很小，或者说 x 的“一个单位”与 x_0 相比很小时，函数的增量 $\Delta y=f(x_0+1)-f(x_0)\leqslant f'(x_0)$，因此

边际值近似地表示函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处增加一个单位时，y 改变的大小. 在经济学中，解释边际函数值的具体意义时，通常略去“近似”二字.

下面将边际函数的概念具体到不同的经济函数，分别讨论常用的边际成本、边际收益、边际利润及其经济意义.

1. 边际成本

成本函数 $C(q)$ 的导数 $C'(q)$ 称为**边际成本函数**. 其**经济意义**是：**当产量为 q 时，每增加(或减少)生产一个单位产品所增加(或减少)的成本.**

例如，成本函数 $C(q)=q^2$ 在 $q=2$ 时的边际函数值 $C'(2)=2q\big|_{q=2}=4$，它表示当 $q=2$ 时，产量增加一个单位，总成本增加 4 个单位；产量减少一个单位，总成本减少 4 个单位.

例 47 已知某商品的总成本函数为 $C(q)=0.5q^2+10q+400$(元)，试求：

(1) 当 $q=20$ 件时的总成本和平均成本；

(2) 当从 $q=20$ 件到 $q=30$ 件时总成本的平均变化率；

(3) 当 $q=20$ 件的边际成本，并解释其经济意义.

解 (1) 当 $q=20$ 件时的总成本为

$$C(20)=0.5\times20^2+10\times20+400=800(\text{元}),$$

平均成本为

$$\overline{C(20)}=\frac{C(20)}{20}=\frac{800}{20}=40(\text{元}).$$

(2) 当从 $q=20$ 件到 $q=30$ 件时总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(q)}{\Delta q}=\frac{C(30)-C(20)}{10}=\frac{1\ 150-800}{10}=35.$$

(3) 边际成本函数为

$$C'(q)=q+10.$$

所以

$$C'(20)=20+10=30(\text{元}).$$

经济意义是：当产量为 20 件时，增加(或减少)生产 1 件产品，总成本将增加(或减少) 30 元.

2. 边际收益

收益函数 $R(q)$ 的导数 $R'(q)$ 称为**边际收益**，其**经济意义**是：**当销售量为 q 时，每增加(或减少)一个单位的销售量，收益将增加(或减少) $R'(q)$ 个单位.**

例 48 设某产品的需求函数为 $q=100-5p$(元/件)，求销售量为 20、50、70 件时的边际收益，并说明边际收益的经济意义.

解 总收益函数为

$$R=R(q)=qp=\frac{1}{5}q(100-q)=20q-\frac{1}{5}q^2,$$

边际收益函数为

$$R'(q)=20-\frac{2}{5}q.$$

则销售量为 20、50、70 件时的边际收益分别为

$$R'(20)=20-\frac{2}{5}\times20=12(\text{元});R'(50)=0(\text{元});R'(70)=-8(\text{元}).$$

其经济意义分别为：当销售量为 20 件时，每增加(或减少)销售 1 件产品，收益将增加(或减少)12 元；当销售量为 50 件时，每增加(或减少)销售 1 件产品，收益不变；当销售量为 70 件时，每增加(或减少)销售 1 件产品，收益反而减少(或增加)8 元，此时减少销售量可以提高收益.

3. 边际利润

利润函数 $L(q)$的导数 $L'(q)$称为**边际利润**，其**经济意义**为：**当销售量为 q 时，每增加(或减少)一个单位的销售量所增加(或减少)的利润.**

例 49 某公司月生产 q 千吨的总成本函数为$C(q)=40+111q-7q^2+\frac{1}{3}q^3$(万元)，相应的总收益函数为 $R(q)=100q-q^2$(万元)，求 $q=10$ 千吨时的边际成本、边际收益和边际利润，并解释其经济意义.

