第二章

向量与向量空间

“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段，是一种带几何性质的量，除零向量外，都可以画出箭头表示方向，故向量又被称为矢量. 很多物理量，如力、速度、位移及电场强度、磁感应强度等，都是向量.

向量空间的概念是数学中最基本的概念和线性代数的中心内容，它的理论和方法在自然科学的各领域中具有广泛的应用. 而向量及其线性运算则为向量空间这一抽象的概念提供了一个具体的模型.

本章主要介绍 n 维向量的有关概念和向量空间的基本概念. 先讨论向量的线性运算及向量组的线性相关性，然后引入极大无关向量组的概念，定义向量组的秩，并进一步讨论向量组的秩与矩阵的秩的关系. 最后给出向量空间的概念.

第一节　n 维向量及其线性运算

一、n 维向量

在解析几何中，平面上的几何向量$\overrightarrow{OP}$的坐标可用一个二元有序数组(x,y)

表示,而空间里的几何向量$\overrightarrow{OP}$的坐标则是一个三元有序数组(x,y,z).在研究其他问题时,也常遇见有序数组.例如,将组成社会生产的各个部门的产品或劳务的数量,按一定次序排列起来,就得到了国民经济各部门产品或劳务的有序数组.

定义 2.1 由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 维向量,记为

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n] \text{或} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

其中,$a_i(i=1,2,\cdots,n)$称为该向量的第 i 个分量.向量所含分量的个数 n 称为向量的维数.

分量全为实数的向量称为实向量,分量为复数的向量称为复向量.本书只讨论实向量.

向量一般用希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示,其分量一般用小写的英文字母 a_i,b_i,$c_i,\cdots$表示,例如,可以记

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n],\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}=[c_1,c_2,\cdots,c_n]$$

等等.

n 维向量可写成一行或是一列,分别称之为 n 维行向量和 n 维列向量.我们可借助于矩阵转置的记号把列(行)向量写成行(列)向量的形式.例如,

$$\boldsymbol{\alpha}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\text{与}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

可写成

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$$

需要注意的是,按照定义 2.1,$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 应是同一个向量,但按照矩阵相等的定义,$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 总被看作两个不同的向量.

【例 2-1】 对于 $m\times n$ 型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

我们将 $\boldsymbol{A}$ 按行分块,则其每一行都是一个 n 维行向量,即

$$\boldsymbol{\alpha}_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,m)$$

我们将 $\boldsymbol{A}$ 按列分块,则其每一列都是一个 m 维列向量,即

$$\boldsymbol{\beta}_j=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]^{\mathrm{T}}(j=1,2,\cdots,n)$$

若干个同维数的列向量(或是同维数的行向量)组成的集合称为向量组.

例如,【例 2-1】中的 $m\times n$ 型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体列向量是一个含有 n 个 m 维列向量的向量组;而它的全体行向量则是一个含有 m 个 n 维行向量的向量组.

二、n 维向量的线性运算

按照第一章的定义,行向量和列向量分别就是行矩阵和列矩阵. 因此,可按

照矩阵的相关运算规则对向量运算进行定义.

定义 2.2 所有分量都是零的向量称为零向量,记为

$$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$$

由 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 各分量的相反数构成的向量,称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量. 记为

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

定义 2.3 如果 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 对应的分量相等,即 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$,那么称这两个向量相等. 记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

定义 2.4 设 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 对应分量的和所构成的 n 维向量称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和,记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$$

由向量的加法和负向量的定义,还可以定义向量的减法,记为 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$. 即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$$

定义 2.5 设 k 为常数,数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的各分量的乘积所构成的 n 维向量,称为数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积(简称数乘),记为 $k\boldsymbol{\alpha}$,即

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$$

向量的加法与数乘运算统称为向量的线性运算. 利用上述定义,不难验证向量的线性运算满足下述八条运算律:

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$(加法交换律).

(2)$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$(加法结合律).

(3)$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

(4)$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

(5)$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$(数乘分配律).

(6)$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$(数乘分配律).

(7)$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$(数乘结合律).

(8)$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 n 维向量,$\mathbf{0}$ 是 n 维零向量,k 和 l 是任意实数.

定义 2.6 设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,则向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的乘积为一阶方阵,即一个数,即

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的乘积为 n 阶方阵,即

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}[b_1,b_2,\cdots,b_n]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$$

【例 2-2】 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}$ 满足

$$3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$$

求向量 $\boldsymbol{\alpha}$.

