第 2 单元　坐标变换与参数方程

引　例

2008 年 5 月 12 日四川省的汶川 8.0 级地震给汶川人民带来了巨大的灾难，在这次汶川地震的救援工作中，我们的空军部队以他们高超的飞行技术及时为被困的群众送去了救灾物资，让身处绝境的人民看到了希望.如果一架救援飞机在离再去地面 500 m 的高处以 100 m/s 的速度作水平直线飞行，为使投放的救援物资准确落于灾区指定的地面(不计空气阻力)，飞行员应如何确定投放时机呢?

2.1　坐标轴的平移与旋转

2.1.1　坐标轴的平移

在数控机床加工中，通常工件作旋转运动(主运动)，而刀具与工件作相对运动(进给运动).为了保证切削加工的顺利进行，经常需要变换坐标系.例如，圆心在 $O_1(2,-1)$，半径为 1 的圆在坐标系 Oxy 的方程为

$$(x-2)^2+(y+1)^2=1,$$

如图 2-1 所示. 如果不改变坐标轴的方向和单位长度，将坐标原点 O 移至点 $O_1(2,-1)$ 处，那么，对于新的坐标系 $O_1x_1y_1$，该圆的方程为

$$x_1^2+y_1^2=1.$$

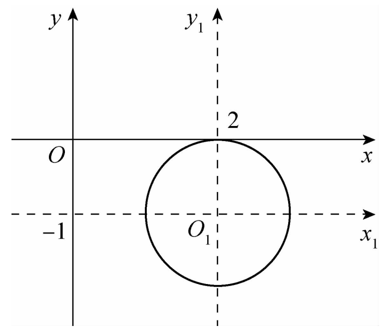


图 2-1

像这样，只改变坐标原点的位置，而不改变坐标轴的方向和单位长度的坐标系的变换称为**坐标轴的平移**.

由一个坐标系到另一个坐标系的变换，会给点的坐标和曲线的方程带来哪些变化呢?下面我们研究坐标系平移前后，同一个点在两个坐标系中的坐标之间的关系，反映这种关系的式子称为**坐标轴的平移公式**.

如图 2-2 所示，把原坐标系 Oxy 平移至新的坐标系 $O_1x_1y_1$，O_1 在原坐标系中的坐标为 (x_0, y_0). 设原坐标系 Oxy 的两个坐标轴的单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$，因为坐标系的方向和单位长度都不变，所以新坐标系 $O_1x_1y_1$ 的单位向量也分别为 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$. 设点 P 在原坐标系中的坐标为 (x, y)，在新坐标系中的坐标为 (x_1, y_1)，于是有

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j},\overrightarrow{O_1P}=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},\overrightarrow{OO_1}=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j},$$

因为 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1P}$，所以

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j},$$

即

$$x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}=(x_0+x_1)\boldsymbol{i}+(y_0+y_1)\boldsymbol{j}.$$

于是得到坐标轴平移的坐标变换公式

$$\begin{cases}x=x_0+x_1,\\ y=y_0+y_1.\end{cases}\tag{2-1}$$

想一想

式（2-1）与式(2-2)的区别是什么？使用这两个公式时要注意什么问题？

$$\begin{cases}x_1=x-x_0,\\ y_1=y-y_0.\end{cases} \tag{2-2}$$

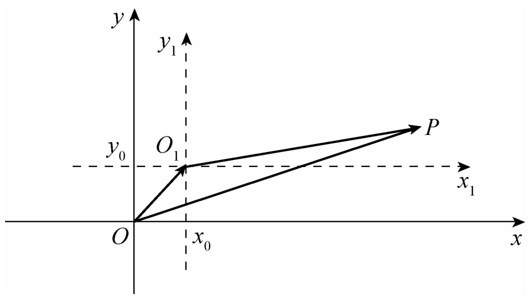


图 2-2

例 1 平移坐标轴,将坐标原点移到 $O_1(1,-2)$,求下列各点的新坐标:

$O(0,0)$,$A(2,4)$,$B(-1,3)$,$C(-2,-2)$,$D(3,-1)$.

解 由坐标变换公式(2-2)得

$$\begin{cases}x_1=x-1,\\ y_1=y+2.\end{cases}$$

将各点的原坐标分别代入上式,得到各点的新坐标分别为

$O(-1,2)$,$A(1,6)$,$B(-2,5)$,$C(-3,0)$,$D(2,1)$.

例 2 利用坐标轴的平移化简圆 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 的方程,并画出新坐标系和圆.

