第一章　行　列　式

本章从解二元、三元线性方程组出发，以一个符号的形式引入行列式的概念，然后介绍行列式的性质及计算方法，最后介绍利用行列式解方程组的方法——克拉默法则.

第一节　行列式的定义、性质及计算

一、行列式的定义

1. 二阶行列式

含有两个未知量的一次方程称为二元一次方程，表示平面上的直线，故也称为二元线性方程. 例如，

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

就是由两个二元线性方程组成的方程组，其中，x_1，x_2 是未知量，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}是未知量的系数，b_1，b_2 为常数项. 下面用高斯消元法解此方程组.

第一个方程乘以 a_{22}减去第二个方程的 a_{12}倍，整理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12};$$

第二个方程乘以 a_{11}减去第一个方程的 a_{21}倍，整理可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为进一步揭示解的规律，引进记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

并称其为**二阶行列式**，记为 D. 其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$称为行列式的**元素**，第一个下标 i 表示元素 a_{ij} 位于行列式从上到下的第 i 行，第二个下标 j 表示元素 a_{ij} 位于行列式从左到右的第 j 列. 行列式中从左上角到右下角的线称为**主对角线**，位于主对角线上的元素称为**主对角线元素**；从左下角到右上角的线称为**副对角线**，位于副对角线上的元素称为**副对角线元素**. 于是，二阶行列式的值为主对角线元素的乘积减去副对角线元素的乘积.

一般地，由 $2^2=4$ 个元素排成两行两列的数表，并在数表的左右两侧各加一条竖线所构成的式子叫做**二阶行列式**.

注意 (1)二阶行列式有两行两列，即行数与列数相等，并且行数(列数)恰为行列式的阶数.

(2)习惯上经常在行列式记号 D 的右下角标明其阶数，如二阶行列式也常常记为 D_2.

例 1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=1\times7-5\times3=-8.$

2. 三阶行列式

类似地，为了解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

引入三阶行列式的概念. 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**，记为 D_3，即

$$\begin{aligned} D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

观察上式可以发现：

(1) 三阶行列式可表示为第一行各元素分别与一个二阶行列式乘积的代数和.

(2) 元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 后面所乘的二阶行列式恰好是由原行列式中分别划去元素 $a_{1j}(j=1,2,3)$ 所在的第一行第 j 列后剩下的元素按原次序所组成的.

例 2　计算三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$.

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 25.$

3. *n* 阶行列式

由二阶、三阶行列式的定义，可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表，并在数表的左右两侧各加一条竖线所构成的式子称为 n **阶行列式**，记为 D_n，即

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意　n 阶行列式有 n 行 n 列，即行数 = 列数 = 阶数.

在 n 阶行列式 D_n 中任意选定 m 行 m 列，位于这些选定行、列交叉处的元素按原次序所组成的 m 阶行列式，称为 D_n 的一个 m **阶子式**. 例如，在

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中选择第一、二行和第一、二列，则位于第一、二行和第一、二列交叉处的元素按其在 D_n 中的次序组成的二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 就是 D_n 的一个二阶子式.

定义 2　在 n 阶行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列，剩下的元素按原来的次序所构成的 $(n-1)$ 阶子式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 这样，

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$

$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13},$$

即三阶行列式等于第一行所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.

事实上,行列式表示一个由递推运算关系所得的数:

当 $n=1$ 时,规定 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$;

当 $n=2$ 时,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$;

当 $n>2$ 时,$D_n=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$.

例 3 求行列式 $D_3=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 第二行、第三列元素 3 的余子式与代数余子式.

解 余子式 $M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-4$,代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\times(-4)=4$.

二、行列式的性质

行列式 D 的行与同序号的列互换所得到的行列式叫做行列式 D 的**转置行列式**,记为 D^{T},即若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$.

性质 1 行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知,行列式的行与列所处的地位是对等的,故对行列式的行成立的性质,对列也成立;反之,对列成立的性质,对行也成立.

性质 2 对调行列式的某两行(列),行列式仅改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 若行列式有两行(列)的对应元素相同,则此行列式等于零.

