第2单元　坐标变换与参数方程

2.1　坐标轴的平移与旋转

学习目标

1. 理解坐标轴平移与旋转的基本概念.

2. 掌握坐标轴平移与旋转的坐标变换公式. 掌握点在新坐标系坐标和原坐标系坐标的计算.

知识点归纳

1. 基本概念

(1) **坐标轴的平移**：只改变坐标原点的位置，而不改变坐标轴的方向和单位长度的坐标系的变换称为**坐标轴的平移**.

(2) **坐标轴的旋转**：不改变坐标原点的位置和单位长度，只改变坐标轴方向的坐标系的变换称为**坐标轴的旋转**.

2. 重要公式

(1) 坐标轴平移的坐标变换公式

$$\begin{cases} x = x_0 + x_1, \\ y = y_0 + y_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1=x-x_0,\\ y_1=y-y_0.\end{cases}$$

(2) 坐标轴旋转的坐标变换公式

$$\begin{cases}x_1=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y_1=y\cos\theta-x\sin\theta,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta,\\ y=y_1\cos\theta+x_1\sin\theta.\end{cases}$$

巩固练习

1. 平移坐标轴，将坐标原点移至点(1,2)，求下列各点在新坐标中的坐标：

(1)$A(0,2)$；　(2)$B(0,-2)$；　(3)$C(3,2)$；　(4)$D(3,-2)$.

2. 平移坐标轴，将坐标原点移至点(1,2)，已知下列各点在新坐标系中的坐标，求它们在原坐标系中的坐标：

(1)$A(0,2)$；　(2)$B(0,-2)$；　(3)$C(3,2)$；　(4)$D(3,-2)$.

3.将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，求下列各点在新坐标系中的坐标：

(1)$A(1,-2)$；　(2)$B(-3,-3)$；　(3)$C(-2,1)$；　(4)$D(2,0)$.

4.将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，已知下列各点在新坐标系中的坐标，求它们在原坐标系中的坐标：

(1)$A(1,-2)$；　(2)$B(-3,-3)$；　(3)$C(-2,1)$；　(4)$D(2,0)$.

自我检测

1. 利用平移坐标轴，化简下列方程：

(1) $x^2+y^2+6x+2y-6=0$；

(2) $2x^2+y^2-4x+2y-6=0$.

2. 已知点 $M(2,-1)$，平移坐标轴，把坐标原点移至点 $(-1,2)$，然后再将坐标轴逆时针旋转 $30°$，求点 M 在新坐标系中的坐标.

2.2　参数方程

学习目标

1 理解曲线的参数方程的概念.

2. 理解参变量的概念，会由参变量的取值范围确定函数的定义域.

3. 会用“描点法”作出简单的参数方程的图像.

知识点归纳

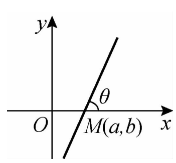
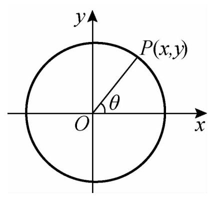
1. **曲线的参数方程**：曲线上动点 $M(x,y)$ 的坐标 x 和 y，可以分别表示为一个新变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

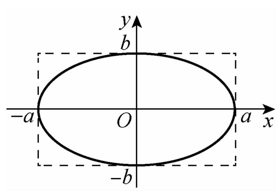
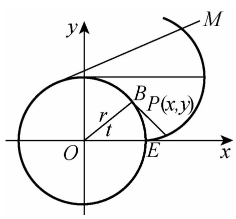
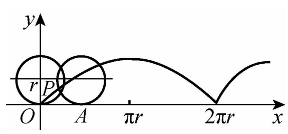
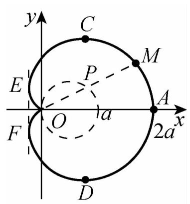
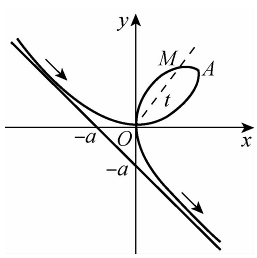
我们把这个方程称为**曲线的参数方程**，变量 t 称为**参变量**.

