第二章

导数与微分

导数与微分是微积分的核心部分，深刻理解概念，熟练掌握方法，有利于后面学好积分学和多元函数的导数.

一、基本要求

(1)理解导数的概念，熟悉导数定义的结构及等价形式.

(2)理解导数的几何意义、函数的连续性与可导性之间的关系.

(3)熟练掌握基本求导公式及导数运算法则.

(4)掌握复合函数求导法则及隐函数、参数方程的求导法则.

(5)了解高阶导数的概念.

(6)了解微分的概念、微分形式的不变性、导数与微分的关系.

(7)掌握可微函数的微分方法，了解微分在近似计算中的应用.

二、内容提要

1. 导数

(1)导数的有关概念(表 2-1).

表 2-1

名　　称	定　　义
函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数	$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 记号：$f'(x_0)$，$y'\big\|_{x=x_0}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big\|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big\|_{x=x_0}$
函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数	$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

续表

名　称	定　义
函数 $f(x)$在点 x_0 处的右导数	$f'_{+}(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^{+}}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
函数 $f(x)$在点 x_0 处可导的充要条件	$f'_{+}(x_0)$与 $f'_{-}(x_0)$都存在且 $f'_{+}(x_0)=f'_{-}(x_0)$
高阶导数	二阶及二阶以上的导数称为高阶导数,即 $y^{(n)}=[y^{(n-1)}]'$

(2)导数的几何意义.函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$等于曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处的切线的斜率,即

$$k=f'(x_0)\text{或 } f'(x_0)=\tan\alpha$$

其中,k 表示切线的斜率;α 为切线的倾斜角.

①切线方程.若在点 $x=x_0$ 处,$f'(x_0)\neq\infty$,则曲线在该点处的切线方程为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

若 $f'(x_0)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处有垂直于 x 轴的切线.

②法线方程.若 $f'(x_0)=0$,则法线方程为 $x=x_0$;若 $f'(x_0)\neq 0$,则法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

(3)函数可导性与连续性的关系.函数在某点处可导,则在该点处必连续;但连续未必可导.当然,若函数在该点处不连续,则必不可导.

(4)导数的求法.

①求导法则(表 2-2).

表 2-2

名　称	法　则
四则法则	$(u\pm v)'=u'\pm v'$
	$(uv)'=u'v+uv'$ 推广:$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$
	$(Cu)'=Cu'$　(C 为常数)
	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$　$(v\neq 0)$

续表

名　　称	法　　则
复合函数求导法则	复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
隐函数求导法则	直接求导法：隐函数方程两边同时关于自变量求导，解出 y'
	对数求导法：方程两边先取对数，然后对 x 求导，再解出 y'
由参数方程所确定的函数的求导法则	设 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$ 确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$
高阶导数公式	$y''',y^{(4)},\cdots,y^{(n)}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3},\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4},\cdots,\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$

②基本初等函数的导数公式(表 2-3).

表 2-3

序　号	公　式	序　号	公　式
1	$(C)'=0$　(C 为常数)	9	$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$，μ 为任意常数
2	$(a^x)'=a^x\ln a$	10	$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$
3	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	11	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
4	$(\sin x)'=\cos x$	12	$(\cos x)'=-\sin x$
5	$(\tan x)'=\sec^2 x$	13	$(\cot x)'=-\csc^2 x$
6	$(\sec x)'=\sec x\tan x$	14	$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
7	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$	16	$(\mathrm{arccot}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

2. 微分

(1)微分的定义. 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，$x_0+\Delta x$ 及 x_0 在这区间

内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

(2)可微与可导的关系. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微$\Leftrightarrow y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，即 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$.

(3)微分的几何意义. 当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的 M 点的纵坐标的增量时，$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上 M 点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此，在点 M 的邻近处，可以用切线段来近似代替曲线段.

(4)微分的计算.

①微分运算法则.