解 边际成本为

$$C'(q)=(40+111q-7q^2+\frac{1}{3}q^3)'=111-14q+q^2.$$

边际收益为

$$R'(q)=(100q-q^2)'=100-2q.$$

边际利润为

$$L'(q)=R'(q)-C'(q)=(100-2q)-(111-14q+q^2)=-11+12q-q^2.$$

当 $q=10$ 千吨时，

$$C'(10)=111-14\times10+10^2=71(\text{万元}),$$
$$R'(10)=100-2\times10=80(\text{万元}),$$
$$L'(10)=-11+12\times10-10^2=9(\text{万元}).$$

经济意义是：当产量为 10 千吨时，每增加(或减少)生产 1 千吨，成本增加(或减少)71 万元，收益将增加(或减少)80 万元，利润增加(或减少)9 万元.

一般地，若边际收益大于边际成本，即 $R'(q)>C'(q)$，边际利润 $L'(q)=R'(q)-C'(q)>0$，则增加单位产量会获利；反之，若边际收益小于边际成本，即 $R'(q)<C'(q)$，边际利润$L'(q)<0$，则增加单位产量会亏本. 因此，企业最优产量(获取最大利润的产量)应为边际收益等于边际成本时的产量.

二、弹性函数与弹性分析

1. 弹性函数

在边际分析中，边际函数指的是函数的变化率，这个变化率是绝对的，函数的改变量也是绝对的，但用绝对改变量和绝对变化率的概念不能更深入地分析经济里面的问题. 例如，对两种商品进行涨价，甲商品原价 1 000 元，现在涨价 1 元，乙商品原价 10 元，现在同样涨价 1 元，两种商品的绝对改变量都是 1 元，但是哪种商品涨价的幅度更大，哪种商品涨价对市场的需求影响更大呢？显然，用绝对改变量去和原价进行比较后，发现甲商品的涨幅为0.1%，乙商品的涨幅为 10%，一般来说可推测甲商品的涨价对甲商品的市场需求影响不大. 因此，我们有必要研究函数的相对改变量和相对变化率.

定义 2.10 设 $y=f(x)$在 x_0 处可导，函数的相对改变量$\frac{\Delta y}{f(x_0)}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{f(x_0)}$与自变量的相对改变量$\frac{\Delta x}{x_0}$之比$\frac{\Delta y}{f(x_0)}/\frac{\Delta x}{x_0}$称为函数 $y=f(x)$在点 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的**弧弹**

性(**或平均相对变化率**);如果极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{f(x_0)}\Big/\dfrac{\Delta x}{x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\dfrac{x_0}{f(x_0)}$存在,则此极限称为函数 $y=f(x)$在 x_0 处的**点弹性**(**或相对变化率**),记作$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$或$\dfrac{Ef(x_0)}{Ex_0}$.

由弹性定义可知:$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\dfrac{x_0}{f(x_0)}=f'(x_0)\dfrac{x_0}{f(x_0)}$.

如果函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内可导,则(a,b)内任意点 x 的点弹性$\dfrac{Ey}{Ex}=x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$称为函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的**点弹性函数**,简称**弹性函数**.

显然,函数 $y=f(x)$在 x_0 处的点弹性$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$就是点弹性函数$\dfrac{Ey}{Ex}$在 x_0 处的函数值.

注意 (1)函数 $y=f(x)$在 x_0 处的点弹性$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$反映了函数 $y=f(x)$在 x_0 处随自变量 x 的变化而变化的幅度的大小,即当 x 在 x_0 处改变 1%时,函数改变$\left.\dfrac{Ey}{Ex}\right|_{x=x_0}$%.

(2)弹性数值与变量的度量单位无关,这使得弹性在经济学中得到了广泛应用,因为经济学中各种商品的计量单位是不尽相同的,所以比较不同商品的弹性时,可不受计量单位的限制.

下面介绍几个常用的经济函数的弹性.

2.弹性分析

1)需求价格弹性

设需求函数 $q_d=f(p)$可导,则需求函数 $q_d=f(p)$的弹性$\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}q_d}{\mathrm{d}p}=\dfrac{p}{f(p)}f'(p)$称为**需求价格弹性**,简称**需求弹性**,记作 E_d.

一般地,由于 $p>0$,需求量 $q=f(p)>0$,边际需求 $f'(p)<0$(需求函数是单调递减的),所以需求价格弹性 $E_d=\dfrac{p}{f(p)}f'(p)<0$.故需求价格弹性的经济意义是:**当价格为 p 时,若价格提高或降低 1%,则需求由 q 起减少或增加 $|E_d|$%.**

需求价格弹性反映了当价格变动时需求变动对价格变动的灵敏程度.一般分为如下三类:

(1)当$|E_d|<1$,即$-1<E_d<0$ 时,称需求是**低弹性的**.这时,价格提高或降低 1%,需求减少或增加将小于 1%.