性质 3 若行列式的某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4(单行可提性) 行列式的某一行(列)的各个元素同乘以数 k,等于行列式乘以数 k,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

例 4 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$,求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$$= (-2)\times(-3)\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 30.$$

推论 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的各个元素都是两数之和,则此行列式等于两个行列式的和,这两个行列式的这一行(列)的元素分别为相应的两数中的一个,其余元素与原来行列式的对应元素相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

推论 以数 k 乘行列式的某行(列)的所有元素,然后加到行列式的另一行(列)的对应元素上去,则行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+kr_1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21} & ka_{12}+a_{22} & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

其中数 k 乘第 i 行(列)加到第 j 行(列),记做 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

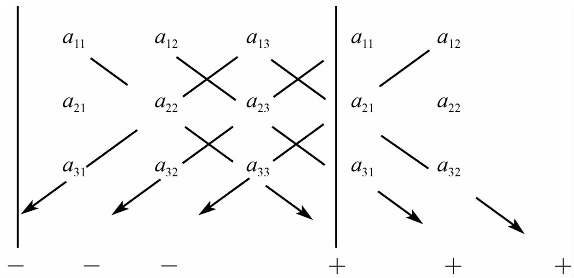
例 5 计算四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $D_4 \xlongequal[r_2+r_3]{r_2+r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

三、行列式的计算

1. 计算二阶、三阶行列式的对角线法

三阶行列式除可按第一行展开外，还可按下述对角线法计算：将行列式 D_3 的第一列与第二列重新写到行列式 D_3 的右侧，即



则三阶行列式的值就等于三条主对角线上的元素乘积之和减去三条副对角线上的元素乘积之和.

例 6 计算行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$.

解 按对角线法有

$$D_3 = 1\times(-1)\times4+(-2)\times2\times3+3\times2\times2-3\times(-1)\times3-2\times2\times1-4\times2\times(-2)$$
$$= 17.$$

注意 对角线法仅对二阶和三阶行列式成立，对四阶及四阶以上行列式不成立.

2. 计算任意阶行列式的 Laplace 展开定理

事实上，行列式的计算除可按第一行展开外，可按任意行（或列）展开，即有下述定理.

定理 1（Laplace 展开定理） 行列式 D_n 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应代数余子式的乘积之和，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,(i = 1,2,\cdots,n); \tag{1-1}$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,(j = 1,2,\cdots,n). \tag{1-2}$$

例 7 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

解 由定理 1 可知，计算行列式的值应按零最多的行或列展开. 注意到行列式 D_4 的各元素的代数余子式的符号有如下规律：

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

故按第一行展开，得

$$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & c & b & a \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & c & b \\ d & c & b \end{vmatrix} = -ab\begin{vmatrix} 0 & c \\ d & c \end{vmatrix} = abcd.$$

推论 行列式的某一行(列)各个元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$D = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0\ (i \neq k; i,k = 1,2,\cdots,n); \tag{1-3}$$

$$D = a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0\ (j \neq k; j,k = 1,2,\cdots,n). \tag{1-4}$$

例 8 验证例 6 中第一行各元素与第三行对应元素的代数余子式乘积之和为零.

解 $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$，$A_{31} = M_{31} = -1$，$A_{32} = -M_{32} = 4$，$A_{33} = M_{33} = 3$，则

$$1 \cdot A_{31} + (-2) \cdot A_{32} + 3 \cdot A_{33} = 1 \times (-1) + (-2) \times 4 + 3 \times 3 = 0.$$

主对角线上方元素全为零(即非零元素都位于主对角线及其下方)的行列式称为**下三角行列式**；主对角线下方元素全为零(即非零元素都位于主对角线及其上方)的行列式称为**上三角行列式**.

例 9 证明下三角行列式 D_n 的值等于其主对角线上元素之积.

证 将这个行列式按第一行展开，得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

继续按第一行展开,即得

$$D_n=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

上三角行列式 $D=D_n^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

结论:上(下)三角行列式的值等于其主对角线上元素之积.

注意　计算高阶行列式时可利用性质想办法使其转化为上(下)三角行列式.

3. 利用行列式的性质计算任意阶行列式的值

利用行列式的性质计算行列式的值是行列式计算的最常用的方法. 一般情况下,需根据行列式的特征选用合适的性质,使之转化为上(下)三角行列式,然后求值. 例如,行列式各行(列)数字之和都相同,可将各列(行)加到第一列(行),然后将第一列(行)提出公因子再计算. 事实上,计算行列式的规律是:想办法将不同元素化成相同的元素,将相同的元素化成零. 下面举例说明.