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm \mathrm{d}v,\mathrm{d}(Cu)=C\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v,\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$$

②微分公式(表 2-4).

表 2-4

序　　号	公　　式	序　　号	公　　式
1	$\mathrm{d}(C)=0$	9	$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$
2	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$	10	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$
3	$\mathrm{d}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$	11	$\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$
4	$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$	12	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$
5	$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x$	13	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x$
6	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$	14	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$
7	$\mathrm{d}(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$	15	$\mathrm{d}(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$
8	$\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$	16	$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}\, x)=-\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

③复合函数的微分法则. 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx.$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$,所以,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \text{ 或 } dy=y'_u du.$$

无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数,微分形式 $dy=f'(u)du$ 均保持不变. 这一性质称为微分形式不变性.

三、习题解答

(一)习题 2-1 参考答案

1. 求下列函数的导数.

(1)$y=x^{1.6}$;　(2)$y=x^5$;　(3)$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(4)$y=\dfrac{1}{x^2}$;　(5)$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;　(6)$y=x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}$.

【解】 (1)$y'=1.6x^{0.6}$;(2)$y'=5x^4$;(3)$y'=(x^{-\frac{2}{3}})'=-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$;

(4)$y'=(x^{-2})'=-2x^{-3}$;(5)$y'=(x^{-\frac{1}{2}})'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(6)$y'=(x^2x^{\frac{2}{5}})'=(x^{\frac{12}{5}})'=\dfrac{12}{5}x^{\frac{7}{5}}$.

2. 试讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$,所以函数在点 $x=0$ 处连续. 因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,而当 $x\neq 0$ 时,$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,故$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在,所以函数在点 $x=0$ 处不可导.

3. 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$在点$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$处的切线的斜率,并写该点处的切线方程和法线方程.

【解】 因为 $y'=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$,于是 $y=\dfrac{1}{x}$在点$\left(\dfrac{1}{2},2\right)$处的切线的斜率为$k_1=y'\big|_{x=\frac{1}{2}}=-4$. 所以,切线方程为 $y-2=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$,即 $4x+y-4=0$.

因为 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处法线的斜率为 $k_2=-\frac{1}{k_1}=\frac{1}{4}$，所以法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)$，即 $2x-8y+15=0$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin x, & x\leqslant 0\\ a+bx, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，试确定 a,b 的值.

【解】 由可导必连续可知，函数在点 $x=0$ 处连续，因 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2\sin x=0$，所以 $a=0$. 又

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{bx}{x}=b$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x}{x}=2$$

所以 $b=2$.

5. 设 $f'(x_0)$ 存在，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$； (2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$； (4) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$.

(2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=-f'(x_0)$.

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}=f'(x_0)$.

(4)
$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}\\&=a\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{ah}+b\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-bh)-f(x_0)}{-bh}\\&=(a+b)f'(x_0).\end{aligned}$$

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续且可导，a,b 应取什么值？

【解题思路】 此题是可导的反问题，可利用可导的充要条件建立关于 a,b 的方程组，然后解方程组.

【解】 因为

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(1+\Delta x)^2-1}{\Delta x}=2$$

要使 $f(x)$在点 $x=1$ 处可导,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$存在,则

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{a(1+\Delta x)+b-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\left(a+\frac{a+b-1}{\Delta x}\right)-2$$

所以$\begin{cases}a+b-1=0\\a=2\end{cases}$,解得$\begin{cases}a=2\\b=-1\end{cases}$. 即当 $a=2,b=-1$ 时,$f(x)$在点 $x=1$ 处可导,故也连续.

总结:此处撇开连续性而直接求 $f(x)$在点 $x=1$ 处可导应满足的条件,是因为函数在一点处可导,则必在此点处连续.

(二)习题 2-2 参考答案

1. 求下列函数的导数.

