

2.1 算 法

2.1.1 算法的概念

我们首先来看一个例子,把大象放冰箱总共分几步?

步骤 1:把冰箱门打开.

步骤 2:把大象放进冰箱.

步骤 3:把冰箱门关上.

“算法”一词来源于算术,是指一个由已知推求未来的运算过程.而在数学中,我们把进行计算的程序或步骤称为**算法**.算法一般具有以下特点:

- (1) 确定性:算法中的每一步应该是确定的,并且能有效地执行且得到确定的结果.
- (2) 有限性:算法的步骤应是有限的,必须在有限次操作后停止.
- (3) 顺序性:算法从初始步骤开始,分为若干明确的步骤,每一个步骤只能有一个确定的后继步骤,只能执行完前一步才能进行下一步.
- (4) 有一个或多个输出:一个算法一定要有输出,算法的最终目的是求解,“求解”便是输出,否则就失去了意义.

例 1 写出求 $1+2+3+\cdots+100$ 的一个算法.

解 算法可分为以下步骤:

第一步:求 $1+2$,结果为 3.

第二步:求 $3+3$,结果为 6.

第三步:求 $6+4$,结果为 10.

第四步:求 $10+5$,结果为 15.

想一想

现有一物品,价格在 $0\sim 1\ 000$ 元之间,采取怎样的策略才能在较短的时间内猜出正确的答案呢?

第 $n+n$ 步: 求 $4\ 950+100$, 结果为 $5\ 050$.

因此, $1+2+3+\cdots+100=5\ 050$.



做一做

1. 写出计算 $1\times 2\times 3\times 4\times 5$ 的值的一个算法.
2. 写出计算 $2+4+6+8+10$ 的值的一个算法.



2.1.2 算法的基本逻辑结构

1. 顺序结构

算法过程中各步骤之间都有明确的顺序性, 由若干个依次执行的处理步骤组成的结构称为**顺序结构**. 在算法的基本逻辑结构中, 最简单的就是顺序结构.

例 2 某市居民个人所得税的起征点为 $3\ 500$ 元, 税率为 3% . 计算个人所得税时需扣除的五险一金约占总工资的 22% . 某人的月工资税前为 $5\ 000$ 元, 请问缴纳五险一金和个人所得税后, 实际领到的工资为多少元?

解 算法步骤可分为以下三步:

第一步: 计算缴纳的五险一金金额

$$A=5\ 000\times 22\%=1\ 100(\text{元}).$$

第二步: 计算缴纳的个人所得税

$$B=(5\ 000-1\ 100-3\ 500)\times 3\%=12(\text{元}).$$

第三步: 计算实际领到的工资

$$C=5\ 000-1\ 100-12=3\ 888(\text{元}).$$

2. 条件结构

在一个算法中, 若算法的流程根据条件是否成立来选择不同的步骤, 这种算法结构称为**条件结构**.

例 3 设火车托运重量为 $p(\text{kg})$ 的行李时, 每千米的费用(单位: 元)标准为

$$y=\begin{cases} 0.3p, & \text{当 } p\leq 30 \text{ kg 时,} \\ 0.3\times 30+0.5(p-30), & \text{当 } p>30 \text{ kg 时,} \end{cases}$$

试写出计算运费的算法.

解 本题是条件结构. 可设计一个计算运费的算法, 分



议一议

举出一个顺序结构的算法的实例, 并写出这个算法.



注意

形如

$$y=\begin{cases} f_1(x), & x<a, \\ f_2(x), & x\geq a \end{cases} \text{ 的}$$

函数称为**分段函数**, 指在不同的定义区间内适用不同的函数表达式.

为以下四步.

第一步:称重 p .

第二步:若 $p \leq 30$ kg, $y = 0.3p$; 否则, 下一步.

第三步:若 $p > 30$ kg, $y = 0.3 \times 30 + 0.5(p - 30)$.

第四步:输出 y .

3. 循环结构

将反复循环执行同一步骤的算法结构称为循环结构.

顺序结构、条件结构及循环结构称为算法的三大基本结构, 它们可以组成各种复杂的算法, 解决众多问题.

例 4 设计一个算法求 100 个正整数中能被 7 整除的最小正整数.