解 将上式合并同类项,得

$$\begin{aligned}6\boldsymbol{\alpha}&=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3\\&=3\begin{bmatrix}2\\5\\1\\3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}10\\1\\5\\10\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}4\\1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\15\\3\\9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}20\\2\\10\\20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}20\\5\\-5\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\12\\18\\24\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\\12\\18\\24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$$

【例 2-3】 用向量表示线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{2-1}$$

解 对于方程组(2-1),取

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}\tag{2-2}$$

则方程组(2-1)可用向量方程表示成

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}\tag{2-3}$$

这是因为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=x_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+x_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}x_1\\a_{21}x_1\\\vdots\\a_{m1}x_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{12}x_2\\a_{22}x_2\\\vdots\\a_{m2}x_2\end{bmatrix}+\cdots+\begin{bmatrix}a_{1n}x_n\\a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{mn}x_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}=\boldsymbol{\beta}$$

反之,若是给出向量组(2-2),作向量方程(2-3),可得线性方程组(2-1).通常将向量方程(2-3)称为线性方程组(2-1)的向量形式.

第二节　向量组的线性相关性

一、线性组合

两个向量之间最简单的关系是成比例.所谓向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 成比例,即存在一个数 k 使得 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$.也就是说,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 经过线性运算得到.

多个向量之间的比例关系,表现为线性组合.例如,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}=(3,2,3)$.很容易看出 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的 3 倍加上 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 的 2 倍就等于 $\boldsymbol{\alpha}$,即

$$\boldsymbol{\alpha}=3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$$

这时,我们称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合,或称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示.

定义 2.7　对于给定向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得关系式

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{2-4}$$

成立,那么称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合,或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

【例 2-4】 任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都是 n 维向量组

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1)$$

的线性组合.

这是因为,根据向量的线性运算,显然有

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{e}_n$$

其中,n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$的列向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 称为 n 维单位坐标向量组.

【例 2-5】 零向量是任何一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.

这是因为

$$\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n$$

总是成立.

【例 2-6】 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,4,2)^{\mathrm{T}}$,判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

解 假设存在一组数 k_1,k_2,k_3,使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 成立. 即有

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=0\\2k_1+3k_2+k_3=4\\3k_1+k_2+2k_3=2\end{cases}$$

解方程组得唯一解:$k_1=1,k_2=1,k_3=-1$. 所以 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表示,且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

【例 2-7】 判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合,其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-5,-4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,6,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,-1,9,-4)^{\mathrm{T}}$.

解 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合,取决于能否找到一组数 k_1,k_2,k_3,使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$$

成立. 即

$$k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\2\\-5\\-4\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}1\\-1\\6\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\9\\-4\end{bmatrix}$$

亦即判断线性方程组

$$\begin{cases}k_1+3k_2+k_3=1\\-k_1+2k_2-k_3=-1\\-5k_2+6k_3=9\\k_1-4k_2+5k_3=-4\end{cases}$$

是否有解.

经消元法发现该方程组无解,即不存在一组数 k_1,k_2,k_3,使 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 成立,故向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

二、线性相关与线性无关

对于任意一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,一定有 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$. 这就是说,任何一个向量组,它的系数全为零的线性组合一定是零向量. 而有些向量组在系数不全为零的情况下,其线性组合也可以是零向量. 例如,$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,-5)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,-5)$,显然有 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$. 即存在一组不全为零的数 1,−1,1 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合为零向量. 具有这种性质的向量组称为线性相关的向量组.

定义 2.8 给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0} \tag{2-5}$$

那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,否则,称它们线性无关,即仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时,式(2-5)才成立,那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

由此可见，线性相关的向量组与线性无关的向量组是性质相反的两类向量组.

【例 2-8】 由一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 构成的向量组线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

证明

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则由定义 2.8 知，存在数 $k\neq 0$，使得 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，由此得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

反之，若 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，不妨取 $k=2\neq 0$，有 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 成立，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关.

由此可知：一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 构成的向量组线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

【例 2-9】 由两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 构成的向量组线性相关的充要条件是它们的对应分量成比例.

证明 （略）

【例 2-10】 含有零向量的向量组必定线性相关.