(1)$y=6x^3-5x^2+4x+3$; (2)$y=2\cos x-3\tan x+4\sin x$;

(3)$y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+3^4$; (4)$y=\dfrac{x^5+\sqrt{x}+1}{x^3}$; (5)$y=e^x\cos x$;

(6)$y=x\sin x\ln x$; (7)$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$; (8)$y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}$;

(9)$y=3\arcsin x+2\arccos x$; (10)$y=(1+x^2)\arctan x$.

【解】 (1)$y'=18x^2-10x+4$;(2)$y'=-2\sin x-3\sec^2 x+4\cos x$;

(3)$y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$;(4)$y'=2x-\dfrac{5}{2x^3\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^4}$;(5)$y'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)$;

(6)$y'=\sin x\ln x+x\cos x\ln x+\sin x$;(7)$y'=\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}$;

(8)$y'=\dfrac{1}{1+\sin 2x}$;(9)$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;(10)$y'=2x\arctan x+1$.

2. 求下列函数在指定点处的导数.

(1)$y=6a^x-3\tan x+5(a>0)$,求 $y'|_{x=0}$;

(2)$y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,求 $y'|_{x=4}$.

【解】 (1)$y'|_{x=0}=6\ln a-3$;(2)$y'|_{x=4}=-\dfrac{1}{18}$.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x+5)^4$； (2) $y=\sqrt{a^2-x^2}$； (3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$；

(4) $y=\ln(1+x^2)$； (5) $y=\sin^2 x$； (6) $y=\cos(4-3x)$；

(7) $y=\tan x^2$； (8) $y=\arctan \mathrm{e}^x$；

(9) $y=(\arcsin x)^2$； (10) $y=\ln\cos x$.

【解】 (1) $y'=4(2x+5)^3(2x+5)'=8(2x+5)^3$.

(2) $y'=[(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}]'=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(a^2-x^2)'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

(3) $y'=\mathrm{e}^{-3x^2}(-3x^2)'=-6x\mathrm{e}^{-3x^2}$.

(4) $y'=[\ln(1+x^2)]'=\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)'=\frac{2x}{1+x^2}$.

(5) $y'=(\sin^2 x)'=2\sin x(\sin x)'=2\sin x\cos x=\sin 2x$.

(6) $y'=-\sin(4-3x)(4-3x)'=3\sin(4-3x)$.

(7) $y'=(\tan x^2)'=\sec^2 x^2(x^2)'=2x\sec^2 x^2$.

(8) $y'=(\arctan \mathrm{e}^x)'=\frac{1}{1+(\mathrm{e}^x)^2}(\mathrm{e}^x)'=\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$.

(9) $y'=[(\arcsin x)^2]'=2\arcsin x(\arcsin x)'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(10) $y'=(\ln\cos x)'=\frac{1}{\cos x}(\cos x)'=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(1-2x)$； (2) $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (3) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；

(4) $y=\arccos\frac{1}{x}$； (5) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$； (6) $y=\frac{\sin 2x}{x}$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$； (8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；

(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$； (10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

【解】 (1) $y'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}(1-2x)'=-\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

(2) $y'=[(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}]'=-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

(3) $y'=(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x)'=(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})'\cos 3x+\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}(\cos 3x)'$

$=-\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cos 3x+3\sin 3x\right)$.

(4) $y'=\left(\arccos\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

(5) $y'=\left(\frac{1-\ln x}{1+\ln x}\right)'=\frac{(1-\ln x)'(1+\ln x)-(1-\ln x)(1+\ln x)'}{(1+\ln x)^2}$.

(6) $y'=\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)'=\frac{(\sin 2x)'x-\sin 2x\cdot x'}{x^2}=\frac{2x\cos x-\sin 2x}{x^2}$.

(7) $y'=(\arcsin\sqrt{x})'=\frac{1}{\sqrt{1-x}}(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

(8) $y'=[\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})]'=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(x+\sqrt{a^2+x^2})'=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

(9) $y'=[\ln(\sec x+\tan x)]'=\frac{1}{\sec x+\tan x}(\sec x+\tan x)'=\sec x$.

