第二章

向量与向量空间

一、教学基本要求

(1)理解 n 维向量、向量组、向量组的线性组合的概念;理解一个向量可由一个向量组线性表示的概念和充要条件;理解一个向量组可由另一个向量组线性表示的概念和充要条件;知道两个向量组等价的概念和充要条件.

(2)理解向量组线性相关、线性无关的概念;了解向量组线性相关性的主要结论;会判断向量组的线性相关性.

(3)理解向量组的极大无关组和向量组的秩的概念;掌握用矩阵的初等行变换求有限的向量组的秩及其极大无关组的方法;理解向量组的极大无关组的等价定义.

(4)了解向量空间、向量空间的基和维数、向量在向量空间的一个基下的坐标的概念;会判别一个集合是否是向量空间;会求向量空间的一个基到另一个基的过渡矩阵;会求向量在向量空间的一个基下的坐标.

(5)理解正交矩阵的概念.

二、内容提要

(一)基本概念

1. n 维向量

由 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的一个有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为一个 n 维向量,记为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,并称其为 n 维行向量.记

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}$$

并称其为 n 维列向量.

零向量:所有分量均为 0 的向量,记作 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

负向量:由 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$各分量的相反数构成的向量,记作

$$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$$

2. 向量相等

维数相同且对应的分量相等的向量相等.

3. n 维向量的线性运算

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

(1)加减运算:$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)$.

(2)数乘运算:$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$.

向量的和差及数乘运算统称为向量的线性运算,且满足以下运算规律:

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.

(2)$\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$.

(3)$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$.

(4)$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.

(5)$1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

(6)$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

(7)$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

(8)$(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$.

其中,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 均为 n 维向量;$\mathbf{0}$ 是 n 维零向量;k 和 l 是任意实数.

4. 线性组合

对于给定向量 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得关系式

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

成立,那么称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合,或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

5. 线性相关与线性无关

对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,如果存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

成立,那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关.

如果仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时,才使上式成立,那么称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

注意:

(1)含有零向量的向量组一定线性相关.

(2)两个向量构成的向量组线性相关的充要条件是它们的对应分量成比例.

6. 极大无关组及向量组的秩

如果一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的某个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$ $(r\leqslant n)$满足下述条件：

(1)$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性无关.

(2)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中的任一向量都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$线性表示，那么称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir}$是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组中所包含的向量的个数称为此向量组的秩，记为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$.

只含有零向量的向量组没有极大无关组，规定它的秩为零.

7. 向量组的等价

设有两个向量组 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$，$\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$.

如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 的每一个向量都可以由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示，那么称向量组 $\boldsymbol{A}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性表示.

如果向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 可以互相线性表示，那么称向量组 $\boldsymbol{A}$ 和向量组 $\boldsymbol{B}$ 等价. 记作

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$$

向量组的等价具有下述性质：

(1)反身性：任一向量组与它自身等价，即$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(2)对称性：如果$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$，那么有

$$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}\cong\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$$

(3)传递性：若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}$，且 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t\}\cong$

$\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p\}$,则有$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}\cong\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p\}$.

8. 向量空间

(1)设 $\boldsymbol{V}$ 为 n 维向量的集合,如果集合 $\boldsymbol{V}$ 非空且对于向量的线性运算封闭,那么称集合 $\boldsymbol{V}$ 为向量空间.

由一个零向量所构成的集合$\{\boldsymbol{0}\}$也是一个向量空间,称之为零空间.

(2)如果两个向量空间 $\boldsymbol{V}_1$ 与 $\boldsymbol{V}$ 满足 $\boldsymbol{V}_1\subset\boldsymbol{V}$,那么称 $\boldsymbol{V}_1$ 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个子空间.

(3)设向量组 $\boldsymbol{V}$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个子空间,若有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in\boldsymbol{V}$,且满足:

①$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

②$\boldsymbol{V}$ 中任意一个向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一个基,基中所含的向量个数 r 称为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数,记为 $\dim\boldsymbol{V}=r$,并称 $\boldsymbol{V}$ 为 r 维向量空间.

(二)重要结论

(1)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$($n\geqslant 2$)线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示.

(2)如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,那么向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 唯一地线性表示.

(3)若向量组的某一个部分组线性相关,则整个向量组线性相关.反言之,若整个向量组线性无关,则其任一部分组也线性无关.

(4)由 m 个 n 维向量组成的向量组,当 $n<m$,即向量的维数小于向量的个数时,向量组一定线性相关.

(5)矩阵的秩等于矩阵的行向量组的秩,也等于矩阵的列向量组的秩.

(6)向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关的充要条件是它所构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=$

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$的秩小于向量的个数 n；向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充要条件是$R(\boldsymbol{A})=n$.

(7)任一向量组与它的极大无关组等价.