例 10　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & a & a & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}.$

解　$D_4 \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 3a+b & 3a+b & 3a+b & 3a+b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix}$

$$=(3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & a & a & a \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{c_2-c_4\\ c_1-c_4}]{c_3-c_4} (3a+b)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b-a & a \\ 0 & b-a & 0 & a \\ b-a & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$
=(3a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & 0 & b-a & 0 \\ a & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}=(3a+b)(b-a)^3.
$$

例 11　计算行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$
\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_1]{\substack{r_2+4r_1 \\ r_3+3r_1}} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_3-2r_2}
$$

$$
\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-3r_3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = -140.
$$

例 12　计算箭形行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解

$$
D_n \xlongequal[\substack{\cdots \\ c_1-\frac{1}{n}c_n}]{\substack{c_1-\frac{1}{2}c_2 \\ c_1-\frac{1}{3}c_3}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)n!.
$$

例 13　证明 $n(n\geqslant 2)$ 阶范德蒙(Vandermonde) 行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),
$$

其中 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$ 等于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 $(a_i-a_j)(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的乘积.

证 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$，显然成立.

假设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立，对于 n 阶范德蒙行列式，从第 n 行开始，后一行减去前一行的 a_1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ a_2^2-a_1a_2 & a_3^2-a_1a_3 & \cdots & a_n^2-a_1a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2}\end{vmatrix},$$

每列提出公因子 $a_i-a_1(i=2,3,\cdots,n)$，得

$$\begin{aligned}D_n&=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}\\ &=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)D_{n-1}\\ &=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)\\ &=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).\end{aligned}$$

例 14 计算 $D_4=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d\\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d\\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$.

解 注意到行列式中除第一行和第一列外，其他元素均为它前一行、前一列对应元素之和，故可根据行列式的性质，从最后一行开始，后一行减去前一行，即

$$D_4 \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix}$.

3. 求位于行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 18 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ 中第三行第二列的元素 4 的余子式和代数余子式，若第三行第二列元素不是 4 而是其他值，其余子式和代数余子式是否有变化?

4. 已知四阶行列式 D_4 中第二列元素依次为 $-1,2,0,1$，他们的余子式依次为 $5,3,-9,4$，求 D_4.

5. 证明：

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

6. 计算下列四阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} x_1 & -x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & -x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & -x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & b & 0 \end{vmatrix}$.

第二节　克拉默法则

一般地，含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1-5}$$

其中系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 及常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为已知数. 令

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D 叫做方程组(1-5)的**系数行列式**，D_j 是把 D 中的第 j 列(即 x_j 的系数)替换为方程组右端的常数项而得到的行列式. 可以证明此时有如下的法则.

定理 2(克拉默法则)　若线性方程组(1-5)的系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解且

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

例 1　解线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$

解　系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

故可用克拉默法则求解.

又因为

$$D_1=\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{vmatrix}=2,\ D_2=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2,\ D_3=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-2,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=1,x_3=\frac{D_3}{D}=-1.$$

当 n 元线性方程组(1-5)的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时,方程组化为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0.\end{cases}\tag{1-6}$$

方程组(1-6)称为 **n 元齐次线性方程组**. 相应地,当方程组(1-5)中的常数项不全为零时叫做 **n 元非齐次线性方程组**.

如果齐次线性方程组(1-6)的系数行列式 $D\neq0$,则由克拉默法则知齐次线性方程组(1-6)有唯一解 $x_1=0,x_2=0,\cdots,x_n=0$(零解);如果齐次线性方程组(1-6)除零解外还有不全为零的解(非零解),那么该齐次线性方程组(1-6)的系数行列式 D 必等于零,即有下面的推论.

推论　若齐次线性方程组(1-6)的系数行列式 $D\neq0$,则该方程组仅有零解;若齐次线性方程组(1-6)有非零解,则系数行列式 D 必等于零.

例 2　问 λ 为何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解?

解　由推论知,若所给齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式 $D=0$. 其中

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[c_3+2c_2]{c_1-c_2}\begin{vmatrix}3-\lambda&-2&0\\\lambda-1&3-\lambda&7-2\lambda\\0&1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&7-2\lambda\\1&3-\lambda\end{vmatrix}-(\lambda-1)\begin{vmatrix}-2&0\\1&3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(3-\lambda)(\lambda-2).$$

令 $D=0$,得 $\lambda=0,2,3$,此时齐次线性方程组有非零解.

但是,用克拉默法则解线性方程组,必须具备两个前提条件:

(1) 方程个数与未知数个数相等;

(2) 系数行列式 D 不等于零.