解 先将这 100 个数按从小到大的顺序排为一列

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}.$$

算法分为以下四步:

第一步:输入数据 a_i .

第二步:如果 a_i 能被 7 整除, 则输出 a_i ; 如果 a_i 不能被 7 整除, 则返回第一步输入下一个数 a_{i+1} .

第三步:直到第一个能够被 7 整除的数, 或者所有的数都历遍为止.

第四步:输出结果.



注意

循环结构中一般都包含条件判断. 注意分析条件结构与循环结构的区别与联系.



做一做

1. 设计一个算法, 求 $ax - R = 0$ 的解.
2. 某居民区物业管理每月向居民收取卫生管理费用, 计费方式如下: 3 人和 3 人以下的住户, 每户每月交 5 元, 超过三人的每多一人加收 1.5 元, 设计一个算法, 根据住户的人数收取费用.



习题 2.1

1. $\triangle ABC$ 的边长 $BC = 5$, 高 $AD = 3$, 试写出求三角形面积 S 的一个算法.
2. 写出两个分数乘法的算法.

3. 举出一个分段函数的生活实例,并写出求函数值的算法.
4. 设计一个解二元一次方程组的算法.
5. 设计一个算法,将已知三个数 a, b, c 按从大到小的顺序进行排列.

2.2 程序框图

2.2.1 程序框图基本图例

我们来看著名数学家华罗庚“烧水泡茶”的算法中的一个:

- 第一步:洗好开水壶;
- 第二步:灌上凉水,放在火上,等待水开;
- 第三步:洗茶杯;
- 第四步:茶杯里放好茶叶;
- 第五步:水开后再冲水泡茶.

为了使算法表达得更为直观,我们经常用图形的方式来表示,如图 2-1 所示.

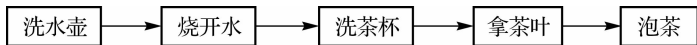
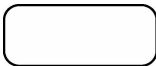


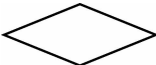



图 2-1

将描述一步一步完成算法步骤的图形称为**程序框图**. 绘制程序框图时,要使用规定的图形、指向线及文字说明,准确、直观地表示出算法. 程序框图所用的基本符号如表 2-1 所示.

表 2-1 程序框图符号及其含义

常用符号	符号名称	符号含义
	起、止框	表示一个算法的开始或结束
	输入、输出框	表示算法的输入或输出信息
	处理框	赋值、执行计算语句、结果的传送
	判断框	判断一个条件是否成立. 当条件成立时, 程序沿“是”或“Y”方向执行步骤; 否则, 沿“否”或“N”方向执行步骤
	流程线	流程进行的方向

绘制程序框图时一般要遵守以下规则:

- (1) 使用标准规范的图形符号.
- (2) 一般按照从上到下、从左到右的方向画图.
- (3) 起、止框只有一个输入点或输出点; 判断框有“是”与“否”两个分支, 有一个输入点, 有且仅有两个输出点; 处理框和输入、输出框都只有一个输入点和输出点.
- (4) 图框内的语言要表达清楚、简明扼要.

做一做

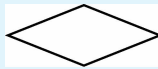
下列程序框图符号中, 表示判断框的是()



A.



B.



C.



D.

2.2.2 算法程序框图的基本结构

算法的三种基本结构,通常使用下面的程序框图来表示.

1. 顺序结构的程序框图

顺序结构语句和语句之间、框与框之间是按照从上到下的顺序进行的.如图 2-2 所示,先执行语句 1,再执行语句 2.

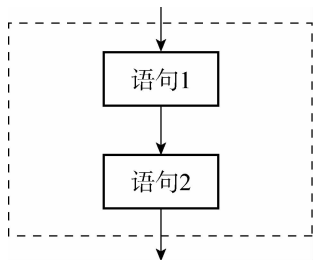


图 2-2

例 1 已知点 $p_0(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$, 求点 p_0 到直线 l 的距离 d .

解 用数学语言来描述算法分为以下五步:

第一步:输入 p_0 点的坐标 x_0, y_0 , 输入直线方程的系数 A, B, C .