(8)两个等价向量组的秩相等.

(9)向量组线性无关的充要条件是它的秩等于所含向量的个数.反之,向量组线性相关的充要条件是它的秩小于所含向量的个数.

(10)向量组 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$能由向量组 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$线性表示的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的秩等于矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$的秩,即$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

(11)如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某个 r 阶子式 D 是 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式,那么 D 所在的 r 个行向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的一个极大无关组,D 所在的 r 个列向量是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个极大无关组.

(12)如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价,而 $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 个列向量与 $\boldsymbol{B}$ 中对应的 k 个列向量有相同的线性相关性.

(13)如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$,那么 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价,而 $\boldsymbol{A}$ 的任意 k 个行向量与 $\boldsymbol{B}$ 中对应的 k 个行向量有相同的线性相关性.

(14)若 n 阶方阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵.

三、习题详解

1. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,0)^{\mathrm{T}}$,求 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 及

$3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$.

解 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

$$3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$$

2.已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,如果 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\xi})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\xi})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\xi})$,求向量 $\boldsymbol{\xi}$.

解 由 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\xi})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\xi})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\xi})$ 整理得 $\boldsymbol{\xi}=\dfrac{1}{6}(3\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3)$,即

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{5}{6}\boldsymbol{\alpha}_3$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\5\\1\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}10\\1\\50\\10\end{bmatrix}-\frac{5}{6}\begin{bmatrix}4\\1\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\18\\4\end{bmatrix}$$

3.判断向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,若能,写出其一种表示方式.其中,

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1,-1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,2,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(-1,0,3,6)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,2,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,2,4,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(2,0,0,3)^{\mathrm{T}}$.

解 (1)以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$,并对其进行初

等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\-1&1&1&0\\0&1&2&3\\3&-1&1&6\end{bmatrix}\overset{r_2+r_1}{\underset{r_4-3r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&3&1&-1\\0&1&2&3\\0&-7&1&9\end{bmatrix}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\underset{\substack{r_3-3r_2\\r_4+7r_2}}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&2&3\\0&0&-5&-10\\0&0&15&30\end{bmatrix}\overset{-\frac{1}{5}r_3}{\underset{r_4+3r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{r_2-2r_3}{\underset{r_1-2r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3,\tilde{\boldsymbol{\beta}})=\boldsymbol{B}$$

容易看出矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关，且 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2+2\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3$，则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，且有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(2)以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})$，并对之进行初等行变换，将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵：

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\1&0&2&0\\1&2&4&0\\1&1&3&3\end{bmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-2\\0&3&3&-2\\0&2&2&1\end{bmatrix}\overset{r_3-3r_2}{\underset{r_4-2r_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&2\\0&1&1&-2\\0&0&0&4\\0&0&0&5\end{bmatrix}\overset{\substack{\frac{1}{4}r_3\\r_4-5r_3}}{\underset{\substack{r_1+r_2\\r_2+2r_3}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3,\tilde{\boldsymbol{\beta}})=\boldsymbol{B}$$

由矩阵 $\boldsymbol{B}$ 容易看出，向量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 不能由向量组 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3$ 线性表示，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

4. 判断下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-5)^{\mathrm{T}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,12,-2,12)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,-3,8,2)^{\mathrm{T}}$.

解 (1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-2&1&2\\3&2&-5\end{bmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2+2r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&5&-2\end{bmatrix}\overset{r_3+5r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$$

显然，$R(\boldsymbol{A})=3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\3&12&-3\\1&-2&8\\4&12&2\end{bmatrix}\underset{\substack{r_3-r_1\\r_4-4r_1}}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&6&-9\\0&-4&6\\0&4&-6\end{bmatrix}\underset{\substack{r_4+r_3\\r_3+2r_2}}{\overset{\frac{1}{3}r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2\\0&2&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

显然 $R(\boldsymbol{A})=2<3$，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

5. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,3,t)^{\mathrm{T}}$.

(1) 当 t 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关？

(2) 当 t 取何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关？

解 构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&5\\1&3&3\\0&-1&t\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+\frac{1}{2}r_2]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}1&1&5\\0&2&-2\\0&0&t-1\end{vmatrix}=2(t-1)$$

当 $t=1$ 时,$|\boldsymbol{A}|=0$,即 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵,$R(\boldsymbol{A})<3$,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

当 $t\neq1$ 时,$|\boldsymbol{A}|\neq0$,即 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵,$R(\boldsymbol{A})=3$,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

6.求下列向量组的秩和极大无关组,并将其余向量表示为极大无关组的线性组合.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(3,4,-2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,4,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,2,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,4,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(0,0,5,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_5=(0,1,1,2)^{\mathrm{T}}$.