解 将圆方程的坐标配方,得

$$(x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

这是以点$(-2,1)$为圆心,3为半径的圆.平移坐标轴,使得新坐标轴的原点位于点 $O_1(-2,1)$,由坐标变换公式(2-1)得

$$\begin{cases}x=x_1-2,\\ y=y_1+1.\end{cases}$$

将上式代入圆的方程,得 $x_1^2+y_1^2=9$.

这就是在新坐标系 $O_1x_1y_1$ 中圆的方程.新坐标系和圆的图像如图 2-3 所示.

注 意

坐标平移变换公式的两个主要应用是:

(1) 已知原坐标系内一点求它在新坐标系内的坐标;已知一点在新坐标系内的坐标求它在原坐标系内的坐标.

(2) 利用坐标平移变换公式化简曲线的方程.

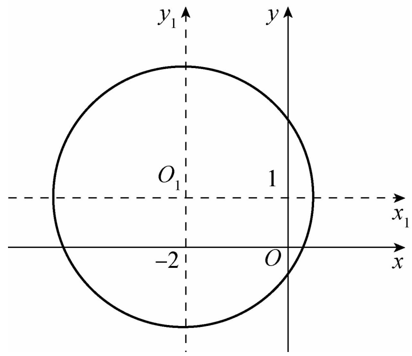


图 2-3

做一做

1. 平移坐标轴，把坐标原点 O 移至 $O_1(2,-3)$，求下列各点的新坐标：

$$A(3,1), B(-2,4), C(7,-2),$$
$$D(1,0), E(-5,0), F(-3,7).$$

2. 利用平移坐标轴，化简下列方程，指出新坐标系原点的坐标，并画出新坐标轴和曲线：

(1) $y=x-1$;

(2) $x^2+y^2+2x-6y-6=0$;

(3) $x^2+y^2-16x+10y+32=0$.

2.1.2 坐标轴的旋转

在研究曲线的过程中，我们需要经常改换坐标系，有时候平移坐标系也不能很好地解决问题，这时候就需要尝试新的坐标系的变换方式.

现在我们研究另一种常见的坐标系的变换方式——旋转.不改变坐标原点的位置和单位长度，只改变坐标轴方向的坐标系的变换称为**坐标轴的旋转**.

如图 2-4 所示，设点 M 在原坐标系 Oxy 中的坐标为 (x,y)，$|OM|=r$，直线 OM 的倾斜角为 α. 将坐标轴绕坐标原点，按逆时针方向旋转角 θ 形成新坐标系 $O_1x_1y_1$，点 M 在新坐标系 $O_1x_1y_1$ 中的坐标为 (x_1,y_1)，则

$$x=r\cos\alpha, y=r\sin\alpha,$$

$$x_1 = r\cos(\alpha - \theta), y_1 = r\sin(\alpha - \theta),$$

于是

$$x_1 = r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = x\cos\theta + y\sin\theta,$$
$$y_1 = r\sin\alpha\cos\theta - r\cos\alpha\sin\theta = y\cos\theta - x\sin\theta.$$

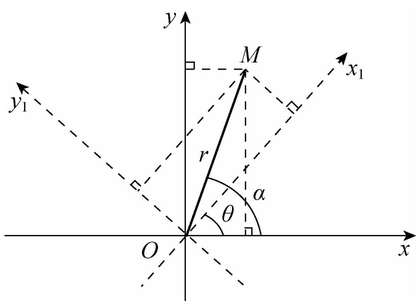


图 2-4

由此得到坐标轴旋转的坐标变换公式

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta. \end{cases} \tag{2-3}$$

将新坐标系看成原坐标系，则旋转角度为 $-\theta$，代入式(2-3) 得

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \\ y = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta. \end{cases} \tag{2-4}$$

可以证明，当 α，θ 为任意角时，式(2-3) 和式(2-4) 都成立.

想一想

式(2-3) 与式(2-4) 的区别是什么？使用这两个公式时要注意什么问题？

例 3 若将坐标轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$，求点 $A(1,3)$，$B(-2,1)$，$C(3,-2)$，$D(0,4)$ 经坐标轴旋转后的新坐标.

解 由已知条件和坐标轴旋转变换公式(2-3) 得

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x. \end{cases}$$

将各点的原坐标分别代入上式，得到各点的新坐标分别为

$$A(2\sqrt{2}, \sqrt{2}), B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right), D(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}).$$

例 4 逆时针旋转坐标轴 $\frac{\pi}{4}$，已知点 A 和 B 在新坐标系下的坐标分别为 $(2,-1)$ 和 $(3,-4)$，求点 A 和 B 在原坐标系下的

坐标.