2. **曲线的普通方程**：把前面学过的给出曲线上点的坐标之间直接关系的方程 $f(x,y)=0$ 称为**曲线的普通方程**.

3. 常用几何曲线表：

曲线	图像	参数方程	参变量
经过点 $M(a,b)$，倾斜角为 θ 的直线		$\begin{cases} x = t\cos\theta + a \\ y = t\sin\theta + b \end{cases}$	t
圆心为坐标原点，半径为 r 的圆		$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$	θ

续表

曲线	图像	参数方程	参变量
中心在原点，长轴为 $2a$，短轴为 $2b$ 的椭圆		$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$	θ
圆的渐开线		$\begin{cases} x=r(\cos t+t\sin t) \\ y=r(\sin t-t\cos t) \end{cases}$	t
摆线（或旋轮线）		$\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$	t
心脏线		$\begin{cases} x=a\cos t(1+\cos t) \\ y=a\sin t(1+\cos t) \end{cases}$	t
笛卡尔叶形线		$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$	t

巩固练习

1. 填空题：

(1) 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的参数方程是________.

(2) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 的参数方程是________.

(3) 圆 $\begin{cases} x=2+3\cos\theta, \\ y=-1+3\sin\theta \end{cases}$ （θ 为参数）的普通方程是________.

(4) 参数方程$\begin{cases}x=2+t^2,\\ y=2t^2\end{cases}$（$t$ 为参数）的普通方程是________.

2. 已知某直线经过点 $A(1,2)$ 和 $B(-3,0)$ 两点，求该直线的参数方程.

3. 已知某圆的圆心为$(2,3)$，半径为 4，求该圆的参数方程.

4. 已知动圆：$x^2+y^2-2ax\cos\theta-2by\sin\theta=0$（$a,b$ 是正数，$a\neq b$，θ 是参数），求圆心的轨迹方程，并说明其轨迹的形状.

自我检测

1. 作出参数方程$\begin{cases}x=\sqrt{3}\sin t,\\y=\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数）的图形.

2. 写出基圆半径为 7 cm 的圆的渐开线方程,并作出它的图形.

3. 求曲线$\begin{cases}x=\cos\theta,\\y=\sin^2\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）与直线 $x+y=1$ 的交点坐标.

2.3　坐标变换与参数方程应用举例

学习目标

1. 掌握机床坐标系、工件坐标系、绝对坐标、增量坐标的概念.

2. 会解决实际生产中与本章知识相关的实际应用问题.

知识点归纳

坐标变换与参数方程在机械加工与数控编程中有着重要的作用.

在数控机床上加工工件是通过刀具相对工件的运动来实现的，刀具的动作由数控系统发出的指令来控制. 为了定量的描述数控机床上刀具相对工件运动位置，需要建立机床加工使用的坐标系.

数控机床有三个坐标系：

(1) 机床坐标系. 它是机床厂家在机器出厂前设置好的，不可随意更改，是用来确定工作台或刀架、机床主轴在工作时与机床导轨的相对位置，其坐标系原点称为**机床原点**.

(2) 编程坐标系. 它是在编程时为了计算方便而确定的坐标系. 用来确定工件轮廓各点之间的相对位置，其坐标原点由用户选定.

(3) 工件坐标系. 它是为了加工方便而选用的坐标系，其坐标原点称为**工件原点**. 通常情况下，工件坐标原点应与编程坐标原点重合.

数控系统中描述运动轨迹移动量的方式有两种：绝对坐标系与相对坐标系. **绝对坐标系**是指所有坐标点均以某一个固定原点计量的坐标系，点的坐标称为**绝对坐标**；**相对坐标系**是指运动轨迹的终点坐标相对于起点来计量的坐标系，点的坐标称为**相对坐标**（增量坐标），它是后一点坐标相对于前一点的坐标.