事实上，对于向量组 $\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，任取数 $k\neq 0$，即得一组不全为零的数 k，$0,\cdots,0$，使得

$$k\mathbf{0}+0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

故向量组 $\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

【例 2-11】 证明：如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且有 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，那么向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明 假设存在一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$$

即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$$

因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以必有

$$\begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases}$$

求解方程组得唯一的解 $k_1=k_2=k_3=0$,即仅当 $k_1=k_2=k_3=0$ 时,方程 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$ 成立.因此,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

三、向量组线性相关性的有关结论

定理 2.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

证明

必要性:

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关,所以必存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

不妨设 $k_n\neq 0$,将上式移项可得

$$-k_n\boldsymbol{\alpha}_n=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

等式两端同除以 $-k_n$ 得

$$\boldsymbol{\alpha}_n=\frac{k_1}{-k_n}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{k_2}{-k_n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\frac{k_{n-1}}{-k_n}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

即至少有一个向量 $\boldsymbol{a}_n$ 可由其余 $n-1$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$线性表示.

充分性:

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示,不妨设

$$\boldsymbol{\alpha}_n=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$$

则显然有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}-\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},-1$ 使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合为零向量,因此,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

定理 2.2 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线

性相关,那么向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示.

证明 由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,所以存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

若 $k=0$,则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,知 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$.

这与 $k_1,k_2,\cdots,k_n,k$ 不全为零矛盾,因此,$k\neq0$,于是有

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{k_1}{-k}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{k_2}{-k}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\frac{k_n}{-k}\boldsymbol{\alpha}_n$$

即向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

下面证明表达式唯一.

设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种线性表达式,即

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n \text{ 且 } \boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

将两式相减,得

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_n-l_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关知

$$(k_1-l_1)=(k_2-l_2)=\cdots=(k_n-l_n)=0.$$

故 $k_i=l_i(i=1,2,\cdots,n)$,这就证明了表达式的唯一性.

判断一个向量组是否线性相关,最基本的方法是利用定义进行判断. 为了更加便捷地判断向量组之间的线性关系,我们不加证明地给出以下几个定理.

定理 2.3

(1)若向量组的某一个部分组线性相关,则整个向量组线性相关. 反言之,若整个向量组线性无关,则其任一部分组也线性无关.

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 的秩小于向量的个数 n;向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是

$R(\boldsymbol{A})=n$.

(3)由 m 个 n 维向量组成的向量组，当 $n<m$，即向量的维数小于向量的个数时，向量组一定线性相关. 特别地，$n+1$ 个 n 维向量一定线性相关.

【例 2-12】 讨论 n 维单位坐标向量组的线性相关性.

解 n 维单位坐标向量组构成的矩阵

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$$

是 n 阶单位矩阵，由 $|\boldsymbol{E}|=1\neq0$ 知 $R(\boldsymbol{E})=n$，即 $R(\boldsymbol{E})$ 等于向量组中向量的个数，故知此向量组是线性无关的.

定理 2.4 由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$ 构成 $m\times n$ 型矩阵 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ 并对其施行初等行变换，若

$$[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\alpha}_n]\overset{\text{初等行变换}}{\sim}[\boldsymbol{\beta}_1\quad\boldsymbol{\beta}_2\quad\cdots\quad\boldsymbol{\beta}_n]$$

则：

(1)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 线性无关的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 中对应的部分组 $\boldsymbol{\beta}_{i1},\boldsymbol{\beta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{ir}$ 线性无关.

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的某个向量 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j1},\boldsymbol{\alpha}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{jr}$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\alpha}_j=k_1\boldsymbol{\alpha}_{j1}+k_2\boldsymbol{\alpha}_{j2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_{jr}$$

的充要条件是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 中对应的向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 可由对应的部分组 $\boldsymbol{\beta}_{j1},\boldsymbol{\beta}_{j2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{jr}$ 线性表示为

$$\boldsymbol{\beta}_j=k_1\boldsymbol{\beta}_{j1}+k_2\boldsymbol{\beta}_{j2}+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_{jr}$$

证明 （略）

由于任何一个矩阵都可以经过初等行变换化为行最简形矩阵，而行最简形矩阵的列向量组中有一部分是单位坐标向量组的部分组，很容易看出它们的线性相关性. 因此，定理 2.4 给我们提供了一个判断向量组之间线性关系的更为简便的方法.

【例 2-13】 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\7\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-3\\2\\1\\2\end{bmatrix}.$$

判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是否线性相关，如果线性相关，试将其中一个向量表示为其余向量的线性组合.

解 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，并对之进行初等行变化，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵.