第二步:计算 $z_1 = Ax_0 + By_0 + C$.

第三步:计算 $z_2 = A^2 + B^2$.

第四步:计算 $d = \frac{|z_1|}{\sqrt{z_2}}$.

第五步:输出 d .

用框图来描述算法,如图 2-3 所示.

2. 条件结构的程序框图

条件结构需要进行逻辑判断,其程序框图包括判断框的结构.这样的结构也称为条件分支结构.如图 2-4 所示,其中, p 代表一个条件,当 p 成立时,执行语句 1,当 p 不成立时执行语句 2.

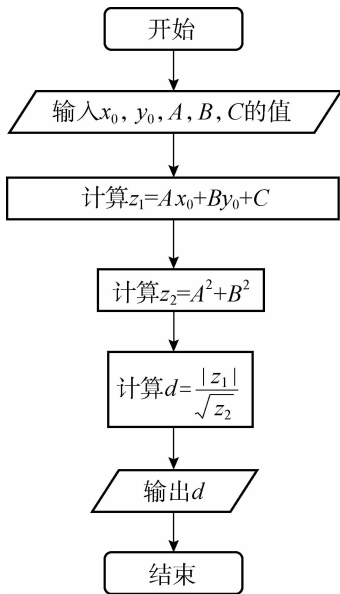


图 2-3

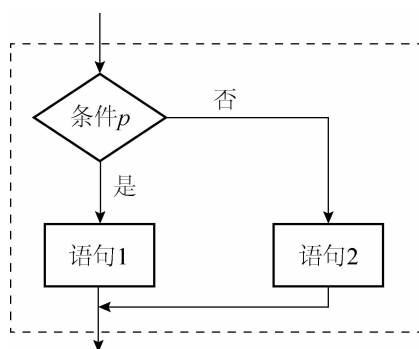


图 2-4

例 2 求一个数 a 的绝对值.

解 用数学语言来描述算法分为以下四步:

第一步:输入 a .

第二步:判断条件 $a \geq 0$ 是否成立.

第三步:若 $a \geq 0$ 成立,计算 $b = a$;若 $a \geq 0$ 不成立,计算 $b = -a$.

第四步:输出 b .

用框图来描述算法,如图 2-5 所示.

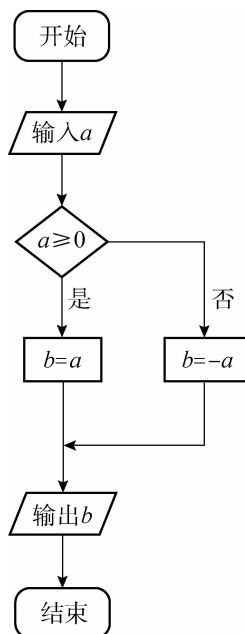


图 2-5

3. 循环结构的程序框图

循环结构算法中,需要反复执行某项任务直到条件得到满足为止,如图 2-6 所示,当条件 p 不成立时,进入循环体,当条件 p 成立时,退出循环体.

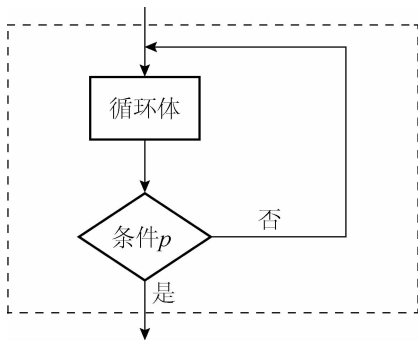


图 2-6

例 3 计算 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$.

解 用数学语言来描述算法分为以下六步:

第一步:令 $i=1, S=0$.

第二步:计算 $a = \frac{1}{i}$.

第三步:将 S 的值加 a .

第四步:将 i 的值加 1.

第五步:判断 $i > 10$ 是否成立,若不成立返回第二步;若成立,进入下一步.

第六步:输出 S .

用框图来描述算法,如图 2-7 所示.

顺序结构、条件结构及循环结构,这三种基本的逻辑结构相互支撑,包含这三种结构的程序框图可以表示比较复杂的算法.