(10) $y'=[\ln(\csc x-\cot x)]'=\frac{1}{\csc x-\cot x}(\csc x-\cot x)'=\csc x$.

5. 已知函数 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数.

(1) $y=f(\sqrt{x})$； (2) $y=\sqrt{f(x)}$； (3) $y=f(e^x)$； (4) $y=e^{f(x)}$.

【解题思路】 此题考查复合函数的求导法则，逐层求导.

【解】 (1) $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$；(2) $y'=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}f'(x)$；(3) $y'=f'(e^x)e^x$；

(4) $y'=e^{f(x)}f'(x)$；

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=e^{-x}(x^2-2x+3)$；(2) $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$； (3) $y=\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2$；

(4) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$； (5) $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$； (6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

【解】 (1) $y'=[e^{-x}(x^2-2x+3)]'=-e^{-x}(x^2-2x+3)+e^{-x}(x^2-2x+3)'$

$=-e^{-x}(x^2-4x+5)$.

(2) $y'=(\sin^2 x\cdot\sin x^2)'=2\sin x\cos x\sin x^2+2x\sin^2 x\cos x^2$

$=\sin 2x\sin x^2+2x\sin^2 x\cos x^2$.

(3) $y'=\left[\left(\arctan\frac{x}{2}\right)^2\right]'=2\arctan\frac{x}{2}\left(\arctan\frac{x}{2}\right)'=\frac{4\arctan\frac{x}{2}}{x^2+4}$.

(4) $y'=\left(\ln\cos\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}\left(\cos\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$.

(5) $y'=\left(x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}\right)'=\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\times\frac{1}{2}+\frac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}}$

$=\arcsin\frac{x}{2}$.

(6) $y'=\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})'=\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

7. 已知曲线 $y=ax^3$ 和直线 $y=x+b$ 在点 $x=1$ 处相切,问 a 和 b 应取何值?

【解】 因为 $y=ax^3$ 的导数 $y'=3ax^2$,所以在点 $x=1$ 处的导数值为 $y'=3a$,由于已知曲线 $y=ax^3$ 和直线 $y=x+b$ 在点 $x=1$ 处相切,故 $3a=1$,得 $a=\frac{1}{3}$.

又曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在点 $x=1$ 处的切线为 $y-\frac{1}{3}=x-1$,所以 $b=-\frac{2}{3}$.

(三)习题 2-3 参考答案

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$; (2) $y=e^{2x-1}$; (3) $y=x\cos x$;

(4) $y=e^{-x}\sin x$; (5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$; (6) $y=\tan x$;

(7) $y=(1+x^2)\arctan x$; (8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

【解】 (1)因为 $y'=(2x^2+\ln x)'=4x+\frac{1}{x}$,所以 $y''=4-\frac{1}{x^2}$.

(2)因为 $y'=(e^{2x-1})'=2e^{2x-1}$,所以 $y''=2(e^{2x-1})'=4e^{2x-1}$.

(3)因为 $y'=(x\cos x)'=\cos x-x\sin x$,所以

$$y''=-\sin x-(x\sin x)'=-\sin x-(\sin x+x\cos x)$$
$$=-2\sin x-x\cos x.$$

(4)因为 $y'=(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$,所以

$$y''=[e^{-x}(\cos x-\sin x)]'=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$$
$$=-2e^{-x}\cos x$$

(5)因为 $y'=(\sqrt{a^2-x^2})'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$,所以

$$y''=\frac{-(\sqrt{a^2-x^2})+x(\sqrt{a^2-x^2})'}{a^2-x^2}=-\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(6)因为 $y'=(\tan x)'=\sec^2 x$,所以

$$y''=(\sec^2 x)'=2\sec x(\sec x)'=2\sec^2 x\tan x$$

(7)因为

$$y'=[(1+x^2)\arctan x]'=2x\arctan x+(x^2+1)\frac{1}{1+x^2}$$
$$=2x\arctan x+1$$

所以 $y''=(2x\arctan x)'=2\arctan x+2x(\arctan x)'=2\arctan x+\dfrac{2x}{1+x^2}$.