解 (1)对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$做初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&3&2&0\\1&4&4&1\\-1&-2&0&1\end{bmatrix}\overset{r_2-r_1}{\underset{r_3+r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&2&0\\0&1&2&1\\0&1&2&1\end{bmatrix}\overset{r_3-r_2}{\underset{r_1-3r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&-4&-3\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{B}$$

显然,$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=2$,即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 2.

易见,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组,且

$$\boldsymbol{\beta}_3=-4\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4=-3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组,且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-4\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4=-3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$$

(2)对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$做初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&2&4&0&1\\-1&0&-1&5&1\\0&1&2&5&2\end{bmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_4}{\overset{r_3+r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&5&2\\0&-1&-2&5&1\\0&2&4&0&1\end{bmatrix}\underset{r_4-2r_2+r_3}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-1&0&0\\0&1&2&5&2\\0&0&0&10&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{r_2-5r_3\\r_1+r_2}}{\overset{\frac{1}{10}r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&\frac{1}{2}\\0&1&2&0&\frac{1}{2}\\0&0&0&1&\frac{3}{10}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5)=\boldsymbol{B}$$

显然 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的秩为 3.

易见，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，且有

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\beta}_1+2\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_5=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{3}{10}\boldsymbol{\beta}_4$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2+\frac{3}{10}\boldsymbol{\alpha}_4$$

7. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,3,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,6,7)^{\mathrm{T}}$，问 a 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，并求出它的一个极大无关组.

解 构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&6\\3&a&1&7\end{vmatrix}\overset{c_2+c_3}{\underset{c_4+2c_3}{=\!=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&2&1&3\\0&0&-1&0\\2&4&1&8\\3&a+1&1&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&8\\3&a+1&9\end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-2r_1}{=\!=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&0&2\\3&a+1&9\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2\\3&a+1\end{vmatrix}=-2(a-5)$$

当 $a=5$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵，$R(\boldsymbol{A})<4$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，此时有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\2&3&1&6\\3&5&1&7\end{bmatrix}\underset{r_4-3r_1-2r_2}{\overset{r_3-2r_1-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{r_2-2r_3\\r_1-r_2-r_3}}{\overset{\frac{1}{2}r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=\boldsymbol{B}$$

显然 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_4$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的一个极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组.

8. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，求常数 k 的值.

解 取

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&2&0\\0&k&3\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3),\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$$

由题意知，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AP}$.

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则 $R(\boldsymbol{A})=3$，易证 $R(\boldsymbol{P})=R(\boldsymbol{B})$，则

$$R(\boldsymbol{P})=R(\boldsymbol{B})<3$$

即 $\boldsymbol{P}$ 为降秩矩阵，$|\boldsymbol{P}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\2&2&0\\0&k&3\end{vmatrix}=6+4k=0$，得 $k=-\dfrac{3}{2}$.

9. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3$，证明 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

证明 假设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$$

即

$$(k_1+2k_2+4k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(2k_1+k_2-2k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$$

由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关知

$$\begin{cases}k_1+2k_2+4k_3=0\\-k_1+k_3=0\\2k_1+k_2-2k_3=0\end{cases}$$

解此方程组得 $k_1=k_2=k_3=0$，与假设相矛盾. 故假设不成立，即向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

10. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 能由它们线性表示，证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证明 易知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 均可由 n 维单位坐标向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线

性表示，又 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，则

$$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}\cong\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$$

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=R(e_1,e_2,\cdots,e_n)=n$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

11. 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 等价，其中

$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$.

解

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2)=\begin{bmatrix}0&1&2&1&-1\\1&3&1&2&0\\2&5&0&3&1\end{bmatrix}\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&3&1&2&0\\0&1&2&1&-1\\0&-1&-2&-1&1\end{bmatrix}\underset{r_1-3r_2}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&-5&-1&3\\0&1&2&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2)$$

由 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1=-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1+\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2=3\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1-\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2$ 知 $\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&2\\2&0&1&3&1\\3&1&2&5&0\end{bmatrix}\underset{r_3-3r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&0&1&2\\0&2&1&1&-3\\0&4&2&2&-6\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{2}r_2\\ r_1+r_2}}{\overset{r_3-2r_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=(\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1,\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3)$$

由 $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_1=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1+\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_2=\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1+\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2,\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_3=\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1-\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\beta}}_2$，知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{3}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{3}{2}\boldsymbol{\beta}_2$$

易见，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以互相线性表示，即两向量组等价.