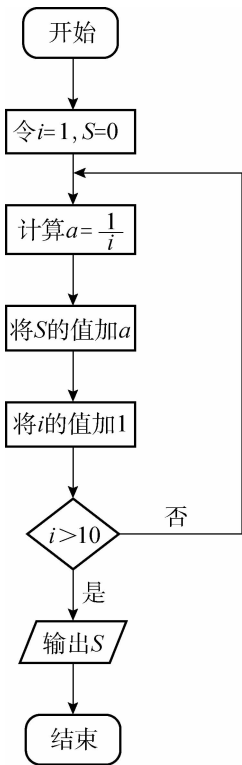


图 2-7



做一做

试设计一个对任意 N 个正整数的排序算法.



习题 2.2

1. 画出解一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的过程的程序框图.

2. 求满足 $1+2+3+\cdots+n>500$ 的最小自然数 n , 画出其程序框图.

2.3 应用举例

算法在自然科学与生活中有非常广泛的应用. 下面是几个实例.

例 1 某校计算学生成绩及学分的方法是: 总评成绩由平时成绩、期中考试成绩、期末考试成绩组成, 它们分别占总成绩的 15%, 30%, 55%, 若成绩大于或等于 60 分, 获得 3 学分, 否则获得 0 学分. 设计一个计算学分的算法, 并画出程序框图.

解 根据题意设计一个算法, 可分为以下四步:

第一步: 输入平时成绩 a 、期中考试成绩 b 、期末考试成绩 c .

第二步: 计算总评成绩 $d=0.15a+0.30b+0.55c$.

第三步: 比较 d 与 60 的大小, 得到相应学分.

第四步: 输出所得学分.

程序框图如图 2-8 所示.

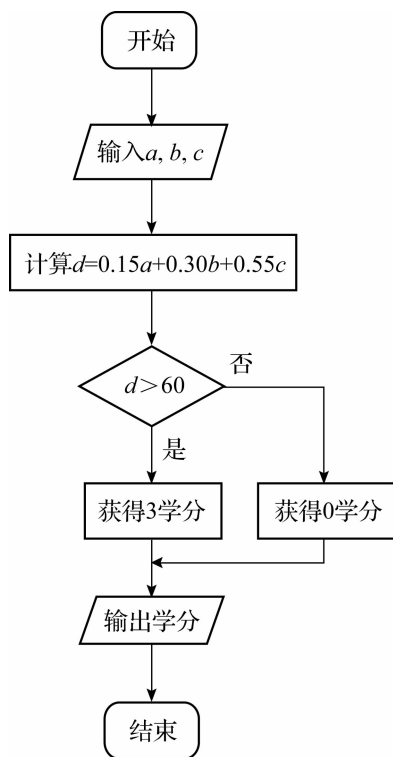


图 2-8

例 2 火车站对乘客退票收取一定的费用,具体办法是:按票价每 10 元(不足 10 元按 10 元计算)核收 2 元;2 元及 2 元以下的票不退.试写出票价为 x 元的车票退掉后,退还的金额 y 元的算法的程序框图.

解 根据题意可设计一个算法,分为以下六步:

第一步:输入 x .

第二步:判断 x 与 2 的大小.

第三步:若 $x > 2$,进行下一步;否则,输出“不退票”,退出程序.

第四步:判断 $\frac{x}{10}$ 是否为整数.

第五步:若 $\frac{x}{10}$ 为整数,令 $y = x - \frac{2x}{10}$; 否则,令 $y = x - 2 \left(\left[\frac{x}{10} \right] + 1 \right)$.

注意

$[x]$ 是取整函数,表示不超过 x 的最大整数.例如, $[1.2] = 1$, $[2] = 2$.

第六步:输出 y .

程序框图如图 2-9 所示.