解　设点 A 在原坐标系下的坐标为 (x,y)，根据坐标系旋转的坐标变换公式(2-4)得

$$\begin{cases} x = x_1\cos\dfrac{\pi}{4} - y_1\sin\dfrac{\pi}{4}, \\ y = y_1\cos\dfrac{\pi}{4} + x_1\sin\dfrac{\pi}{4}, \end{cases}$$

将点 A 在新坐标系下的坐标 $(2,-1)$ 代入得

$$\begin{cases} x = 2\cos\dfrac{\pi}{4} + \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y = -\cos\dfrac{\pi}{4} + 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

即点 A 在原坐标系下的坐标为 $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

同理，点 B 在原坐标系下的坐标为 $\left(\dfrac{7\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

例 5　设点 M 在原坐标系 Oxy 中的坐标为 (x,y)，首先平移坐标轴，将坐标轴原点移至 $O_1(x_0,y_0)$，构成坐标系 $O_1x_1y_1$，然后再将坐标轴绕点 O_1 按逆时针方向旋转 θ 角构成新坐标系 $O_1x_2y_2$. 求点 M 在新坐标系 $O_1x_2y_2$ 中的坐标.

解　设点 M 在坐标系 $O_1x_1y_1$ 中的坐标为 (x_1,y_1)，点 M 在新坐标系 $O_1x_2y_2$ 中的坐标为 (x_2,y_2)，则由式(2-2)得

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0. \end{cases}$$

再由式(2-3)得

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta, \\ y_2 = y_1\cos\theta - x_1\sin\theta. \end{cases}$$

因此得

$$\begin{cases} x_2 = (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta, \\ y_2 = (y-y_0)\cos\theta - (x-x_0)\sin\theta. \end{cases}$$

做一做

1. 若将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$，求点$A(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$，$B(-\sqrt{3},\sqrt{3})$，$C(0,2)$，$D(\sqrt{3},0)$在新坐标系下的坐标.

2. 将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，已知点A和点B在新坐标系下的坐标分别为$(2,-2\sqrt{2})$和$(1,-3)$，求点A和点B在原坐标系下的坐标.

习题 2.1

1. 平移坐标轴，将坐标原点移到$(3,-2)$，求下列各点的新坐标：

$A(-2,2)$，$B(2,-2)$，$C(0,3)$，$D(2,3)$，$E(-3,-1)$.

2. 逆时针旋转坐标轴$\frac{\pi}{4}$，求点$A(3\sqrt{2},2)$，$B(3,\sqrt{3})$，$C(-2,1)$在新坐标系下的坐标.

3. 将坐标轴逆时针旋转$\frac{2}{3}\pi$，求点$A(3\sqrt{3},3)$，$B(-\sqrt{3},2)$，$C(\sqrt{3},4)$在新坐标系下的坐标.

4. 利用坐标轴的平移，化简下列方程并画出新坐标系：

(1) $x^2+y^2+4x-2y-3=0$；

(2) $x^2+y^2-6x+4y-3=0$.

5. 逆时针旋转坐标轴$\frac{5\pi}{6}$，已知点A和B在新坐标系下的坐标分别为$(4,2\sqrt{2})$和$(-2,5)$，求点A和B在原坐标系下的坐标.

6. 平移坐标轴，把坐标原点移至$O_1(2,-1)$，然后再将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{6}$，求原坐标系中的点$(3,2)$在新坐标系中的坐标.

2.2 参数方程

2.2.1 曲线的参数方程

如图 2-5 所示，质点 M 从点 $(2,0)$ 出发，沿着与 x 轴成 $30°$ 的方向，以 10 m/s 的速度运动.

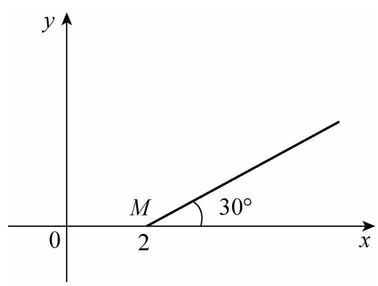


图 2-5

想一想

为什么要附加条件 $x>2$?