(8)因为 $y'=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,

所以

$$y''=-\frac{1}{x^2+1}(\sqrt{x^2+1})'=-\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

2. 设 $f''(u)$存在,求下列函数的二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(1)$y=f(x^2)$; (2)$y=f(\sin x)$.

【解】 (1)因为 $y'=2xf'(x^2)$,所以 $y''=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2)$.

(2)因为 $y'=\cos xf'(\sin x)$,所以 $y''=-\sin xf'(\sin x)+\cos^2 xf''(\sin x)$.

3. 求下列函数的 n 阶导数.

(1)$y=xe^x$; (2)$y=\sin^2 x$.

【解】 逐阶求导并归纳总结如下:

(1)$y^{(n)}=(x+n)e^x$; (2)$y^{(n)}=2^{n-1}\sin\left[2x+(n-1)\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(四)习题 2-4 参考答案

1. 求由下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(1)$y^2-2xy+9=0$; (2)$x^3+y^3-3axy=0$;

(3)$xy=e^{x+y}$; (4)$y=1-xe^y$.

【解题思路】 此题考查一个方程所确定的隐函数的求导,把 y 看成 x 的函数,用复合函数求导法则对方程两边关于 x 求导,然后解出$\dfrac{dy}{dx}$.

【解】 (1)把方程 $y^2-2xy+9=0$ 两边分别对 x 求导,得

$$2y\frac{dy}{dx}-2y-2x\frac{dy}{dx}=0$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{y-x}$$

(2)把方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 两边分别对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3+y^3-3axy)=3x^2+3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-3ay-3ax\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$$

(3)把方程 $xy=\mathrm{e}^{x+y}$ 两边分别对 x 求导,得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{\mathrm{e}^{x+y}-x}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y}{x-\mathrm{e}^{x+y}}$$

(4)把方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 两边分别对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\left(\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{e}^y}{1+x\mathrm{e}^y}$$

2.求下列函数的导数.

(1)$y=x^{2x}$;　　(2)$y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

【解题思路】 此题考查幂指函数、连乘形式的函数、开方形式的函数的求导方法.

【解】 (1)$\ln y=\ln x^{2x}=2x\ln x$,应用隐函数的求导方法,得

$$\frac{1}{y}y'=2\ln x+2$$

解得

$$y'=x^{2x}(2\ln x+2)$$

(2)$\ln y=x\ln\frac{x}{1+x}$,应用隐函数的求导方法,得

$$\frac{1}{y}y'=\ln\frac{x}{1+x}+x\frac{1+x}{x}\left(\frac{x}{1+x}\right)'$$

解得

$$y'=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\left(\ln\frac{x}{1+x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

3. 求下列参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t}\\ y=2\mathrm{e}^{t}\end{cases}$.

【解】 (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}$；(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}$.

4. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

【解题思路】 此题考查隐函数求导的应用，可结合导数的几何意义解决问题.

【解】 把方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 两边分别对 x 求导，得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$，曲线在点$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线的斜率为

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\frac{\sqrt{2}}{4}a}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^{\frac{1}{3}}=-1$$

曲线在此点处的切线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=-1\times\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$，即 $x+y-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a=0$.

曲线在此点处的法线方程为 $y-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a=x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，即 $x-y=0$.

5. 求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ ($a>0,b>0,\theta$ 为参数) 在 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法线方程.

【解】 用上面类似的解法可得切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

法线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}b=\frac{a}{b}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$$

6. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数.

(1) $x^2-y^2=1$；　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

(3) $y=\tan(x+y)$；　　(4) $y=1+x\mathrm{e}^y$.