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]=\begin{bmatrix}1&2&2&-3\\0&-1&-1&2\\7&3&2&1\\4&1&3&2\end{bmatrix}\overset{\substack{r_3-7r_1\\r_4-4r_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&-3\\0&-1&-1&2\\0&-11&-12&22\\0&-7&-5&14\end{bmatrix}\overset{\substack{r_3-11r_2\\r_4-7r_2}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&2&-3\\0&-1&-1&2\\0&0&-1&0\\0&0&2&0\end{bmatrix}\underset{-r_2}{\overset{\substack{-r_3\\r_4-2r_3}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&-3\\0&1&1&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{\substack{r_2-r_3\\r_1-2r_2-2r_3}}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]=\boldsymbol{B}$$

由 $R(\boldsymbol{B})=3<4$ 知向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1-2\boldsymbol{\beta}_2+0\boldsymbol{\beta}_3$. 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，且有 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3$.

第三节 向量组的秩

在上一节讨论向量组的组合和线性相关性时，矩阵的秩起到了重要作用，为使讨论进一步深入，本节把秩的概念引进向量组.

为了用向量组的部分组表示其整体，我们引进极大线性无关组的概念. 我们知道，线性相关的向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示，逐个去掉被表示的向量，直到得到一个线性无关的部分组，归纳出这个部分组的特征，就得到向量组的极大无关组的概念.

一、向量组的极大无关组与秩

定义 2.9 如果一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的某个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ $(r\leqslant n)$满足下述条件：

(1)$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性无关.

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的任意一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性表示.

那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

显然，任何一个含有非零向量的向量组一定存在极大无关组，而线性无关的向量组的极大无关组就是自身.

根据定理 2.4，我们很容易得到一个求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组的

方法：

以向量组的向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}$，对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$，然后根据 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 向量之间的线性关系得到 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 之间的线性关系，从而求得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组.

【例 2-14】 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,7)^{\mathrm{T}}$ 的极大无关组.

解 作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&2&4\\1&5&7\end{bmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&2\\0&5&5\end{bmatrix}\overset{\substack{\frac{1}{2}r_2\\r_3-5r_2}}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$$

比较容易看出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$，由定理 2.4 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. 由定义 2.9 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

同时，我们还注意到，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$ 也是线性无关的，且 $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\beta}_3-2\boldsymbol{\beta}_1$，由定理 2.4 及定义 2.9 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组. 类似可知 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大无关组.

从上例我们可以看出，一个向量组的极大无关组一般不是唯一的，但极大无关组所包含向量的个数却总是相同的. 这个结果并非偶然，后面我们将从理论上说明这个结果具有一般性.

为了更深入地研究向量组的极大无关组的性质，需要讨论两个向量组之间的关系. 我们将向量线性表示的概念推广到两个向量组之间，从而得到向量组等价的概念.

定义 2.10 设有两个向量组

$$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\},\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$$

如果向量组 A 的每一个向量都可以由向量组 B 线性表示，那么称**向量组 A 可以由向量组 B 线性表示**．特别地，如果向量组 A 和向量组 B 可以互相线性表示，那么称**向量组 A 和向量组 B 等价**．记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$$

例如，对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ 可知，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 线性表示．

同时，由

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}_2=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+0\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{e}_3=0\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$$

知向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示．

所以，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 等价．

根据定义，不难证明向量组的等价具有下述性质：

(1)反身性：任一向量组与它自身等价，即 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$．

(2)对称性：若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$，则

$$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$$

(3)传递性：若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$，且 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p\}$，则

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p\}$$

根据定义 2.9 与定义 2.10，可以直接得到如下结论：

定理 2.5 任一向量组与它的极大无关组等价．

推论 向量组中任意两个极大无关组之间等价．

上面的结论说明，在讨论向量组之间的一些关系时，可以用它们的极大无关组代替，从而使问题的讨论更加方便和简捷.

定义 2.11 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组中所包含的向量的个数称为此向量组的秩，记为 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$.

只含有零向量的向量组没有极大无关组，规定它的秩为零.

由于线性无关的向量组的极大无关组就是它本身，于是我们可得如下结论：

定理 2.6 向量组线性无关的充要条件是它的秩等于所含向量的个数. 反之，向量组线性相关的充要条件是它的秩小于所含向量的个数.

二、向量组的秩与矩阵的秩

第一章介绍过矩阵的秩的概念，那么，矩阵的秩与向量组的秩之间有什么关系呢？下面讨论这个问题.