质点所做的运动是匀速直线运动，其运动的轨迹是经过点 $M(2,0)$，倾斜角为 $30°$ 的直线（x 轴上方的部分），容易求得其方程为

$$\sqrt{3}x-3y-2\sqrt{3}=0(x>2).$$

但是，这个方程不能直接反映出运动轨迹与时间 t 的关系. 为此，我们分别研究运动轨迹上的点 $M(x,y)$ 的坐标与时间 t 的关系，得

$$\begin{cases} x=10t\cos 30°+2, \\ y=10t\sin 30° \end{cases} (t>0),$$

即

$$\begin{cases} x=5\sqrt{3}t+2, \\ y=5t \end{cases} (t>0).$$

时间 t 确定后，点 $M(x,y)$ 的位置也就确定了.

因此，曲线上动点 $M(x,y)$ 的坐标 x 和 y，可以分别表示为一个新变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{2-5}$$

我们把方程(2-5)称为**曲线的参数方程**,变量 t 称为**参变量**.

在用参数方程表示曲线时,方程中的参变量可以是有物理、几何意义的变量,也可以是没有明显意义的变量.

相对于参数方程来说,我们把前面学过的给出曲线上点的坐标之间直接关系的方程 $f(x,y)=0$ 称为**曲线的普通方程**.

建立曲线的参数方程,通常是把曲线看成是动点的轨迹,选取适当的参数 t,将曲线上动点的坐标 x,y 分别用含有参数 t 的表达式来表示.

例 1 求圆心在 $C(h,k)$,半径为 r 的圆的参数方程.

解 如图 2-6 所示,平移坐标轴,将原点 O 移到点 $C(h,k)$. 设 M 为圆上任意一点,则在坐标系 Oxy,Cx_1y_1 中,点 M 的坐标分别为(x,y),(x_1,y_1),由坐标轴的平移公式可知

$$\begin{cases} x = x_1 + h, \\ y = y_1 + k. \end{cases} \tag{1}$$

设 $\angle MCx_1 = \theta$,则有

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta, \\ y_1 = r\sin\theta. \end{cases} \tag{2}$$

将式(2)代入式(1),得

$$\begin{cases} x = h + r\cos\theta, \\ y = k + r\sin\theta. \end{cases}$$

上式则为圆心为 $C(h,k)$,半径为 r 的圆的参数方程.

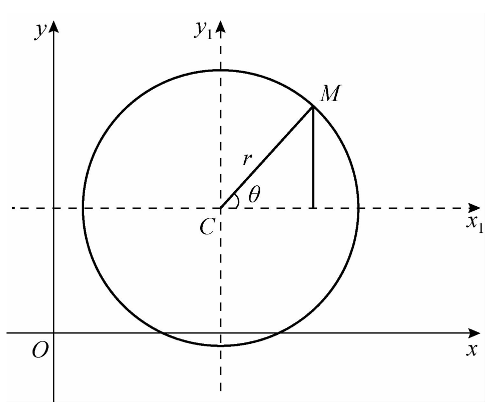


图 2-6

曲线参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t)\end{cases}$$

是通过参数 t 来间接表示 x 和 y 之间的关系的，如果从这两个方程中消去参数 t，那么就可以得到直接表示 x 和 y 之间的关系的普通方程. 在实际应用中，主要是将参数方程化为普通方程，其核心是消去参变量，常用的方法有加减消元法、代入消元法.

例 2　化参数方程

$$\begin{cases}x=2t,\\y=\dfrac{1}{t}\end{cases}$$

为普通方程.

解　由 $x=2t$ 得 $t=\dfrac{x}{2}$，将它代入到 $y=\dfrac{1}{t}$ 得

$$y=\frac{2}{x}.$$

例 3　化参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=b\sin\theta\end{cases}(a>0,b>0,\text{且 }a\neq b)$$

为普通方程，其中 θ 为参数，并说明它表示的曲线.

解　由 $\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=b\sin\theta\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{a},\\\sin\theta=\dfrac{y}{b},\end{cases}$ 则得

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,$$

化简得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,\text{且 }a\neq b),$$

显然这是一个椭圆方程.

> **注　意**
>
> 对于含有三角函数的参数方程，在消去参数时，利用三角恒等式是经常使用的方法.

例 4　化参数方程

$$\begin{cases}x=2t+1,\\y=2\sqrt{2}t\end{cases}$$

为普通方程.

解　由 $y=2\sqrt{2}t$ 得 $\dfrac{y}{\sqrt{2}}=2t$，与方程 $x=2t+1$ 两边对应相减得 $\dfrac{y}{\sqrt{2}}-x=-1$，即

$$\sqrt{2}x-y-\sqrt{2}=0.$$

显然这是一个直线方程.