【解题思路】 此题考查隐函数求高阶导数的方法.

【解】 (1)应用隐函数的求导方法,得 $2x-2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{y}$.再对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}=\frac{y-\dfrac{x^2}{y}}{y^2}=\frac{y^2-x^2}{y^3}=-\frac{1}{y^3}$$

(2)应用隐函数的求导方法,得 $2b^2x+2a^2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$,解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$,再对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{y-x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}=-\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{1}{y^3}$$

(3)应用隐函数的求导方法,得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\sec^2(x+y)$,解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\csc^2(x+y)$,再对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2\csc^2(x+y)\cot(x+y)\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

(4)应用隐函数的求导方法,得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^y+x\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^y}{1-x\mathrm{e}^y}=\dfrac{\mathrm{e}^y}{2-y}$,再对 x 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(2-x\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^{2y}}{(1-x\mathrm{e}^y)^2}=\frac{(3-y)\mathrm{e}^{2y}}{(2-y)^3}$$

也可利用$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^y}{2-y}$,得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2-y)+\mathrm{e}^y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(2-y)^2}=\frac{(3-y)\mathrm{e}^{2y}}{(2-y)^3}$$

总结:当对等式两边关于 x 求导时,一定将 y 看成 x 的函数.

(五)习题 2-5 参考答案

1.求下列各函数在给定条件下的增量和微分.

(1)$y=2x+1$,x 由 2 变到 1.99;

(2)$y=x^2+2x+3$,x 由 0 变到 0.01.

【解】 (1)$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=-0.02$,$\mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\Delta x=-0.02$.

(2)$\Delta y=0.020\,1$,$\mathrm{d}y=0.02$.

2.求下列函数的微分.

(1)$y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$; (2)$y=x\sin 2x$; (3)$y=\ln\sqrt{x^2-1}$; (4)$y=x^2\mathrm{e}^{3x}$.

【解题思路】 此题利用导数的四则运算法则和复合运算法则，并用公式 $dy=f'(x)dx$.

【解】 (1)$dy=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$；(2)$dy=(\sin 2x+2x\cos 2x)dx$；

(3)$dy=\dfrac{x}{x^2+1}dx$；(4)$dy=(2xe^{3x}+3x^2e^{3x})dx$.

3. 将适当的函数填入括号内，使等式成立.

(1)d(　　)$=2xdx$；　(2)d(　　)$=\cos xdx$；

(3)d(　　)$=e^{-2x}dx$；　(4)d(　　)$=\dfrac{1}{1+x}dx$.

【解】 (1)x^2+C；(2)$\sin x+C$；(3)$-\dfrac{1}{2}e^{-2x}+C$；(4)$\ln(1+x)+C$.

4. 计算下列各式的近似值(精确到 0.000 1).

(1) $\sqrt[3]{1.02}$；　(2)$\ln 0.98$；　(3)$\sin 0.5°$　(4)$e^{1.01}$.

【解题思路】 利用 $f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x_0)\Delta x$.

【解】 (1)令 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x_0=1$，$\Delta x=0.02f'(x_0)=\dfrac{1}{3}$，$\sqrt[3]{1+0.02}=\sqrt[3]{1}+\dfrac{1}{3}\times 0.02\approx 1.0667$；其他类似可得.

(2)-0.0200；(3)0.0087；(4)2.9900.

5. 设水管壁的横截面形状是圆环，其内径为 120 mm，壁厚为 3 mm，利用微分求圆环面积的近似值(精确到 1 mm²).

【解】 因为 $A=4\pi r^2$，$dA=8\pi rdr=8\pi r\Delta r$，所以

$$\Delta A\approx dA=8\pi r\Delta r=8\times 3.14\times 120\times 3=9\,043.2\ \text{mm}^2$$

6. 边长为 20 cm 的金属立方体受热膨胀，当边长增加 2 mm 时，求立方体所增加的体积的近似值(精确到 1 cm³).