设 $m\times n$ 型矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行看作一个 n 维行向量，并记 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{12},\cdots a_{1n})$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{21},a_{22},\cdots a_{2n})$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots a_{mn})$为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组，称该行向量组的秩为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**；将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列看作一个 m 维列向量，并记

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，称该列向量组的秩为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**.

对于一般的矩阵，它的行秩与列秩有什么关系呢？先看一个例子.

例如，对于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,-1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0,0)$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的唯一极大无关组，故 $\boldsymbol{A}$ 的行秩为 2.

$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,-1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$. 可以验证，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是列向量组的一个极大无关组，故 $\boldsymbol{A}$ 的列秩为 2.

容易验证，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也是 2.

由此可看出，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩、列秩和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩都相等，这个结论对任何一个矩阵都成立.

据此，我们很容易得到一个求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩的方法.

对于只含有有限个向量的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，以向量组的向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，也是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩.

【例 2-15】 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,-4,-4)^{\mathrm{T}}$$

的秩和它的一个极大无关组.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 做初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 0 & -4\\ 1 & 2 & 3 & -4\end{bmatrix}\overset{\substack{r_2+2r_1\\ r_3-r_1}}{\underset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

显然，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2. 易见，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，由定理 2.4 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.

【例 2-16】 求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)^{\mathrm{T}}$$

的秩和它的一个极大无关组，并把其余向量用该极大无关组线性表示.

解 对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 做初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{bmatrix}\underset{r_3-r_2}{\overset{\substack{r_2-2r_1\\r_3-r_1}}{\sim}}\begin{bmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\frac{1}{2}r_1-\frac{1}{2}r_2}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)$$

显然，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2. 易见，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，且有 $\boldsymbol{\beta}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$.

由定理 2.4 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

下面给出向量组的秩的一个重要结论.

定理 2.7 向量组 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 能由向量组 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$ 的秩等于矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的秩，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

此定理将在下一章进行证明.

根据定理 2.7，我们容易得出如下推论：

推论 1 如果向量组 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 可由向量组 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性表示，那么 $R\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\leqslant R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$.

证明 记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$,按照定理 2.7,有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,而 $R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$,因此,$R(\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})$,即

$$R\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\leqslant R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$$

推论 2 向量组 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$与向量组 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$等价的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

第四节 向 量 空 间

一、向量空间与子空间

定义 2.12 设 $\boldsymbol{V}$ 为 n 维向量的集合,如果集合 $\boldsymbol{V}$ 非空且对于向量的线性运算(向量的加法及数乘运算)封闭,即对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}$ 和常数 $k\in\boldsymbol{R}$ 都有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V},\ k\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$$

就称集合 $\boldsymbol{V}$ 为一个向量空间.

由一个零向量所构成的集合$\{\boldsymbol{0}\}$也是一个向量空间,称之为**零空间**.

【例 2-17】 集合

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}=(0,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}\}$$

是一个向量空间.因为若 $\boldsymbol{\alpha}=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{\beta}=(0,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}$,则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(0,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V},\lambda\boldsymbol{\alpha}=(0,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}.$$

【例 2-18】 集合

$$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{x}=(1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\mid x_2,\cdots,x_n\in\boldsymbol{R}\}$$

不是向量空间.因为若 $\boldsymbol{\alpha}=(0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}$,则

$$2\boldsymbol{\alpha}=(2,2a_2,\cdots,2a_n)^{\mathrm{T}}\notin \boldsymbol{V}.$$

【例 2-19】 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两个已知的 n 维向量,集合

$$\boldsymbol{L}=\{\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\beta}\mid\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}\}$$

是一个向量空间. 因为若 $\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\mu_1\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{\alpha}+\mu_2\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{L}$,则有

$$\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}+(\mu_1+\mu_2)\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{L}$$

$$k\boldsymbol{x}_1=(k\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}+(k\mu_1)\boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{L}.$$

这个向量空间称为由向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 所生成的向量空间.

一般地,由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m$ 的任意线性组合构成的集合

$$\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\boldsymbol{R}\}$$

是一个向量空间,称之为由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 所生成的向量空间,记为

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots\boldsymbol{\alpha}_m)=\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\mid k_1,k_2,\cdots,k_m\in\boldsymbol{R}\}.$$

定义 2.13 如果 $\boldsymbol{V}_1$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个非空子集,且 $\boldsymbol{V}_1$ 关于向量的加法和数乘运算都封闭,那么称 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间.