(2)当$|E_d|>1$,即 $E_d<-1$ 时,称需求是**弹性的**.这时,价格提高或降低 1%,需求减少或增加将大于 1%.

(3)当$|E_d|=1$,即 $E_d=-1$ 时,称需求是**单位弹性的**.这时,价格提高或降低 1%,需求恰好减少或增加 1%.

例 50 设某产品的需求函数为 $q=400-100p$,分别求 $p=0.8$,$p=2$,$p=3$ 时的需求价格弹性,并说明其经济意义.

解 由需求函数得边际需求 $q'=-100$,需求弹性为

$$E_d=\frac{p}{f(p)}f'(p)=\frac{p}{400-100p}\times(-100)=-\frac{100p}{400-100p}.$$

当 $p=0.8$ 时,$E_d=-0.25$,需求是低弹性的.因 $p=0.8$ 时,需求量 $q=320$,这说明当价格 $p=0.8$ 时,价格提高或降低 1%,需求 q 将由 320 起减少或增加 0.25%.

当 $p=2$ 时，$E_d=-1$，需求是单位弹性的. 因 $p=2$ 时，需求量 $q=200$，这说明当价格 $p=2$ 时，价格提高或降低 1%，需求 q 将由 200 起减少或增加 1%.

当 $p=3$ 时，$E_d=-3$，需求是弹性的. 因 $p=3$ 时，需求量 $q=100$，这说明当价格 $p=3$ 时，价格提高或降低 1%，需求 q 将由 100 起减少或增加 3%.

2)需求弹性与收益的关系

设需求函数为 $q_d=f(p)$，将总收益函数表示成价格 p 的函数为

$$R(p)=q_d p=f(p)p,$$

则收益 R 对价格 p 的导数是收益 R 对价格 p 的边际收益，即

$$\frac{dR}{dp}=f(p)+pf'(p)=f(p)\left(1+\frac{p}{f(p)}f'(p)\right)=f(p)(1+E_d). \tag{2-11}$$

式(2-11)给出了收益 R 关于价格 p 的边际收益与需求弹性 E_d 之间的关系. 分析式(2-11)并注意到 $f(p)>0$，$E_d<0$，有

(1)当 $-1<E_d<0$ 时，因 $\frac{dR}{dp}>0$，故总收益函数 $R(p)$ 是单调增函数，此时总收益随价格的提高而提高. 换句话说，当低弹性时，由于需求下降的幅度小于价格提高的幅度，所以提高价格可使收益增加.

(2)当 $E_d<-1$ 时，因 $\frac{dR}{dp}<0$，故总收益函数 $R(p)$ 是单调减函数，此时总收益随价格的提高而减少. 这是因为需求是弹性的，需求下降的幅度大于价格提高的幅度.

(3)当 $E_d=-1$ 时，因 $\frac{dR}{dp}=0$，故总收益是常数，此时总收益不随价格的变动而变动.

综上所述，总收益的变化受需求价格弹性的制约，随需求价格弹性的变化而变化. 所以测定商品的需求价格弹性，对进行市场分析、确定或调整商品的价格有参考价值.

例 51 设某商品的需求函数为 $q_d=f(p)=150-2p^2$，求：

(1)需求弹性；

(2)当 $p=3$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3)当 $p=3$ 时，若价格上涨 1%，则总收益变化百分之几？是增加还是减少？

(4)当 $p=6$ 时，若价格上涨 1%，则总收益变化百分之几？是增加还是减少？

解 (1)需求弹性为

$$E_d=\frac{p}{f(p)}f'(p)=\frac{2p^2}{p^2-75}.$$

(2)当 $p=3$ 时，需求弹性为

$$E_d=\frac{2\times 3^2}{3^2-75}\approx -0.27.$$

当 $p=3$ 时，$q_d(3)=150-2\times 3^2=132$.

其经济意义为：当 $p=3$ 时，价格上涨或下降 1%，需求量从 132 减少或增加 0.27%.