克拉默法则的优点是不仅指出了解的存在,而且还具体给出了解的表达式,表现了方程组的解与系数、常数项的关系,有助于分析问题,在理论上具有重要的意义. 但是克拉默法则将解的表达式用 $n+1$ 个 n 阶行列式表示,如果 n 很大,则计算量非常大,另外,在实际问题中遇到的线性方程组,往往方程个数与未知数个数不相等,这就使得克拉默法则的应用受到了限制.

习题 1-2

1. 填空题.

(1) 若线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ \lambda x_1+x_2=2 \end{cases}$ 有唯一解,则 λ 的值为__________.

(2) 若齐次线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+3x_2=0, \\ x_1+(\lambda-2)x_2=0 \end{cases}$ 有非零解,则 λ 的值为________.

2. 解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=2, \\ 6x_1-2x_2=-5; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+x_3=2, \\ x_1-3x_2-x_3=4; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y-2z=-3, \\ 5x-2y+7z=22, \\ 2x-5y+4z=4. \end{cases}$

3. 判断齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0, \\ x_1-2x_2+4x_3=0, \\ 5x_1+8x_2-2x_3=0 \end{cases}$ 是否仅有零解.

第三节　用 MATLAB 计算行列式的值

在 MATLAB 中,求行列式的值非常简单. 其实现过程为:

(1) 将行列式的元素放在方括号[ ]内赋值给一个变量 a;

(2) 调用命令 det(a) 即可求出行列式的值.

例 1　求二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

输入:>> a = [1 2;3 4];

　　　>> det(a)

输出:ans =

　　　　　　−2

注意　(1) 输入行列式的元素时,按行输入,同一行不同元素之间用空格或逗号分隔,不同行之间用分号分隔,即命令 a = [1 2;3 4];中元素"2"后的分号起换行作用.

(2) 在命令 a=[1 2;3 4];中,最后的分号";"起抑制显示作用,用来隐藏不必显示的信息,如果没有分号,则将输出 a =

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 4. \end{matrix}$$

(3)ans 为系统默认的变量名,在没有定义变量时,系统将采用 ans. 若想赋值给指定的变量,应指出. 如命令 det(a) 亦可写成 d = det(a),此时则将行列式的值赋给指定的变量 d. MATLAB 将输出 d =−2.

例 2　计算行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

```
输入:>> a = [-2 2 -4 0;4 -1 3 5;3 1 -2 -3;2 0 5 1];
     >> det(a)
输出:ans =
        -270
```

例 3　求行列式 $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ 第三行第一列元素 3 的余子式与代数余子式.

```
输入:>> a = [-2 2 -4 0;4 -1 3 5;3 1 -2 -3;2 0 5 1];
     >> a(3, :) = [ ];
     >> a(:,1) = [ ];
     >> det(a)
输出:ans =
          -48
```

注意　(1) 命令 a(3, :) = [　] 将行列式第三行元素删除,其中"3"表示取行列式的第三行元素,":"表示取行列式所有列的元素,等号右端的"[　]"表示赋值空,即删除. 类似可得,命令 a(:,1) = [　] 将行列式第一列的元素删除. 于是删除第三

行、第一列元素后所得行列式即为原行列式的余子式.

(2) 在对变量赋值时,系统总是以最后所赋的值作为变量的值进行运算,从而 det(a) 的结果 -48,即为所求余子式,从而代数余子式为 $(-1)^{3+1}\times(-48)=-48$.

例 4 解线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0. \end{cases}$

输入:
```
>> a = [1 1 0;0 1 1;1 0 1];   % 输入方程组中未知数的系数所组成的行列式
>> b = [2;0;0];              % 输入常数项
>> d = det(a);               % 计算系数行列式
>> a(:,1) = b;               % 用右端常数项替换系数行列式的第一列
>> d1 = det(a);              % 计算替换后的行列式并赋值给 d1
>> x1 = d1/d
```
输出:
```
x1 =

     1
```
类似可求得 $x_2=1, x_3=-1$.

注意 % 后面的内容是注释说明部分,MATLAB 不执行 % 后面内容.

本章小结

一、基本概念

1. 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表,并在数表的左右两侧各加一条竖线所构成的式子称为 n 阶行列式,记为 D_n,即

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. 在 n 阶行列式 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列,剩下的元素按原来的次序所构成的 $n-1$ 阶子式,称为元素 a_{ij} 的余子式,记为 M_{ij};元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 乘上 $(-1)^{i+j}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记为 A_{ij},即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

3. 含有 n 个未知数 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases}$$

其中系数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 及常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均为已知数. 若常数项全为零,称为 n 元齐次

线性方程组. 相应地，当方程组中的常数项不全为零时叫做 n 元非齐次线性方程组.