向量空间 $\boldsymbol{V}$ 本身和 $\boldsymbol{V}$ 中零向量组成的零空间都是 $\boldsymbol{V}$ 的子空间. 这两个子空间称为 $\boldsymbol{V}$ 的**平凡子空间**,它们分别构成 $\boldsymbol{V}$ 的最大和最小子空间. $\boldsymbol{V}$ 的其他子空间称为**非平凡子空间**.

任何由 n 维向量所组成的向量空间都是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间.

二、向量空间的基与维数

向量空间中的每一个元素都是一个向量. 我们在前面介绍的关于 n 维向量的概念(线性组合、相性相关、线性无关等)及有关结论都可以推广到向量空间上. 为简便起见,在向量空间里,我们直接利用这些概念和性质.

定义 2.14 设向量组 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间,则称向量组 $\boldsymbol{V}$ 的一个极大无关组为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基,并且称向量组 $\boldsymbol{V}$ 的秩为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的**维数**,记

作 $\dim\boldsymbol{V}$.

定义 2.14 的等价叙述如下：

设向量组 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间，若有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\boldsymbol{V}$，满足：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

(2) $\boldsymbol{V}$ 中任意一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间的一个基，基中所含的向量个数 r 称为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数，记为 $\dim\boldsymbol{V}=r$，并称 $\boldsymbol{V}$ 为 **$\boldsymbol{r}$ 维向量空间**.

如果向量空间 $\boldsymbol{V}$ 没有基，就称 $\boldsymbol{V}$ 的维数为 0，0 维向量空间只含一个零向量.

我们注意到，向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的基就是把 $\boldsymbol{V}$ 看成向量组时的极大无关组，因此，向量空间的基未必唯一，但任意两个基所含向量的个数，即向量空间的维数是不会变的.

由定义 2.14 知，全体 n 维向量构成一个向量空间，记作 $\boldsymbol{R}^n$. 容易验证 $\boldsymbol{R}^n$ 的维数为 n，所以我们把 $\boldsymbol{R}^n$ 称为 **$\boldsymbol{n}$ 维向量空间**.

值得注意的是：不要把向量空间的维数和向量的维数这两个概念搞混淆. 一个向量有 n 个分量，则称此向量为 n 维向量；而由 n 维向量构成的向量子空间，它的维数是指基中所含向量的个数，可能是 $0,1,\cdots,n$. 由于已知超过 n 个的 n 维向量一定线性相关，所以由 n 维向量构成的向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数不会超过 n.

对于向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，任取 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表达式是唯一的. 由此，我们引进如下定义：

定义 2.15 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{V}$ 中的向量，则存在唯一的一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_r$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

称 $x_1,x_2,\cdots,x_r$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标.

特别地，在 n 维向量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中取单位坐标向量组 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为基，则以

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为分量的向量 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

可见,向量在 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 基下的坐标就是该向量的分量.因此,$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 也称为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的自然基.

当然,同一个向量在不同的基下会有不同的坐标.求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 下的坐标的方法,就是求方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{\alpha}$$

的解.

【例 2-20】 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,-11)^{\mathrm{T}}$ 构成 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基,并求出向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,-1,7)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标.

证明 要证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 构成 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基,只需证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$,并对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -11\end{bmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & -6 & -15\end{bmatrix}\overset{r_3-\frac{3}{2}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & -12\end{bmatrix}$$

有 $R(\boldsymbol{A})=R\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}=3$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,它们一定构成 $\boldsymbol{R}^3$ 的一个基.

下面求向量 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

构造矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta})$,并对 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta})$ 施行初等行变换,将其化为行最简形矩阵:

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}]=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & -11 & 7\end{array}\right]\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -4 & -2 & -2\\ 0 & -6 & -15 & 5\end{array}\right]\underset{r_3+3r_2}{\overset{-\frac{1}{2}r_2}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 3 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 1\\0 & 0 & -12 & 8\end{array}\right]\underset{r_1-3r_2-2r_3}{\overset{\substack{-\frac{1}{12}r_3\\ \frac{1}{2}r_2-\frac{1}{2}r_3}}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{6}\\0 & 1 & 0 & \frac{5}{6}\\0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3}\end{array}\right]$$

故所求的 $\boldsymbol{\beta}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标为 $-\frac{1}{6},\frac{5}{6},-\frac{2}{3}$.