12. 已知向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{B}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$；$\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$. 若各向量组的秩分别为 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$，$R(\boldsymbol{C})=4$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

证明 由 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3$ 知向量组 $\boldsymbol{A}$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{B}$ 线性相关. 故 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，记

$$\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3 \tag{1}$$

假设存在一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4(\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4)=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)，得

$$(\lambda_1-\lambda_4k_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_2-\lambda_4k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_3-\lambda_4k_3)\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_4\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{0}$$

又由 $R(\boldsymbol{C})=4$ 知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，故

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_4k_1=0\\ \lambda_2-\lambda_4k_2=0\\ \lambda_3-\lambda_4k_3=0\\ \lambda_4=0\end{cases}$$

解此方程组易求得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，则其秩为 4.

13. 试判断下列 n 维向量的集合是否为向量空间.

(1)$\boldsymbol{V}_1=\{(a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\mid a_1\in\boldsymbol{R}\}$.

(2)$\boldsymbol{V}_2=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_1+a_2+\cdots+a_n=0,a_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

(3)$\boldsymbol{V}_3=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\mid a_1+a_2+\cdots+a_n=1,a_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\}$.

解 (1)对于任意的向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_1$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_1$,有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_1$$

对于任意的常数$k\in R$,有$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,0,\cdots,0)\in\boldsymbol{V}_1$,故集合$\boldsymbol{V}_1$是向量空间.

(2)对于任意的向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_2$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_2$有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0,b_1+b_2+\cdots+b_n=0,\text{且 }a_i,b_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n$$

所以

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=0,\text{且 }a_i,b_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n$$

则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_2$$

对于任意的常数$k\in\boldsymbol{R}$,有$ka_1+ka_2+\cdots+ka_n=0$,且

$$ka_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n\text{ 即 }k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)\in\boldsymbol{V}_2$$

故集合$\boldsymbol{V}_2$是向量空间.

(3)对于任意的向量$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_3$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V}_3$,有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=1,b_1+b_2+\cdots+b_n=1,\text{且 }a_i,b_i\in\boldsymbol{R},i=1,2,\cdots,n$$

则显然有

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)=2$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)\notin\boldsymbol{V}_3$$

即集合$\boldsymbol{V}_3$不是向量空间.

14. 求向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间

$$\boldsymbol{V}=\{(a,b,0)^{\mathrm{T}}\mid a,b\in\boldsymbol{R}\}$$

的一组基和维数.

解 取向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

显然,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1\in\boldsymbol{V},\boldsymbol{\alpha}_2\in\boldsymbol{V}$,且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 又对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,0)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{V},a,b\in\boldsymbol{R}$,有 $\boldsymbol{\alpha}=a\boldsymbol{\alpha}_1+b\boldsymbol{\alpha}_2$,即 $\boldsymbol{V}$ 中的任一向量均可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示,故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为向量空间 $\boldsymbol{V}$ 的一组基,且 $\dim\boldsymbol{V}=2$.

15. 验证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基,并求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 在该基下的坐标.

证明 要证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基,只需证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关即可.

构造矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,并对 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&3&1\end{bmatrix}\overset{r_3-3r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

则有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,它们是 $\boldsymbol{R}^3$ 的一组基.

下面求向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 下的坐标.

构造矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha})$,并对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})$进行初等行变换:

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix}1&2&0&2\\1&1&0&1\\0&3&1&2\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\underset{r_2-r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&1&0&1\\0&3&1&2\end{bmatrix}\overset{r_3-3r_2}{\underset{r_1-r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

易见 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$,故向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在该基下的坐标为 $0,1,-1$.

16. 已知向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的两组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\text{及 }\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$$

求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

解 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$.

由$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{EA}$ 知 $\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}$

故

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\boldsymbol{EB}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$$

即由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

构造矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$并对其进行初等行变换,有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&2&3\\1&0&0&2&3&4\\1&-1&1&1&4&3\end{bmatrix}\underset{r_2-r_1}{\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1&4&3\end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\frac{1}{2}r_3\\ r_2-r_3}}{\overset{r_3-r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&-1&0&-1\end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{bmatrix}$.

17. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,2)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,3,7)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,试将其正交化.

解　令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}$,

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\cdot\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{3}{9}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\cdot\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\cdot\boldsymbol{\beta}_2$$

$$=\begin{bmatrix}4\\3\\7\end{bmatrix}-\frac{12}{9}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}-\frac{7}{1}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交.

18. 设 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$,令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$,求证:$\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

证明　因 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}-2(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$,故 $\boldsymbol{H}$ 对称. 又 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{E}^2-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$. 所以,$\boldsymbol{H}$ 是对称的正交阵.

19. 判断下列矩阵是否为正交阵.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$. (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

解 (1) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} \frac{49}{36} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{6} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{49}{36} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,所以该矩阵不是正交阵.

(2)记$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$,容易验证$\|\boldsymbol{\alpha}_i\|=1$,且$\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{\alpha}_j=0(i,j=1,2,3,4,i\neq j)$.即列向量组是两两正交的单位向量组,所以该矩阵是正交阵.