做一做

1. 将下列参数方程化为普通方程，并说明方程表示的图形：

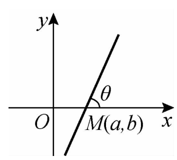
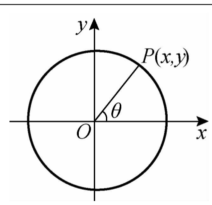
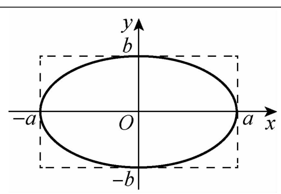
(1) $\begin{cases} x=2t, \\ y=t-3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=1-t, \\ y=t^2. \end{cases}$

2. 作出参数方程 $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=t-3 \end{cases}$ 的图形.

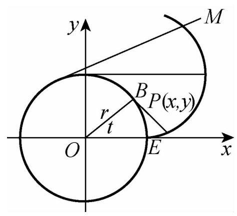
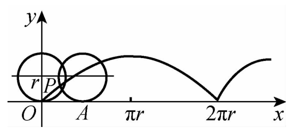
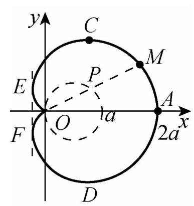
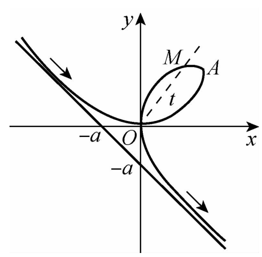
2.2.2　常用几何曲线表

除了机械加工和数控编程中常见的曲线外，还有一些曲线，如圆的渐开线、摆线等齿轮轮廓曲线等. 现将常见的曲线的参数方程列表，如表 2-1 所示.

表 2-1

曲线	图像	参数方程	参变量
经过点 $M(a,b)$，倾斜角为 θ 的直线		$\begin{cases} x=t\cos\theta+a \\ y=t\sin\theta+b \end{cases}$	t
圆心为坐标原点，半径为 r 的圆		$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$	θ
中心在原点，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆		$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$	θ

续表

曲线	图像	参数方程	参变量
圆的渐开线		$\begin{cases} x=r(\cos t+t\sin t) \\ y=r(\sin t-t\cos t) \end{cases}$	t
摆线（或旋轮线）		$\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$	t
心脏线		$\begin{cases} x=a\cos t(1+\cos t) \\ y=a\sin t(1+\cos t) \end{cases}$	t
笛卡尔叶形线		$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$	t

做一做

1. 化参数方程$\begin{cases} x=-4t^2, \\ y=t+1 \end{cases}$（$t\geqslant 0$）为普通方程，并说明方程的曲线是什么图形.

2. 把方程$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$化为参数方程.

习题 2.2

1. 将下列参数方程化为普通方程：

(1) $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -t + 1; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x = 3\cos\theta, \\ y = 6\sin\theta; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2\sin^2 t + 3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t}. \end{cases}$

2. 求曲线 $\begin{cases} x = -t + 7, \\ y = 2t + 1 \end{cases}$ 与曲线 $x = y^2$ 的交点坐标.

2.3　坐标变换与参数方程应用举例

坐标变换与参数方程在机械加工与数控编程中有着重要的作用. 下面我们来看几个具体的例子.

在数控机床上加工工件是通过刀具相对工件的运动来实现的，刀具的动作由数控系统发出的指令来控制. 为了定量的描述数控机床上刀具相对工件运动的位置，需要建立机床加工使用的坐标系.

数控机床有三个坐标系：

(1) 机床坐标系. 它是机床厂家在机器出厂前设置好的，不可随意更改，是用来确定工作台或刀架、机床主轴在工作时与机床导轨的相对位置，其坐标系原点称为**机床原点**.

(2) 编程坐标系. 它是在编程时为了计算方便而确定的坐标系. 用来确定工件轮廓各点之间的相对位置，其坐标原点由用户选定.

(3) 工件坐标系. 它是为了加工方便而选用的坐标系，其坐标原点称为**工件原点**. 通常情况下，工件坐标原点应与编程坐标

原点重合.

如图 2-7 所示，当我们把零件放到机床上时，能否让编程坐标系与工件坐标系一致是加工的关键. 否则，就会导致工件报废，出现事故.