【例 2-21】 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中取两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$，设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 求用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的表达式（基变换公式），并求向量 $\boldsymbol{x}$ 在两组基下的坐标之间的关系式（坐标变换公式）.

解 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(e_1,e_2,e_3)\boldsymbol{A}$，$(e_1,e_2,e_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}$

故

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(e_1,e_2,e_3)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

即基变换公式为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}$$

其中，变换公式的系数矩阵 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 称为从旧基到新基的**过渡矩阵**.

设向量 $\boldsymbol{x}$ 在旧基和新基下的坐标分别为 y_1,y_2,y_3 和 z_1,z_2,z_3，即

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

得

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

这就是从旧坐标 y_1, y_2, y_3 到新坐标 z_1, z_2, z_3 的坐标变换公式.

三、向量内积与向量组的正交化

定义 2.16 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$,称实数 $a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积,记为 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 或($\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$). 即

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$$

利用矩阵的运算,向量的内积也可表示成 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

容易验证,内积具有如下性质:

(1)$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$.

(2)$(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

(3)$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

(4)$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$,且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任意向量,k 为任意实数.

【例 2-22】 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2=(0,-2,-1)^{\mathrm{T}}$,求:

(1)$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$.

(2)$(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$.

解 (1)$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)=1\times 0+2\times(-2)+(-1)\times(-1)=-3$

(2) $(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=(3\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

$=3(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)-3(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)+2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)-2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)$

$=18+9-6-10$

$=11$

有了内积的概念就可以定义向量长度的概念了.

定义 2.17 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$,称实数 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度或模,记作 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$. 即

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|=\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**.

由向量长度的定义,可证得以下性质:

(1) $\|\boldsymbol{\alpha}\|\geqslant 0$,且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$.

(2)对任意实数 k,有 $\|k\boldsymbol{\alpha}\|=|k|\,\|\boldsymbol{\alpha}\|$.

(3) $\|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|$.

(4) $\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|+\|\boldsymbol{\beta}\|$.

定义 2.18 对 $\boldsymbol{R}^n$ 中的任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$,若 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 正交.

显然,零向量与任何向量正交. 自然基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 两两正交.

定义 2.19 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组非零的 n 维向量,若它们两两正交,则称之为**正交向量组**;若 $\boldsymbol{\alpha}_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 还是单位向量,则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 为**标准正交向量组**.

定理 2.8 若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组正交向量组,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

证明 设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$$

用 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1,2,\cdots,s)$与上式两边做内积，得

$$(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i)=(\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_i)$$

即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_i)+\cdots+k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1},\boldsymbol{\alpha}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均正交，即$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=0,j=1,\cdots i-1,i+1,\cdots s$. 所以有 $k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_i)=0$，再由 $\boldsymbol{\alpha}_i\neq\mathbf{0}$，得 $k_i=0,i=1,2,\cdots,s$. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

上述定理的逆命题不成立. 即线性无关的向量组不一定是正交向量组. 但可以通过线性组合的方式将一个线性无关的向量组改造成一个与之等价的正交向量组.

将一个线性无关的向量组正交化的方法很多，此处不加证明地给出一种方法：施密特(Schmidt)正交化法. 具体操作步骤如下：

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

取
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{\beta}_s=\boldsymbol{\alpha}_s-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_{s-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{s-1},\boldsymbol{\beta}_{s-1})}\boldsymbol{\beta}_{s-1}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是一个正交向量组，且

$$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$$

【例 2-23】 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3,-1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,6,8)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，试将其正交化.

解 令
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{bmatrix}-\frac{4}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{bmatrix}-2\\0\\6\\8\end{bmatrix}-\frac{12}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{-32}{16}\begin{bmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交.

与正交向量组密切相关的是正交矩阵,下面介绍有关的知识.

定义 2.20 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$$

那么称 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.

容易验证:$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$都是正交矩阵.

正交矩阵具有下列性质:

定理 2.9 若 $\boldsymbol{Q}$ 是正交矩阵,则

(1)$|\boldsymbol{Q}|=\pm1$.

(2)$\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ 也是正交矩阵.

证明

(1)因 $|\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}|=|\boldsymbol{E}|=1$,所以 $|\boldsymbol{Q}|^2=1$,故 $|\boldsymbol{Q}|=\pm1$.

(2)因 $(\boldsymbol{Q}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{Q}^{-1})^{-1}$,所以 $\boldsymbol{Q}^{-1}$也是正交矩阵. 证毕.