二、基本知识

1. Laplace 展开定理

行列式 D_n 等于它的任意一行(列) 的各元素与其对应代数余子式乘积之和，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}\,(i = 1,2,\cdots,n);$$

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}\,(j = 1,2,\cdots,n).$$

2. 行列式的性质

性质 1　行列式 D 与其转置行列式 D^{T} 相等，即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

性质 2　对调行列式的某两行(列)，行列式仅改变符号.

推论　若行列式有两行(列) 的对应元素相同，则此行列式等于零.

性质 3　若行列式的某一行(列) 的元素全为零，则此行列式等于零.

性质 4(单行可提性)　行列式的某一行(列) 的各个元素同乘以数 k，等于行列式乘以数 k.

推论　若行列式有两行(列) 的对应元素成比例，则此行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列) 的各个元素都是两数之和，则此行列式等于两个行列式的和，这两个行列式的这一行(列) 的元素分别为相应的两数中的一个，其余元素与原来行列式的对应元素相同.

推论　以数 k 乘行列式的某行(列) 的所有元素，然后加到行列式的另一行(列) 的对应元素上去，则行列式的值不变.

3. 克拉默法则

若方程个数与未知数个数相同的线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解，且

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}.$$

推论　若方程个数与未知数个数相同的齐次线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组仅有零解；若方程个数与未知数个数相同的齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 D 必等于零.

三、基本方法

在本章中，计算方法主要有：计算二阶、三阶行列式的对角线法，计算高阶行列式的 Laplace 展开定理，求线性方程组的克拉默法则.

复习题一

1. 填空题.

(1) 若行列式各行数字之和均为零，则此行列式的值为________.

(2) 设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则 $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} =$ ________.

(3) 设 $m\neq 0$,则方程 $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ x & b & b \end{vmatrix}=0$ 的解为________.

(4) 含有 n 个未知数 n 个方程的齐次线性方程组,当系数行列式 D ________ 时,方程组仅有零解;当 D ________ 时,方程组有非零解.

2. 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$,求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2x & 4y & 2z \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$; (3) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2}a+2 & \frac{1}{2}b+2 & \frac{1}{2}c+2 \\ x-1 & y-1 & z-1 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$.

3. 计算下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1-a \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1+\cos\theta & 1+\sin\theta \\ 1 & 1-\sin\theta & 1+\cos\theta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

4. 用克拉默法则解方程组.

(1) $\begin{cases} x+y+z=a+b+c, \\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2, \\ bcx+acy+abz=3abc, \end{cases}$ 其中 a,b,c 是互不相等的实数;

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=10, \\ x_2+2x_3+3x_4=6, \\ x_3+2x_4=3, \\ x_1+2x_2+3x_3+5x_4=11. \end{cases}$

第二章　矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，也是处理许多实际问题的重要工具. 本章首先引入矩阵的概念，进而讨论矩阵的运算和性质、矩阵的秩、矩阵的初等变换及逆矩阵等.

第一节　矩阵的概念与运算

在许多实际问题中，常常用到一些矩形数表. 比如，某商场三个分场的两类商品一天的营业额(单位：万元)如表 2-1 所示. 分场的营业额也可用矩形数表简明地表示为$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

表 2-1

单位：万元

营业额 分场 产品	第一分场	第二分场	第三分场
空调	5	7	4
洗衣机	3	5	2

此外，由 m 个方程 n 个未知数组成的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

为方便起见，将系数 a_{ij} 和常数项 b_i 按它们在方程组中出现的次序排成一个数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

则表中的每一行代表方程组中的一个方程.于是,研究线性方程组的求解问题就可以转化为对此数表的研究.

一般地,对于不同的实际问题有不同的矩形数表,数学上把这种具有一定排列规则的矩形数表称为矩阵.

一、矩阵的概念

定义 1 一般地,由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 有序地排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(两侧加圆括号或方括号),称为一个 m 行 n 列**矩阵**,记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{mn}$,通常用黑体的大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 来表示.一个 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可说成 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,记做 $\boldsymbol{A}_{mn}$.构成矩阵的每一个数叫矩阵的**元素**,a_{ij} 表示矩阵第 i 行第 j 列的元素.

注意 (1) 矩阵用圆括号或方括号表示,其结果为一个数表;行列式用两条竖线表示,其结果为一个确定的实数.

(2) 矩阵的行数与列数可以不相等;行列式的行数与列数必定相等.