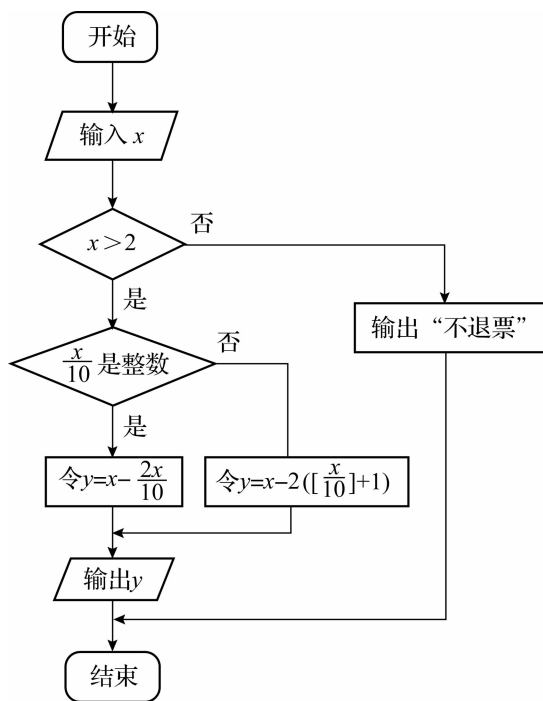


图 2-9

例 3 求 30 名学生的数学平均成绩,画出算法的程序框图.

解 本题算法可分为以下四步:

第一步:输入 30 名学生的数学成绩.

第二步:将 30 名学生数学成绩加和,记为 S .

第三步:计算 $\bar{x} = \frac{S}{30}$.

第四步:输出 \bar{x} .

算法的程序框图如图 2-10 所示.

例 4 设计一个算法,任意输入 5 个正整数,按照从小到大的顺序输出.画出这个算法的程序框图.

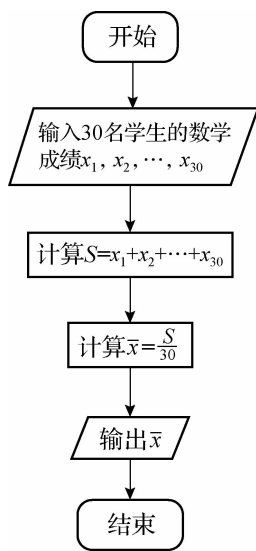


图 2-10

分析 依次比较相邻的两个数,将小数放在前面,大数放在后面.

第一趟,首先比较第一个和第二个数,将小数放前,大数放后.然后比较第二个数和第三个数,将小数放前,大数放后,如此继续,直至比较最后两个数,将小数放前,大数放后.至此第一趟结束,将最大的数放到了最后.

第二趟,仍从第一对数开始比较,将小数放前,大数放后,一直比较到倒数第二个数,第二趟结束,在倒数第二的位置上得到一个新的最大数.如此下去,重复以上过程,直至最终完成排序.由于在排序过程中总是小数往前放,大数往后放,如同气泡往上升,所以这种排序方法称为**冒泡排序**.

解 本题算法可分为以下六步:

第一步:输入数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

第二步:比较前两个数的大小,将较小的数放在前面;然后比较第二个与第三个数,将较小的数放在前面,依此类推,直至最后两个数.由此可将最大的数放在最后.

第三步:将前四个数执行第二步.

第四步:将前三个数执行第二步.

第五步:将前两个数执行第二步.

第六步:输出排序后的数列.

算法程序框图如图 2-11 所示.