(3)当 $p=3$ 时，因为 $-1<E_d<0$，所以价格上涨 1%，总收益增加. 总收益对价格的弹性为

$$\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R(p)}R'(p)=\frac{p}{pf(p)}[pf(p)]'=1+E_d,$$

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=3}=(1+E_d)\big|_{p=3}\approx 1-0.27=0.73.$$

故当 $p=3$ 时，价格上涨 1%，总收益增加 0.73%.

(4)当 $p=6$ 时,因为需求弹性 $E_d\big|_{p=6}=\frac{2\times6^2}{6^2-75}\approx-1.85$,总收益对价格的弹性为 $\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=(1+E_d)\big|_{p=6}\approx1-1.85\approx-0.85$,所以当 $p=6$ 时,价格上涨 1%,总收益减少 0.85%.

经济领域中的任何函数都可类似地定义弹性,并做出经济分析.例如,设供给函数 $q_s=\varphi(p)$ 可导,则可定义**供给价格弹性**,简称**供给弹性**,记作 E_s,即

$$E_s=\frac{p}{q_s}\cdot\frac{\mathrm{d}q_s}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{\varphi(p)}\varphi'(p).$$

一般地,由于供给函数 $q_s=\varphi(p)$ 是单调增加的,即 $\varphi'(p)>0$,又 $p>0$,$\varphi(p)>0$,因此供给价格弹性 $E_s>0$.供给价格弹性 E_s 的经济意义是:当价格为 p 时,若价格提高或降低 1%,则供给量将由 q 起增加或减少 E_s%.

三、经济分析中的最值问题

在经济生活中,为了达到经济效益的最大化,经常会碰到如何组织生产,使得投入最少、成本最低、利润最大等问题.下面通过例题进行讨论.

1. 利润最大问题

设某商品的总收益函数为 $R(q)$,总成本函数为 $C(q)$,则总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

为了求最大利润,需求总利润函数的一阶导数,即

$$L'(q)=R'(q)-C'(q).$$

令 $L'(q)=0$,得 $R'(q)=C'(q)$.

又因为要取得最大值,则要求 $L''(q)<0$,即 $R''(q)<C''(q)$,所以当 $R'(q)=C'(q)$,且 $R''(q)<C''(q)$时,利润最大.

例 52 设某厂生产某种机器的成本函数为 $C(q)=3q+150$(万元),得到的收益函数为 $R(q)=9q-0.02q^2$(万元),问生产并销售多少台机器时利润达到最大?

解 总利润函数为

$$L(q)=R(q)-C(q)=(9q-0.02q^2)-(3q+150)=-0.02q^2+6q-150,$$

边际利润函数为

$$L'(q)=-0.04q+6.$$

令 $L'(q)=0$,得 $q=150$,由于 $L''(q)=-0.04<0$,所以当销售 150 台机器时,利润达到最大,最大利润为 $L(150)=300$(万元).

2. 成本最低问题

设某商品的成本函数为 $C(q)$,平均成本为$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$,令

$$\overline{C}'(q)=\frac{C'(q)q-C(q)}{q^2}=0,$$

得

$$C'(q)=\frac{C(q)}{q}.$$

由此可知,使平均成本最低的生产水平就是使边际成本等于平均成本的生产水平.

例 53 设某产品的成本函数为 $C(q)=\frac{1}{4}q^2+7q+36$，求最低平均成本和相应产量的边际成本.

解 平均成本函数为

$$\overline{C}(q)=\frac{\frac{1}{4}q^2+7q+36}{q}=\frac{1}{4}q+7+\frac{36}{q},$$

令 $\overline{C}'(q)=\left(\frac{1}{4}q+7+\frac{36}{q}\right)'=\frac{1}{4}-\frac{36}{q^2}=0$，得 $q=12$.

又因为 $\overline{C}''(q)=\frac{72}{q^3}>0$，所以当 $q=12$ 时，平均成本最低.

边际成本函数为

$$C'(q)=\frac{1}{2}q+7.$$

当 $q=12$ 时，边际成本 $C'(12)=\frac{1}{2}\times12+7=13$.

通过例 53 可以验证：当生产水平使边际成本等于平均成本时，平均成本最低.