只有一行的矩阵 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为**行矩阵**;只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同,列数也相同,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**.

元素全为零的矩阵,称为**零矩阵**,记为 $\mathbf{0}$.如有必要指明是 m 行 n 列的零矩阵,则写成 $\mathbf{0}_{mn}$.

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数相等且都为 n,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n **阶方阵**.若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,则从左上角到右下角的对角线,称为**主对角线**.位于主对角线上的元素,称为**主对角线元素**.主对角线下方的元素全为 0 的方阵称为**上三角矩阵**,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

主对角线上方元素全为 0 的方阵称为**下三角矩阵**,即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

主对角线上存在非零元素，其余非主对角线上的元素都是 0 的方阵称为**对角矩阵**，即

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

特别地，主对角线元素全为 1 的对角阵称为**单位阵**，记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$，即

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 2　方阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素按其原次序所构成的行列式称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$. 若 $|\boldsymbol{A}| = 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**奇异阵**；若 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**非奇异阵**.

二、矩阵的运算

1. 矩阵相等

定义 3　如果矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵，且对应元素均相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

例 1　已知 $\begin{pmatrix} a+b & 3 \\ 3 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2c+d \\ c-d & 3 \end{pmatrix}$，求 a,b,c,d.

解　根据题意，得

$$\begin{cases} a+b=7, \\ 2c+d=3, \\ c-d=3, \\ a-b=3, \end{cases}$$

故 $a=5, b=2, c=2, d=-1$.

例 2　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，试求：(1) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相等？(2) $|\boldsymbol{A}|, |\boldsymbol{B}|$.

解　(1) 显然 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.

(2) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$，$|\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$.

可见，若 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$，不一定有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$；反之，若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，必有 $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{B}|$.

2. 矩阵的加减运算

定义 4　两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mn}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{mn}$，对应元素相加(或相减)所得到的 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和(或差)，记做 $\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}$，即

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

注意　只有当两个矩阵为同型矩阵时，才能进行加减运算.

例 3　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{A}$.

解　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -8 & 7 \\ 5 & 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & -6 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boldsymbol{0} - \boldsymbol{A}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$，其中 $-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的每个对应元素都互为相反数.

根据定义，不难证明矩阵加法具有如下性质：

假设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{0}$ 均为 $m \times n$ 矩阵，则

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$(交换律)；

(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$(结合律)；

(3) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$；

(4) $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$.

3. 数与矩阵的乘法(数乘矩阵)

定义 5　设 k 为常数，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mn}$ 为一个矩阵，则

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $k\boldsymbol{A}$.

注意　$k\boldsymbol{A}$ 是将 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素相乘.

例 4　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，求 $5\boldsymbol{A}$.

解　$5\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5\times 2 & 5\times 0 & 5\times 4 \\ 5\times(-1) & 5\times 3 & 5\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 \\ -5 & 15 & -10 \end{pmatrix}$.

例 5　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$，$|2\boldsymbol{A}|$.

解　$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$，

$$|2\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^2|\boldsymbol{A}| = 2^2\times(-2) = -8.$$

例 6　若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为实数，则 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.

证　由于 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为实数，根据数与矩阵乘法的定义知，$k\boldsymbol{A}$ 是将 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素都乘以 k，在求 $|k\boldsymbol{A}|$ 时，根据行列式性质的单行可提性，每一行提出一个 k，所以 $|k\boldsymbol{A}| = k^n|\boldsymbol{A}|$.

根据定义，容易证明数乘矩阵具有如下性质：

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵，k，l 为两个常数，则

(1)$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2)$(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3)$(kl)\boldsymbol{A} = k(l\boldsymbol{A}) = l(k\boldsymbol{A})$.

4. 矩阵的乘法

定义 6　一般地，设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mr}$，$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{rn}$，则矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{mn}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}\ (i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n),$$

并记做 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$.

注意　(1) 乘积矩阵 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ 的元素 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和.

(2) 只有当第一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于第二个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，两个矩阵才能相乘.

(3) 乘积矩阵的行数等于第一个矩阵的行数，列数等于第二个矩阵的列数.

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2&1\times1+0\times1+3\times0\\2\times4+1\times(-1)+0\times2&2\times1+1\times1+0\times0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}10&1\\7&3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}4&1\\-1&1\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&12\\1&1&-3\\2&0&6\end{pmatrix}.$$

例 8 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AC}$，$\boldsymbol{AD}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AD}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

由上面两个例子可以看出，矩阵乘法一般不满足交换律，即在一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}$. 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵，即 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$. 矩阵的乘法一般不满足消去律，即 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AD}\nRightarrow\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，k 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{k个}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂.