巩固练习

1. 设点 P_1，P_2，P_3 在机床坐标系中的坐标分别是(10，30)，(20，40)，(30，20).

(1) 现将 P_1 作为工件原点，求点 P_2，P_3 的工件坐标系坐标；

(2) 加工顺序为 P_1,P_2,P_3,写出工件坐标系中,点 P_2,P_3 的相对坐标.

2. 标注某工件的斜孔尺寸时,将工件坐标系逆时针旋转 $45°$,已知在新坐标系中点 M 的工件坐标为$(10,-8)$,求点 M 在原坐标中的坐标.(单位:mm)

3. 已知某零件上点 P 的工件坐标为$(1,3)$,将工件坐标系逆时针旋转 θ 度(其中$\cos\theta=\frac{3}{5}$,$\sin\theta=\frac{4}{5}$)后形成新坐标系,求点 P 在新坐标系中的坐标.

4. 某齿廓的曲线为圆的渐开线，如果该渐开线的半径为 35 cm，试写出该渐开线的参数方程.

单元自测题

1. 选择题.

(1) 平移坐标轴，将坐标原点移至(2，−3)，如果点 A 在新坐标系中的坐标是(−1，2)，则点 A 在原坐标系中的坐标是(　　).

A. (3，−5)　　B. (1，−1)

C. (−3，5)　　D. (−1，1)

(2) 平移坐标轴，把原点 $O(0,0)$ 移到 $O_1(2,3)$，点 $P(x_0,-1)$ 在新坐标系下的坐标为 $P_1(-2,y_0)$，则(　　).

A. $x_0=0,y_0=2$　　B. $x_0=4,y_0=-4$

C. $x_0=0,y_0=-4$　　D. $x_0=-4,y_0=2$

(3) 将坐标轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$，则点 $P(1,-1)$ 经坐标轴旋转后的新坐标为(　　).

A. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

(4) 将参数方程 $\begin{cases}x=2\sin\theta,\\ y=\frac{1}{2}-\cos 2\theta\end{cases}$ (θ 为参数) 化为普通方程，下列选项正确的是(　　).

A. $x^2=1+2y$　　B. $x^2=1+2y(|x|\leqslant 2)$

C. $x^2=1+2y(y>0)$　　D. $x^2=2y-1(|x|\leqslant 2)$

2. 填空题.

(1) 平移坐标轴,将坐标原点移至$(-3,2)$,直线在新坐标系中的方程为$x_1+y_1-2=0$,则直线在原坐标系中的方程为________.

(2) 将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$,则点$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$在新坐标系中的坐标为________.

(3) 直线$\begin{cases}x=3+4t,\\y=4-5t\end{cases}$($t$为参数)的斜率是________.

(4) 已知点P_1,P_2在机床坐标系中的坐标分别为$(10,15)$,$(30,10)$.现将点P_1作为工件原点,则点P_2在工件坐标系中的坐标为________.

3. 利用平移坐标轴化简方程$x^2+y^2-2x+4y-1=0$.

4. 将坐标轴逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$,点$A(x_0,y_0)$在新坐标下的点为$(4,2)$,试求(x_0,y_0).

5. 化参数方程$\begin{cases}x=4t^2,\\y=2t+1\end{cases}$（$t\geqslant 0$，$t$ 为参数）为普通方程，并说明方程的曲线是什么图形.

6. 求直线$\begin{cases}x=3t-1,\\y=1-2t\end{cases}$与曲线 $2x^2+3y-5=0$ 的交点坐标.

7. 已知参数方程为$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta, \\ y = y_0 + r\sin\theta. \end{cases}$

(1) 如果 r 为参变量，θ 为常数，那么这个参数方程表示什么曲线？

(2) 如果 θ 为参变量，r 为常数，那么这个参数方程表示什么曲线？