3. 存货总费用最小问题

某批发零售公司进行进货销售业务，在总需求一定的条件下，存在订货费用与存货成本费用的问题. 若订货批量大，订购次数少，则订购费用少，存货保管费用多；若订购次数多，则存货保管费用少，订购费用多. 所以就存在一个如何确定订货批量使得存货总费用最小的问题.

例 54 某商店每年销售某种商品 5 000 件，每次订货的手续费为 50 元，商品的进价为 5 元/件，存货费用是平均库存商品进价的 10%，平均库存量是批量的 1/2，求最优订货批量.

解 设订货批量为 q 件，则年订货费为 $50\times\frac{5\ 000}{q}$(元)，年存储费为 $\frac{q}{2}\times5\times0.1=0.25q$(元)，商品的进货费为 25 000 元，于是，全年的总费用为

$$E(q)=50\times\frac{5\ 000}{q}+0.25q+25\ 000.$$

令

$$E'(q)=\left(50\times\frac{5\ 000}{q}+0.25q+25\ 000\right)'=-\frac{250\ 000}{q^2}+0.25=0,$$

得 $q=1\ 000$，而 $E''(q)=\left(-\frac{250\ 000}{q^2}+0.25\right)'=\frac{500\ 000}{q^3}>0$.

所以，当每次订货 1 000 件时，总费用最小. 最小费用为

$$E(1\ 000)=50\times\frac{5\ 000}{1\ 000}+0.25\times1\ 000+25\ 000=25\ 500(\text{元}).$$

习题 2-5

1. 求下列函数的边际函数和弹性函数.

(1) $y=ax^2+bx+c$；(2) $y=x^a\mathrm{e}^{-b(x+c)}$；(3) $y=64\mathrm{e}^{4x}$.

2. 某公司已估算出产品的成本函数为 $C(q)=0.1q^2-0.4q+360$(万元)，求：

(1) $q=10$ 件时的总成本；

(2)$q=10$ 件时的平均成本和边际成本，并解释 $q=10$ 件时边际成本的经济意义；

(3)当产量为多少时，平均成本最低？求出最低平均成本，并求出相应产量的边际成本.

3.某产品的需求函数为 $q=94-p^2$(元/件)，求销售量 $q=30$ 件时的总收益与边际收益，并说明边际收益的经济意义.

4.设生产某产品的成本函数为 $C(q)=0.1q^2+60q+1\ 000$(元)，收益函数为 $R(q)=300q-0.3q^2$(元)，求：

(1)当 $q=10$ 时的总利润和边际利润，并解释当 $q=10$ 时的边际利润的经济意义；

(2)当公司生产并销售多少件产品时，利润最大？最大利润是多少？

5.设某商品的需求函数为 $q=75-p^2$，求：

(1)需求弹性函数；

(2)当 $p=4$ 时的需求弹性，并说明其经济意义；

(3)当 $p=4$ 时，价格上涨 1%，总收益变化百分之几？是增加还是减少？

6.设某企业的需求函数和平均成本函数分别为

$$p(q)=30-0.75q,\overline{C}(q)=\frac{30}{q}+9+0.3q.$$

(1)求相应的产出水平，分别使收益最大、平均成本最低、利润最大；

(2)在下述情况下，试求获得最大利润的产出水平：

①当政府所征收一次总付税为 10；

②当政府对每单位产品征收的税款(税率)为 8.4；

③当政府给予每单位产品的补贴为 4.2.

7.某商店每年销售某种商品 10 000 件，每次订货的手续费为 40 元，商品的进价为 2 元/件，存储费是平均库存商品进价的 10%，平均库存量是批量的 1/2，求最优订货批量.

测试题二

一、填空题

1.若 $f(u)$ 可导，则 $y'=\left[f(\sin\sqrt{x})\right]'=$__________.

2.若 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-4h)-f(3)}{3h}=$__________.

3.$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ 的极小值是__________.

4.曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 在点(1,2)的切线方程是__________.

5.已知 $xy+x+y=1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$__________.