例 9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 由矩阵的乘法可得

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\lambda\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\lambda\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\lambda\\0&1\end{pmatrix},$$

假设 $\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix}1&(n-1)\lambda\\0&1\end{pmatrix}$ 成立，则

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & (n-1)\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

所以，由数学归纳法得 $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

设 A,B,C 为矩阵，k 为常数，且假定涉及的运算都是可行的，则矩阵的乘法具有下列性质：

(1) $(AB)C = A(BC)$；

(2) $A(B+C) = AB + AC$；

(3) $(A+B)C = AC + BC$；

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5. 转置矩阵

定义 7　将矩阵 A 的行与同序数的列互换所得到的矩阵，称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记做 A^{T}.

例如，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的转置矩阵为 $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

转置矩阵的性质(假设涉及的运算都是可行的)：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$；

(2) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$；

(3) $(A \pm B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \pm B^{\mathrm{T}}$；

(4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

例 10　已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$，验证 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

证　由于 $B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ 4 & 9 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$；

而 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -11 & 9 & 6 \end{pmatrix}$，故 $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

如果 n 阶方阵 A 与它的转置矩阵 A^{T} 相等，即 $A = A^{\mathrm{T}}$，则方阵 A 称为**对称矩阵**；若 $A = -A^{\mathrm{T}}$，则称 A 为**反对称矩阵**.

定理 1　设 A,B 为两个 n 阶方阵，则 $|AB| = |A||B|$.

例 11 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$ 及 $|\boldsymbol{AB}|$.

解 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8$，$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-7$，

$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-8)\times(-7)=56$.

例 12 设 $\boldsymbol{A}_{3\times 3}$，$\boldsymbol{B}_{3\times 3}$ 且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=4$，求 $|3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|$.

解 $|3\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=|3(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})_{3\times 3}|=3^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|=3^3|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}||\boldsymbol{B}|=3^3|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=3^3\times 2\times 4=216$.

三、线性方程组的矩阵表示

设

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

若记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

为系数矩阵，且未知量和常数项分别记做

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 即为线性方程组的矩阵表示.

习题 2-1

1. 选择题.

(1) 下列为对角矩阵的是(　　).

A. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$,则下列运算有意义的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　B. $\boldsymbol{A}^2$　　C. $2\boldsymbol{A}$　　D. $2+\boldsymbol{A}$

(3) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是 3×4 矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 的列数为 2,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,$\boldsymbol{B}$ 的行数与 $\boldsymbol{B}$ 的列数分别为(　　).

A. 3,4,2　　B. 4,2,3　　C. 3,2,4　　D. 2,3,4

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}(m\neq n)$,则(　　)是 n 阶方阵.

A. $\boldsymbol{AB}$　　B. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　C. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$　　D. $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$

(5) 下列说法正确的是(　　).

A. $\boldsymbol{0}$ 矩阵一定是方阵　　B. 对角矩阵与其转置矩阵相等

C. 可转置的矩阵一定是方阵　　D. 矩阵与其转置矩阵一定不相等

(6) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,则下列表述正确的是(　　).

A. 总存在 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$　　B. 不一定存在 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$

C. 总存在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　D. 一定不存在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$

2. 填空题.

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=$ ______,$|\boldsymbol{A}|=$ ______,$|3\boldsymbol{A}|=$ ______.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 是同阶方阵,则 $(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=$ ______.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{AB}=$ ______,$\boldsymbol{BA}=$ ______.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-4&5&-6\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&3&5\\7&-8&-2\end{pmatrix}$,求:(1)$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$;(2)$3\boldsymbol{A}-2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4&2\\-1&1&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&5\\2&3&-2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-3\end{pmatrix}$,求:(1)$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$;(2)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{CB})^{\mathrm{T}}$.

第二节　矩阵的初等变换

矩阵的初等变换是矩阵十分重要的运算,它在线性方程组求解、求逆矩阵及矩阵的秩等问题中都起着非常重要的作用.为了引进矩阵的初等变换,首先回忆高斯消元法求线性方程组的步骤.