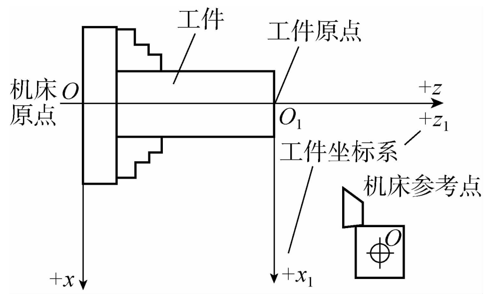


图 2-7

数控系统中描述运动轨迹移动量的方式有两种：绝对坐标系与相对坐标系. **绝对坐标系**是指所有坐标点均以某一个固定原点计量的坐标系，点的坐标称为**绝对坐标**；**相对坐标系**是指运动轨迹的终点坐标相对于起点来计量的坐标系，点的坐标称为**相对坐标**（增量坐标），它是后一点坐标相对于前一点的坐标.

例 1　如图 2-8 所示，在机床坐标系中，从点 A 运动到点 B，写出点 A,B 的绝对坐标及点 B 的相对坐标.

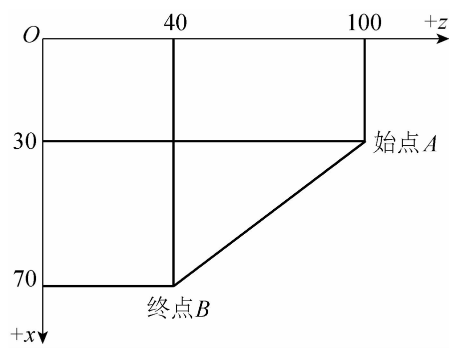


图 2-8

解　容易看出，点 A,B 的绝对坐标分别为(100,30)，(40,70). 设点 B 的相对坐标为 (z_1,x_1)，它是以点 A 为起点计量的，所以

$$\begin{cases} z_1=40-100=-60, \\ x_1=70-30=40, \end{cases}$$

所以点 B 的相对坐标为(−60,40).

例 2 如图 2-9 所示，点 A,B 为坐标系中的两点，在绝对坐标系中，A,B 两点的坐标分别为 $(40,40)$，$(15,20)$. 如果现在以 A 为原点，建立相对坐标系，求点 B 的相对坐标系.

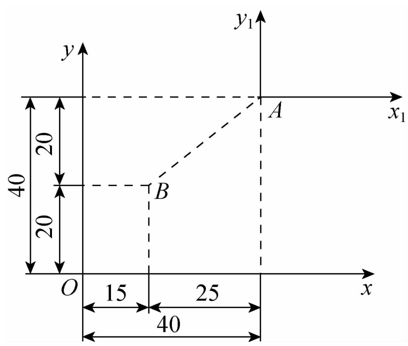


图 2-9

解 由已知点 A,B 的绝对坐标分别为 $(40,40)$，$(15,20)$. 设点 B 的相对坐标为 (z_1,x_1)，它是以点 A 为起点计量的，所以

$$\begin{cases} z_1 = 15 - 40 = -25, \\ x_1 = 20 - 40 = -20, \end{cases}$$

所以点 B 的相对坐标为 $(-25,-20)$.

例 3 在标注零件图上的斜孔尺寸时，已知点 P 的坐标为 $(-59.5,30.5)$，将工件坐标系逆时针旋转 $12°$ 之后，形成新的坐标系 Ox_1y_1，求点 P 在新坐标系中的坐标(精确到 0.1).

解 利用式(2-3)，得

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta = -59.5\cos 12° + 30.5\sin 12° \\ \quad \approx -51.9, \\ y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta = 30.5\cos 12° + 59.5\sin 12° \\ \quad \approx 42.2. \end{cases}$$

所以点 P 在新坐标系中的坐标为 $(-51.9,42.2)$.

例 4 已知点 P,Q 在机床坐标系中的坐标分别为 $(15,10.5)$，$(10,20)$，现将点 P 作为工件原点，建立工件坐标系 Ox_1y_1，再将工件坐标系逆时针旋转 $30°$ 后，形成新坐标系 Ox_2y_2，求点 Q 在新坐标系 Ox_2y_2 中的坐标.

解 设点 Q 在坐标系 Ox_1y_1 中的坐标为 (x_1,y_1)，利用式(2-2)得

$$\begin{cases} x_1 = 10 - 15 = -5, \\ y_1 = 20 - 10.5 = 9.5, \end{cases}$$

因此点 Q 在坐标系 Ox_1y_1 中的坐标为$(-5,9.5)$.