由定义 2.20 及定理 2.9 可得:

定理 2.10 n 阶方阵 Q 是正交矩阵的充分必要条件是 Q 的列(行)向量组是单位正交向量组.

由以上讨论容易验证下面两个实方阵都是正交矩阵:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{1}{\sqrt{12}} & \frac{3}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

拓 展 空 间

向量的由来

“向量”一词来自力学、解析几何中的有向线段.它是一种带几何性质的量,除零向量外,总可以画出箭头表示方向.但是在高等数学中还有更广泛的向量.例如,把所有实系数多项式的全体看成一个多项式空间,这里的多项式都可看成一个向量.在这种情况下,要找出起点和终点甚至画出箭头表示方向是办不到的.这种空间中的向量比几何中的向量要广泛得多,可以是任意数学对象或物理对象.这样,就可以指导线性代数方法应用到广阔的自然科学领域中去了.因此,向量空间的概念,已成了数学中最基本的概念和线性代数的中心内容,它的理论和方法在自然科学的各领域中得到了广泛的应用.而向量及其线性运算也为“向量空间”这一抽象的概念提供出了一个具体的模型.

从数学发展史来看,历史上很长一段时间,空间的向量结构并未被数学家们

所认识，直到19世纪末20世纪初，人们才把空间的性质与向量运算联系起来，使向量成为具有一套优良运算通性的数学体系.

向量能够进入数学并得到发展，首先应从复数的几何表示谈起. 18世纪末期，挪威测量学家威塞尔首次利用坐标平面上的点来表示复数 $a+bi$，并利用具有几何意义的复数运算来定义向量的运算. 把坐标平面上的点用向量表示出来，并把向量的几何表示用于研究几何问题与三角问题. 人们逐步接受了复数，也学会了利用复数来表示和研究平面中的向量，向量就这样平静地进入了数学.

但复数的利用是受限制的，因为它仅能用于表示平面，若有不在同一平面上的力作用于同一物体，则需要寻找所谓三维“复数”及相应的运算体系. 19世纪中期，英国数学家汉密尔顿发明了四元数(包括数量部分和向量部分)，以代表空间的向量. 他的工作为向量代数和向量分析的建立奠定了基础. 随后，电磁理论的发现者，英国的数学家、物理学家麦克斯韦(J. Maxwell，1831—1879)把四元数的数量部分和向量部分分开处理，从而创造了大量的向量分析.

三维向量分析的开创，以及同四元数的正式分裂，是英国的居伯斯和海维塞德于19世纪80年代各自独立完成的. 他们提出，一个向量不过是四元数的向量部分，但不独立于任何四元数. 他们引进了两种类型的乘法，即数量积和向量积，并把向量代数推广到变向量的向量微积分. 从此，向量的方法被引进到分析和解析几何中来，并逐步完善，成为一套优良的数学工具.

思考与练习

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，如果 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\xi})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\xi})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\xi})$，求向量 $\boldsymbol{\xi}$.

3. 判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，若能，写出其中一种表示方式，其中：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,0,3,6)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0,3)^{\mathrm{T}}$.

4. 判断下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-5)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,12,-2,12)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,8,2)^{\mathrm{T}}$.

5. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)^{\mathrm{T}}$.

(1) 当 t 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

(2) 当 t 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

6. 求下列向量组的秩和极大无关组，并将其余向量表示为极大无关组的线性组合.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4,-2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,-1,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,5,5)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,a)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,6,7)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，并求出它的一个极大无关组.

8. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，求常数 k 的值.

9. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能

由它们线性表示，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

11. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

12. 已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. 若各向量组的秩分别为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$R(\boldsymbol{C})=4$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

13. 试判断下列 n 维向量的集合是否为向量空间.

(1) $\boldsymbol{V}_1=\{(a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\mid a_1\in\boldsymbol{R}\}$.

(2) $\boldsymbol{V}_2=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_1+a_2+\cdots+a_n=0,a_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

(3) $\boldsymbol{V}_3=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_1+a_2+\cdots+a_n=1,a_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

14. 求向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间

$$\boldsymbol{V}=\{(a,b,0)^{\mathrm{T}}\mid a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

的一组基和维数.

15. 验证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基，并求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标.

16. 已知向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{ 及 }\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

17. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,3,7)^{\mathrm{T}}$ 线性无关，试将其正交化.

18. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$，求证：$\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

19. 判断下列矩阵是否为正交阵.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$.　　(2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.