【解】 因为 $V=x^3$，$dV=3x^2dx=3x^2\Delta x$，所以

$$\Delta V\approx dV=3x^2\Delta x=3\times 20^2\times 0.2=240\ \text{cm}^3$$

(六)复习题二

1. 单选题.

(1)若(　　)式所示的极限存在，则称 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数存在.

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$　　B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$　　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

【答案】 A.

【解析】 其他形式都是只能保证在一侧可导.

(2)函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处(　　).

A. 连续且可导　　B. 不可导

C. 不连续　　D. 连续但不可导

【答案】 A.

【解题思路】 此题考查函数的连续性和可导性的定义.

因为 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$$

故函数在点 $x=0$ 处连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$,所以函数在点 $x=0$ 处可导.

总结:分段函数分段点处的导数常从单侧导数定义出发,紧扣定义讨论可导性.

(3)函数在点 x_0 处的左、右导数均存在是函数在点 x_0 处导数存在的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要　　D. 既不充分又不必要

【答案】 B.

【解析】 函数在点 x_0 处导数存在,则能推得函数在点 x_0 处左、右导数均存在,但是反之不行.

函数在点 x_0 处左、右导数均存在且相等,才能推得函数在点 x_0 处导数存在.

(4)设 $f(x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha$($A$ 与 Δx 无关),当 α 是(　　)时,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微.

A. 无穷小　　B. 关于 Δx 的无穷小

C. 关于 Δx 的同阶无穷小　　D. 关于 Δx 的高阶无穷小

【答案】 D.

【解析】 此题考查函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微的定义.

(5)已知 $y=e^{f(x)}$,则 $y''=$(　　).

A. $e^{f(x)}$　　B. $e^{f(x)}f'(x)$

C. $e^{f(x)}[f'(x)+f''(x)]$　　D. $e^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

【答案】 D.

【解析】 此题考查高阶导数定义和复合函数求导.

(6)若 $f(u)$可导,且 $y=f(e^x)$,则有(　　).

A. $dy=f'(e^x)dx$　　B. $dy=f'(e^x)e^x dx$

C. $dy=f(e^x)e^x dx$　　D. $dy=[f(e^x)]'e^x dx$

【答案】 B.

【解析】 此题考查复合函数求导及微分.

(7)若函数 $f(x)$是可微函数,则当 $\Delta x\to 0$ 时,在点 x 处的 $\Delta y-dy$ 是关于 Δx 的(　　).

A. 高阶无穷小　　B. 等价无穷小

C. 低阶无穷小　　D. 无法确定

【答案】 A.

【解析】 此题考查微分定义 $\Delta y=dy+o(\Delta x)$.

(8)设 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在点 $x=0$ 处可导的(　　)条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要　　D. 既不充分又不必要

【答案】 C.

【解析】 $F(x)$中含有绝对值符号,讨论应从单侧导数的定义着手.

$$F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)+f(0)$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-f(x)\frac{\sin x}{x}\right]=f'(0)-f(0)$$

当 $f(0)=0$ 时,$F'_+(0)=F'_-(0)$,反之当 $F'_+(0)=F'_-(0)$时,$f(0)=0$,因此应选 C.

2. 填空题.

(1)设 $f'(x_0)$存在,则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$________.

【答案】 $2f'(x_0)$.

【解析】 此题考查导数的定义.

(2)已知 $y=\sqrt{x^2}$,则 $f'_-(0)=$________,$f'_+(0)=$________.

【答案】 $-1,1$.

【解析】 $f'_-(0)=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim\limits_{h\to0^-}\dfrac{-h}{h}=-1$,

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{h}{h}=1.$$

(3)若 $f(x)$在点 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=$________.

【答案】 0.

【解析】 由可导必连续知,$\lim\limits_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=f(x_0)-f(x_0)=0$.

(4)设 $f(x)=\ln x^3+e^{3x}$,则 $f'(1)=$________.