设点Q在新坐标系Ox_2y_2中的坐标为(x_2,y_2)，利用式(2-3)得

$$\begin{cases} x_2 = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta = -5\cos 30^\circ + 9.5\sin 30^\circ \\ \quad = \dfrac{19-10\sqrt{3}}{4}, \\ y_2 = y_1\cos\theta - x_1\sin\theta = 9.5\cos 30^\circ - (-5)\sin 30^\circ \\ \quad = \dfrac{10+19\sqrt{3}}{4}, \end{cases}$$

因此点 Q 在新坐标系 Ox_2y_2 中的坐标为 $\left(\dfrac{19-10\sqrt{3}}{4},\dfrac{10+19\sqrt{3}}{4}\right)$.

习题 2.3

1. 已知点 P_1,P_2,P_3 在机床坐标系中的坐标分别为$(10,40)$，$(30,10)$，$(60,50)$. 现将点 P_1 作为工件原点，求点 P_2,P_3 在工件坐标系中的坐标.

2. 如图 2-10 所示，在机床坐标系中，将点 A 移动到点 B，写出点 A 和 B 的绝对坐标，以及点 B 在相对坐标系中的坐标.

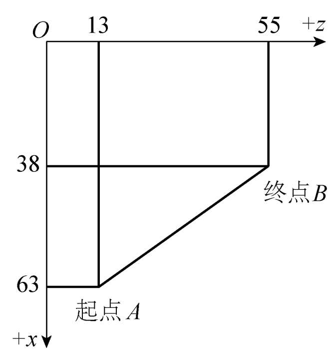


图 2-10

3. 在机床坐标系中，从点 $A(45,10)$ 运动到 $B(23,35)$，写出点 B 的相对坐标.

4. 已知点 P,Q 在机床坐标系中的坐标分别为$(100,20)$，$(51,35)$，现将点 P 作为工件原点，建立工件坐标系 Ox_1y_1，再将工件坐标系逆时针旋转45°后，形成新坐标系Ox_2y_2，求点Q在新

坐标系 Ox_2y_2 中的坐标.

单元小结

一、知识脉络图

- 坐标变换与参数方程
  - 坐标轴的平移与旋转
    - 坐标轴的平移
    - 坐标轴的旋转
  - 参数方程
    - 曲线的参数方程
    - 常用几何曲线
  - 坐标变换与参数方程应用举例

二、主要内容

1. 坐标轴的平移与旋转

(1) 只改变坐标原点的位置，而不改变坐标轴的方向和单位长度的坐标系的变换称为坐标轴的平移.

(2) 反映同一个点在两个不同的坐标系中坐标之间的关系的式子称为坐标变换公式.

(3) 坐标平移的变换公式是

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1, \\ y = y_0 + y_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0. \end{cases}$$

(4) 不改变坐标原点的位置和单位长度，只改变坐标轴方向的坐标系的变换称为坐标轴的旋转.

(5) 坐标轴旋转的坐标变换公式是

$$\begin{cases} x_1 = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y_1 = y\cos\theta - x\sin\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \\ y = y_1\cos\theta + x_1\sin\theta. \end{cases}$$

2. 参数方程

（1）曲线上动点 $M(x,y)$ 的坐标 x 和 y，可以分别表示为一个新变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

则称该方程为曲线的参数方程，变量 t 称为参变量.

（2）相对于参数方程来说，我们把前面学过的给出曲线上点的坐标之间直接关系的方程 $f(x,y)=0$ 称为曲线的普通方程.

（3）常见的曲线的参数方程见表 2-1.

复习题

A 组

1. 选择题：

（1）平移坐标轴，将坐标原点移至$(1,-2)$，点 A 在新的坐标系中坐标为$(-2,-4)$，则点 A 在原坐标系中的坐标为（　　）.

A. $(-1,-2)$　　B. $(-1,-6)$

C. $(-3,-6)$　　D. $(-3,-2)$

（2）将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{6}$，则点$(2,-4)$在新坐标系中的坐标为（　　）.

A. $(\sqrt{3}+2, 1-2\sqrt{3})$　　B. $(\sqrt{3}-2, -1-2\sqrt{3})$

C. $(2\sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3})$　　D. $(2\sqrt{3}+1, 2-\sqrt{3})$

（3）参数方程$\begin{cases} x = 3+\sin 2t \\ y = -1+\cos 2t \end{cases}$（$t$ 为参数）表示的曲线为（　　）.

A. 圆　　B. 直线

C. 椭圆　　D. 摆线

（4）平移坐标轴，把原点移到 $O_1(a,b)$，则原坐标系中的点 $A(x,y)$ 在新坐标系中的坐标为（　　）.