二、判断题

1.函数 $f(x)$ 在 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在 x_0 处必连续. (　　)

2.一元函数的驻点一定是它的极值点. (　　)

3.函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导与可微的关系是相等的. (　　)

4.$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{1}=0.$ (　　)

5.极大值一定大于极小值. (　　)

三、选择题

1. 设 $f(x)$ 可导，且下列各极限均存在，则下列等式不成立的是(　　).

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a)}{h}=f'(a)$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2, & x>1\\ 1, & x\leqslant 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处(　　).

A. 不连续　　B. 连续，但不可导

C. 连续且有一阶导数　　D. 有任意阶导数

3. 下列四个函数在$[-1,1]$上满足罗尔定理条件的是(　　).

A. $y=8|x|+1$　　B. $y=4x^2+1$

C . $y=\dfrac{1}{x^2}$　　D. $y=|\sin x|$

4. 函数 $y=3x^5-5x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上有(　　).

A. 四个极值点　　B. 三个极值点

C. 二个极值点　　D. 一个极值点

5. 参数方程 $\begin{cases}x=at^2\\ y=bt^3\end{cases}$ 确定的函数的导数 $y'=$(　　).

A. $\dfrac{3bt}{2a}$　　B. $2at$

C. $3bt^2$　　D. $\dfrac{2a}{3bt}$

四、综合题

1. 求下列函数的导数.

(1)$y=(\arctan x^2)^2$；(2)$y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$；(3)$y=\ln\tan\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)$；

(4)$y=x+\arctan y$；(5)$y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\sin x}$；(6)$y=\dfrac{\sqrt{x-2}(3-x)^4}{\sqrt[3]{x+1}}$；(7)$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$.

2. 求下列函数的二阶导数.

(1)$y=\ln(1-x^2)$；(2)$y=(1+x^2)\cos x$.

3. 求下列函数的微分.

(1)$y=\dfrac{x}{1+x^2}$；(2)$y=\mathrm{e}^{ax}\cos bx$；(3)$y=\sin xy$.

4. 利用微分求下列各式的近似值.

(1)$\sin 30.5°$；(2) $\sqrt[6]{65}$.

5. 求下列函数的极限.

(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln\cos x}$；(2)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$；(3)$\lim\limits_{x\to\infty}x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)$；(4)$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.

6. 利用函数的单调性证明下列不等式.

(1)当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x$；(2)当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.

7. 求下列函数的单调区间与极值.

(1) $y=x-\ln(1+x)$;(2) $y=x-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

8. 求函数 $y=\frac{x^2}{1+x}$ 的凹凸区间、拐点、渐近线,并描绘其图形.

9. 铁路 AB 段的距离为 100 km,工厂 C 距离 A 处 20 km,AC 与 AB 垂直,今要在 AB 间一点 D 向 C 修一条公路,使从原料供应站 B 运货到工厂所用费用最省,问 D 应选在何处?(已知铁路与公路每千米运费之比为 3∶5).

10. 设某商品的需求函数为 $q=108-p^2$,试求:

(1) 当 $p=4$ 时的边际需求,并说明经济意义;

(2) 当 $p=4$ 时的需求弹性,并说明经济意义;

(3) 当 $p=4$ 时,若价格上涨 1%,总收益是增加还是减少?它将变化百分之几?

(4) 当 $p=7$ 时,若价格上涨 1%,总收益是增加还是减少?它将变化百分之几?

(5) 在 p 为多少时,总收益最大?

阅读材料

微积分发展简史(一)

微积分学是微分学和积分学的总称,它是一种数学思想,“无限细分”就是微分,“无限求和”就是积分.微积分的产生一般分为三个阶段:极限的概念,求积的无限小方法,积分与微分的互逆关系.

17 世纪,欧洲的社会经济迅猛发展,资本主义工业的大型生产使得力学在科学中的地位越来越重要.于是,一系列的力学问题及与此有关的问题便呈现在科学家们的面前.以力学的需要为中心,产生了大量的数学问题.例如,由距离和时间的函数关系,如何求物体在任意时刻的速度和加速度;由加速度和时间的函数关系如何求物体的速度和距离,怎样求曲线上任意一点处的切线,或确定运动问题在运行轨道上任意一点处的运动方向;求函数的最大值和最小值;找到求曲线的长度、曲线所围图形的面积、曲面所围成立体的体积及物体的重心的一般方法等.微分的概念起源于对曲线切线、函数极值及瞬时变化率问题的处理.17 世纪的微积分正是围绕着这些问题的解决逐步建立起来的.微分的概念和方法在欧洲也已经历了一段酝酿的过程.