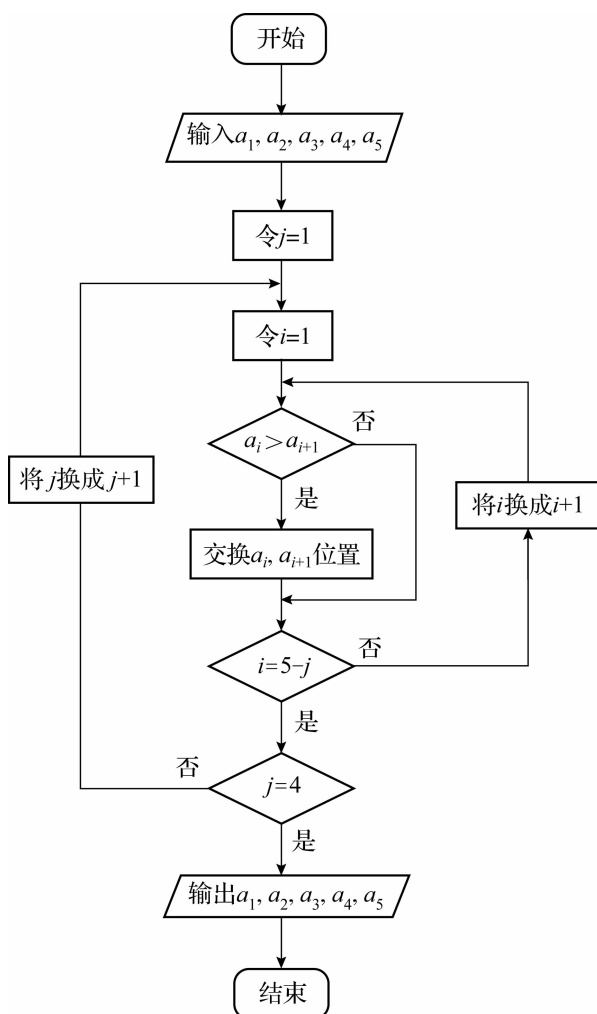


图 2-11



习题 2.3

1. 设计一个利用公元纪年判断闰年的算法,并画出程序框图.
2. 任意给定 3 个正实数,设计一个算法,判断分别以这 3 个数为三边边长的三角形是否存在,并画出这个算法的程序框图.
3. 某厂 2019 年的年生产总值为 2 000 万元,技术革新后预计以后每年的年生产总值都比上一年增长 5%,设计一个

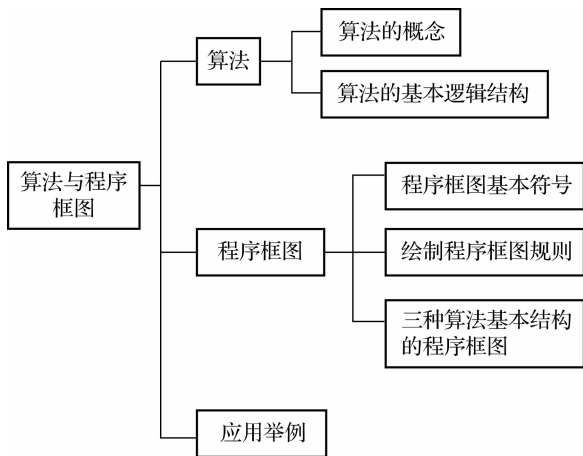
程序框图,输出预计年生产总值超过 3 000 万元的年份.

4. 某项竞赛中,参赛者表演后,八位评委分别打分.去掉一个最高分和一个最低分后,参赛者的最终分数由其余六个分数求平均所得.请设计一个程序求参赛者的最终分数,并画出其程序框图.



单元小结

一、知识脉络图



1. 算法

(1) 数学中,进行计算的程序或步骤称为算法.

(2) 算法一般具有以下特点:

① 确定性:算法中的每一步应该是确定的,并且能有效地执行且得到确定的结果.

② 有限性:算法的步骤应是有限的,必须在有限次操作后停止.

③ 顺序性:算法从初始步骤开始,分为若干明确的步骤,每一个步骤只能有一个确定的后继步骤,只能执行完前一步才能进行下一步.

④ 有一个或多个输出:一个算法一定要有输出,算法的最终目的是求解,“求解”便是输出,否则就失去了意义.

(3) 算法的基本逻辑结构如下:

① 顺序结构:算法过程中各步骤之间都有明确的顺序


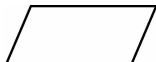
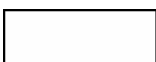
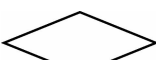

性,由若干个依次执行的处理步骤组成的结构称为顺序结构.

② 条件结构:在一个算法中,若算法的流程根据条件是否成立来选择不同的步骤,这种算法结构称为条件结构.

③ 循环结构:反复循环执行同一步骤的算法结构称为循环结构.