A. $(x-a, y-b)$　　B. $(x+a, y+b)$

C. $(x-a,y+b)$　　　　D. $(x+a,y-b)$

2. 填空题：

(1) 平移坐标轴，把坐标原点移至 $O_1(1,3)$，则圆的方程 $x^2+y^2=1$ 变为________.

(2) 将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{3}$，若点 A 的新坐标为$\left(\frac{5\sqrt{3}}{2},\frac{5}{2}\right)$，则点 A 的原坐标为________.

(3) 抛物线$\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程为________.

(4) 参数方程$\begin{cases}x=t+\dfrac{1}{t}\\y=t-\dfrac{1}{t}\end{cases}$（$t$ 为参数）所表示的曲线是________.

3. 标注某工件的斜孔尺寸时，将工件坐标系逆时针旋转 $30°$，已知在新坐标系中点 P 的工件坐标为$(2,1)$，求点 P 在原坐标系中的坐标.

4. 写出基圆半径为 4 cm 的圆的渐开线方程，并作出它的图形.

5. 利用“描点法”作出参数方程$\begin{cases}x=2t-1\\y=\dfrac{2}{t}+1\end{cases}$（$t$ 为参数）的图形.

B　组

1. 已知某直线的参数方程为$\begin{cases}x=3+t\sin 20°\\y=-1+t\cos 20°\end{cases}$（$t$ 为参数），试求该直线的倾斜角.

2. 将参数方程$\begin{cases}x=e^t+e^{-t},\\y=2(e^t-e^{-t})\end{cases}$（$t$ 为参数）化为普通方程.

3. 试分析直线 $3x+4y-6=0$ 与圆$\begin{cases}x=3+2\sin\alpha\\y=-1+2\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）的位置关系.

4. 已知椭圆$\begin{cases}x=3\sin\alpha\\y=5\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）上两个相邻顶点为 A，C，又 B，D 在椭圆上并分别在直线 AC 的两旁，求四边形 $ABCD$

面积的最大值.

知识拓展

最速降线

在一个斜面上，摆两条轨道，一条是直线，一条是曲线，起点高度以及终点高度都相同. 两个质量、大小一样的小球同时从起点向下滑落，曲线的小球反而先到终点. 这是由于曲线轨道上的小球先达到了最高速度，所以先到达. 然而，两点之间的直线只有一条，曲线却有无数条，那么，哪一条才是最快的呢?伽利略于1630年提出了这个问题，当时他认为这条线应该是一条弧线，可是后来人们发现这个答案是错误的. 1696年，瑞士数学家约翰·伯努利解决了这个问题，他还拿这个问题向其他数学家公开挑战. 牛顿、莱布尼兹、洛比达以及雅克布·伯努利等解决了这个问题. 这条最速降线就是一条摆线，也叫旋轮线.

意大利科学家伽利略在1630年提出一个分析学的基本问题—“一个质点在重力作用下，从一个给定点到不在它垂直下方的另一点，如果不计摩擦力，问沿着什么曲线滑下所需时间最短.”他说这曲线是圆，可是这是一个错误的答案.

瑞士数学家约翰·伯努利在1696年再次提出这个最速降线的问题(problem of brachistochrone)，征求解答. 次年已有多位数学家得到了正确答案，其中包括牛顿、莱布尼兹、洛比达和伯努利家族的成员. 这个问题的正确答案是连结两个点上凹的唯一一段旋轮线.

旋轮线与1673年荷兰科学家惠更斯讨论的摆线相同. 因为钟表摆锤作一次完全摆动所用的时间相等，所以摆线(旋轮线)又称为等时曲线.

以下是约翰·伯努利对最速降线的解答：

如果使分成的层数 n 无限地增加，即每层的厚度无限地变薄，则质点的运动边趋于空间 A,B 两点间质点运动的真实情况，此时折线也就无限增多，其形状就趋近我们所要求的曲线——最速降线. 而折线的每一段趋向于曲线的切线，因而得出最速降线的一个重要性质：任意一点的切线和铅垂线所成的角度的正弦与该点落下的高度的平方根的比是常数. 而具有这种性质的曲线就是摆线. 所谓摆线，它是一个圆沿着一条直线滚动(无滑

动）时，圆周上任意一点的轨迹.

因此，最速降线就是摆线，只不过在最速降线问题中，这条摆线是上、下颠倒过来的罢了.

以上便是约翰·伯努利当时所给最速降线问题的解答. 当然，这个解答在理论上并不算十分严谨. 但是，这个解答所蕴含的基本观点的发展导致了一门新的学科——变分学的出现. 最速降线问题的最终而完备的解答需要用到变分学的知识.