皮埃尔·德·费马(Pierre de Fermat,1601—1665)是微积分创立的先驱工作者之一,他于 1629 年撰写了《求极大值与极小值的方法》,用与现代方法十分相似的方法求切线和极值.意大利物理学家、数学家伽利略·伽利雷(Galileo Galilei,1564—1642)通过列表法研究求函数最值问题,在观察中得出很多重要结果.1669 年,英国数学家伊萨克·巴罗(Isaac Barrow,1630—1677)首次采用微分三角形来求切线,这种方法非常接近现代微分法,弥补了费马求切线方法的不足,为微分理论做出了重要的贡献,进一步推动了微分学概念的产生.笛卡儿(Rene Descartes,1596—1650)的代数方法对推动微积分的早期发展方向有很大的影

响,在创立了坐标系后,他又于1637年成功地创立了解析几何学.笛卡儿的解析几何引入了变数,加深了函数的理念.有了函数才能真正地建立起微积分,他的这一成就为微积分的创立奠定了基础.从17世纪起,欧洲一些天文学家、物理学家和数学家就曾零散地涉猎微分问题.当时,微分和积分是作为两类数学问题,分别加以研究的,所以巴罗等得到的一系列求面积(积分)、求切线斜率(导数)的重要结果都是孤立的、不连贯的.

17世纪下半叶,在前人工作的基础上,英国大科学家牛顿(Isaac Newton,1642—1727)和德国数学家莱布尼兹(Gottfried Wilhelm Leibniz,1646—1716)各自独立创立了微积分.牛顿在1671年写了《流数法和无穷级数》,这本书直到1736年才出版,他在这本书里指出,变量是由点、线、面的连续运动产生的,否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止集合.他把连续变量称为流动量,把这些流动量的导数称为流数.牛顿在流数术中所提出的中心问题是:已知连续运动的路径,求给定时刻的速度(微分法);已知运动的速度求给定时间内经过的路程(积分法).莱布尼兹是一个博才多学的学者,1684年,他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献,这篇文章有一个很长且很古怪的名字:"一种求极大极小值和切线的新方法,它也适用于分式和无理量,以及这种新方法的奇妙类型的计算."文章从几何学的角度论述微分法则,得到微分学的一系列基本结果.1686年他又发表了第一篇积分学的论文,可以求出原函数.这两篇文献均早于牛顿首次发表的微积分结果(1687年),但他开始从事研究的时间要晚近十年,因此数学史上将他们二人并列作为微积分的创立者.

数学家费马

费马(Pierre de Fermat,1601—1665),法国著名数学家,被誉为"业余数学家之王".费马通晓法语、意大利语、西班牙语、拉丁语和希腊语,而且还颇有研究.语言方面的博学给费马的数学研究提供了语言工具和便利,使他有能力学习、了解阿拉伯和意大利的代数及古希腊的数学.费马一生从未受过专门的数学教育,数学研究也不过是业余爱好.但他却在《平面与立体轨迹引论》中明确指出方程可以描述曲线,并可通过方程研究推断曲线的性质,得到解析几何要旨,与笛卡儿分享这一科学创立的荣誉;在现代微分学中给出函数取极值的必要条件,提出求极值和拐点的步骤,通过求和过程得到求曲线所围面积的公式,是早期微积分学的先驱之一;他还通过与帕斯卡通信,讨论赌金分配问题,得出正确解答,成为概率论的共同创立者之一.此外,费马对物理学也有重要贡献.但最能显示出他的才华且对后人影响巨大的还是他在数论方面的工作,他在数论中提出了著名的费马大、小定理.在他生命的最后15年里,他几乎把全部精力都放到了对数论的研究上.费马在光学中的突出贡献是提出最小作用原理,也叫最短时间作用原理.费马同时讨论了光在逐点变化的介质中行进时,其路径取极小的曲线的情形,并用最小作用原理解释了一些问题.这给许多数学家以很大的鼓舞.一代数学天才费马堪称17世纪法国最伟大的数学家之一.