2. 程序框图

(1) 将描述一步一步完成算法步骤的图形称为程序框图.绘制程序框图时,要使用规定的图形、指向线及文字说明,准确、直观地表示出算法.程序框图所用的基本符号如下:

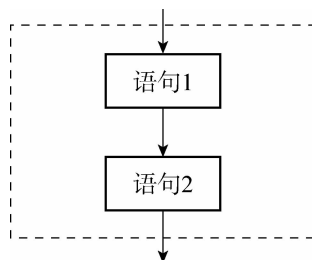
常用符号	符号名称	符号含义
	起、止框	表示一个算法的开始或结束
	输入、输出框	表示算法的输入或输出信息
	处理框	赋值、执行计算语句、结果的传送
	判断框	判断一个条件是否成立.当条件成立时,程序沿“是”或“Y”方向执行步骤;否则,沿“否”或“N”方向执行步骤
	流程线	流程进行的方向

绘制程序框图时一般要遵守以下规则:

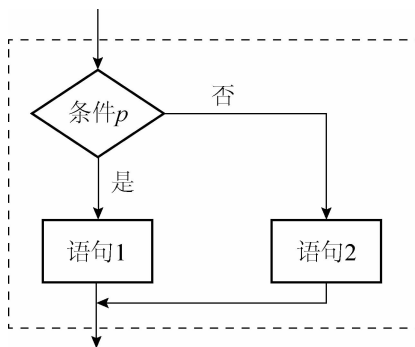
- ① 使用标准规范的图形符号.
- ② 一般按照从上到下、从左到右的方向画图.
- ③ 起、止框只有一个输入点或输出点;判断框有“是”与“否”两个分支,有一个输入点,有且仅有两个输出点;处理框和输入、输出框都只有一个输入点和输出点.
- ④ 图框内的语言要表达清楚、简明扼要.

(2) 算法的三种基本结构的程序框图如下:

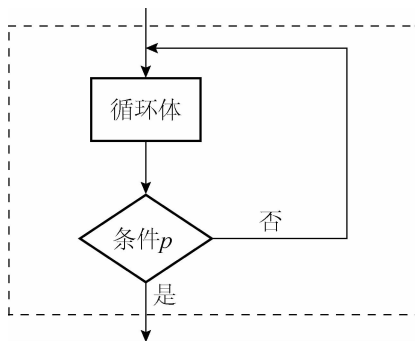
① 顺序结构的程序框图为



② 条件结构的程序框图为



③ 循环结构的程序框图为



复习题

A 组

1. 选择题:

(1) 下列对算法的理解不正确的是()。

A. 一个算法包含的步骤是有限的

- B. 一个问题只可以有一个算法
 C. 一个算法中每一步都是明确可操作的,而不是模棱两可的
 D. 算法在执行后,结果应该是明确的

(2) 条件结构不同于顺序结构的特征是含有().

- A. 处理框
 B. 判断框
 C. 输入、输出框
 D. 起、止框

(3) 如图 2-12 所示的程序框图,当输入的值为 3 时,输出的结果为().

- A. 19 B. 8 C. 17 D. 10

(4) 如图 2-13 所示的程序框图实现的功能为().

- A. 等差数列前 n 项求和
 B. 等比数列前 n 项求和
 C. 求绝对值
 D. 求分段函数的函数值

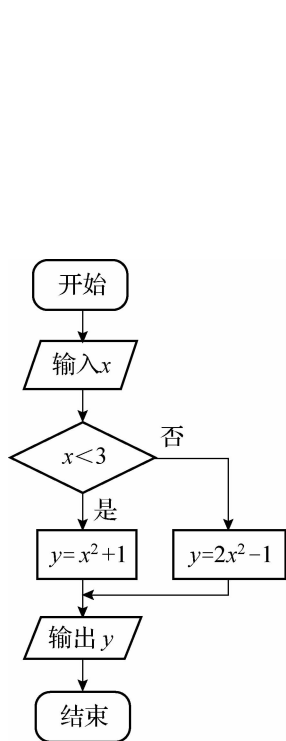


图 2-12

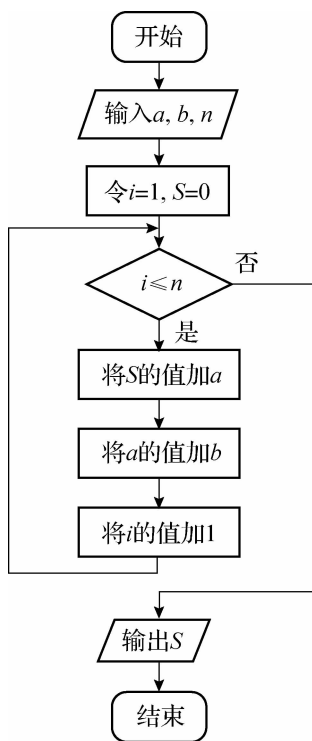


图 2-13

2. 写出如图 2-14 所示的两个程序框图的运行结果.