【答案】 $3+3e^3$.

【解析】 因为 $f'(x)=(3\ln x+e^{3x})'=\dfrac{3}{x}+3e^{3x}$,所以 $f'(1)=3+3e^3$.

(5)方程式 $e^y+xy=e$ 确定 y 是 x 的函数,则导数值$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,1)}=$________.

【答案】 $-\dfrac{1}{e}$.

【解析】 方程 $e^y+xy=e$ 两边对 x 求导,得 $e^y\cdot y'+x+xy'=0$,所以$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,1)}=\left.\dfrac{-x}{e^y+x}\right|_{(0,1)}=-\dfrac{1}{e}$.

(6)设$\begin{cases}x=t^3+t-1\\y=3-2t^2\end{cases}$,则$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=$________.

【答案】 -1.

【解析】 因为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{-4t}{3t^2+1}$,$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=-1$.

3.计算题.

(1)求下列函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

①$y=\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)\sqrt{x}$;　　②$y=\dfrac{x^2}{\ln x}$;　　③$y=(x\sqrt{x}+3)e^{2x}$;

④$y=\sqrt{1+\ln^2x}$;　　⑤$2y-x=\sin y$;　　⑥$\begin{cases}x=a\cos^2t\\y=a\sin t\end{cases}$.

【解】 ①$y'=2+\frac{1}{2x\sqrt{x}}$;②$y'=\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}$;

③$y'=\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+2x\sqrt{x}+6\right)e^{2x}$;④$y'=\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;

⑤两边对 x 求导,得 $2y'-1=\cos y y'$,整理得 $y'=\frac{1}{2-\cos y}$;

⑥$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{a\cos t}{-2a\cos t\sin t}=-\frac{1}{2}\csc x$.

(2)求下列函数的微分 dy.

①$y=\cos^2 x^2$; ②$y=\ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)$; ③$y=(1+x^2)\arctan x$; ④$y=x+\ln y$.

【解】 ①$dy=-2x\sin 2x^2 dx$;②$dy=-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$;

③$dy=(2x\arctan x+1)dx$;④$dy=\frac{y}{y-1}dx$.

(3)求曲线$\begin{cases}x=2e^t\\ y=e^{-t}\end{cases}$在点 $t=0$ 处的切线方程与法线方程.

【解】 曲线在点 $t=0$ 处的导数$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^t}{2e^t}=-\frac{1}{2}$,而 $t=0$ 的相应点为(2,1),所以切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,法线方程为 $y-1=2(x-2)$.

4. 证明题.

(1)已知 $y=e^x\sin x$,求证:$y''-2y'+2y=0$.

【解题思路】 此题考查函数的一阶导数和二阶导数的求法.

【证明】 因为

$$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$$

$$y''=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$$

所以

$$y''-2y'+2y=0.$$

(2)如果 $f(x)$为偶函数,且 $f'(0)$存在,证明 $f'(0)=0$.

【解题思路】 已知 $f'(0)$存在,可由导数定义出发,结合偶函数的性质证明结论成立.

【证明】 由导数定义可知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(-x)-f(0)}{x}$$

$$\xlongequal{令 t=-x}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{-t}=-\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=-f'(0)$$

故 $f'(0)=0$.

(3)证明:双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.

【证明】 双曲线 $y=\frac{a^2}{x}$在点 $x=x_0$ 处的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{a^2}{x^2}\bigg|_{x=x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}$$

故双曲线在点 $x=x_0$ 处的切线为

$$y-\frac{a^2}{x_0}=-\frac{a^2}{x_0^2}(x-x_0)$$

切线与 x 轴和 y 轴的交点分别为$(2x_0,0)$和$\left(0,\frac{2a^2}{x_0}\right)$,因此切线与两坐标轴构成的三角形的面积为

$$\frac{1}{2}|2x_0|\cdot\left|\frac{2a^2}{x_0}\right|=2a^2$$