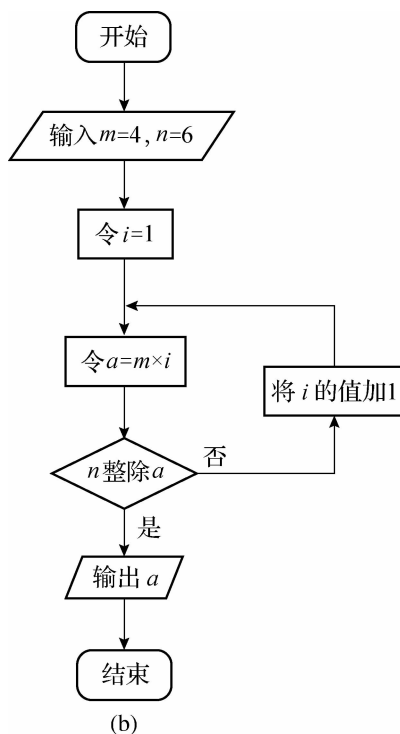
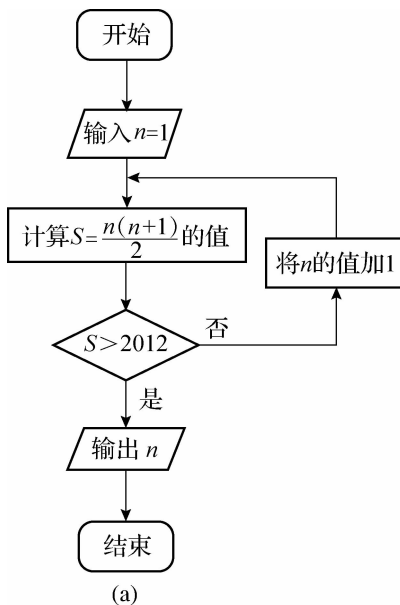


图 2-14

3. 写出解不等式 $5x - 3 > 9$ 的算法.
4. 画出解不等式 $ax + b > 0 (a \neq 0)$ 的程序框图.
5. 写出求 $m=60, n=84$ 的最大公约数的算法和程序框图.

B 组

1. 现有 8 个外形完全一样的小球, 其中有一个小球质量异常. 现有一架无砝码的天平, 设计一个算法, 在这 8 个小球里找出质量不同的那个小球.

2. 求所有平方后小于 1 000 的正整数, 画出其求解的程序框图.

3. 求 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{50}$, 画出其求解的程序框图.

知识拓展

更相减损术

更相减损术是出自《九章算术》的一种求最大公约数的算法. 《九章算术》是中国古代的数学专著, 其中的“更相减损术”可以用来求两个数的最大公约数, 即“可半者半之, 不可半者, 副置分母、子之数, 以少减多, 更相减损, 求其等也. 以等数约之”.

翻译成现代语言如下:

第一步: 任意给定两个正整数, 判断它们是否都是偶数. 若是, 则用 2 约简; 若不是则执行第二步.

第二步: 以较大的数减较小的数, 接着把所得的差与较小的数比较, 并以大数减小数. 继续这个操作, 直到所得的减数和差相等为止.

则第一步中约掉的若干个 2 与第二步中等数的乘积就是所求的最大公约数.

例如, 用更相减损术求 260 和 104 的最大公约数.

由于 260 和 104 均为偶数, 首先用 2 约简得到 130 和 52, 再用 2 约简得到 65 和 26. 此时 65 是奇数而 26 不是奇数, 故把 65 和 26 辗转相减:

$$65 - 26 = 39,$$

$$39 - 26 = 13,$$

$$26 - 13 = 13.$$

所以, 260 和 104 的最大公约数等于 13 乘以第一步中约掉的两个 2, 即 $13 \times 2 \times 2 = 52$.