引例　用消元法解线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-7,\\2x_1-x_2+2x_3=-8,\\x_1+3x_2=7.\end{cases}$

解
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-7, & (1)\\2x_1-x_2+2x_3=-8, & (2)\\x_1+3x_2=7 & (3)\end{cases}\xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=-7, & (1)\\-5x_2-4x_3=6, & (4)\\x_2-3x_3=14 & (5)\end{cases}\xrightarrow{(2)+5(5)}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-7, & (1) \\ -19x_3=76, & (6) \\ x_2-3x_3=14 & (5) \end{cases} \xrightarrow{-\frac{1}{19}(6)} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-7, & (1) \\ x_3=-4, & (7) \\ x_2-3x_3=14 & (5) \end{cases} \xrightarrow{(5)+3(7)}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-7, & (1) \\ x_3=-4, & (7) \\ x_2=2 & (8) \end{cases} \xrightarrow[(1)-2(8)]{(1)-3(7)} \begin{cases} x_1=1, & (9) \\ x_3=-4, & (7) \\ x_2=2 & (8) \end{cases} \xrightarrow{(7)\leftrightarrow(8)} \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=2, \\ x_3=-4. \end{cases}$$

观察可以发现，在上述消元过程中，共用到三种变换：(1) 方程组中某一个方程的若干倍加到另一个方程上；(2) 方程组中某一个方程的两边同乘以某个非零常数；(3) 互换方程组中某两个方程的位置. 对方程组反复施行这三种变换可得方程组的解，这里将这三种变换统称为方程组的同解变换. 前面曾经指出，线性方程组与一个矩阵等价，并且把由方程组中未知数系数及常数按其次序不变所构成的矩阵称为**方程组的增广矩阵**，记为 $\overline{\boldsymbol{A}}$. 于是对方程组的变换可转换为对矩阵的变换，即矩阵的初等变换.

一、矩阵的初等变换

定义 8 对矩阵施行下列三类变换称为矩阵的**初等变换**：

(1) 用一个不为零的常数 k 乘矩阵的第 i 行(列)，记做 $kr_i(kc_i)$；

(2) 交换矩阵的第 i 行(列) 和第 j 行(列)，记做 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；

(3) 将矩阵的第 i 行(列) 的各个元素的 k 倍加到第 j 行(列) 的对应元素上去，记做 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

仅对矩阵的行(列) 施行的初等变换叫矩阵的**初等行(列) 变换**.

定义 9 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换后变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是等价的，常记做 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

例 1 写出引例中方程组的增广矩阵及相应的初等行变换过程.

解 $$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & -5 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+5r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -19 & 76 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{19}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 14 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1-3r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

定理 2 任意非奇异阵经有限次初等行(列) 变换必可化为单位阵.

例 2 用初等行变换化 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}$ 为单位阵.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&3&1\\3&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&3\\2&3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-3r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-5&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}$

$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\0&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_3+5r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&5\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{5}r_3}$

$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$

二、初等矩阵

定义 10 由单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 经一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵.**

显然,初等矩阵都是方阵,对单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的每一类初等变换都有一个与之对应的初等矩阵,通常有以下的表示方式:

(1)$\boldsymbol{E}_{(i)(j)}$ 表示对调单位阵 $\boldsymbol{E}$ 中的第 i 行(或列)与第 j 行(或列);

(2)$\boldsymbol{E}_{k(i)}$ 表示用非零常数 k 乘单位阵 $\boldsymbol{E}$ 中的第 i 行(或列);

(3)$\boldsymbol{E}_{(j)+k(i)}$ 表示单位阵 $\boldsymbol{E}$ 的第 i 行(或列)乘以非零常数 k 后加到第 j 行(或列)上去.

定理 3 对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行(列)变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左(右)边乘上一个相应的初等矩阵,即若

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_i\leftrightarrow r_j}\boldsymbol{A}_1$,则 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{E}_{(i)(j)}\boldsymbol{A}$,反之亦然;

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{kr_i}\boldsymbol{A}_2$,则 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{E}_{k(i)}\boldsymbol{A}$,反之亦然;

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_j+kr_i}\boldsymbol{A}_3$,则 $\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{E}_{(j)+k(i)}\boldsymbol{A}$,反之亦然;

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_i\leftrightarrow c_j}\boldsymbol{A}_4$,则 $\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{(i)(j)}$,反之亦然;

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{kc_i}\boldsymbol{A}_5$,则 $\boldsymbol{A}_5=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{k(i)}$,反之亦然;

$\boldsymbol{A}\xrightarrow{c_j+kc_i}\boldsymbol{A}_6$,则 $\boldsymbol{A}_6=\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{(j)+k(i)}$,反之亦然.

习题 2-2

1. 下列为初等行变换的是(　　).

A. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{0 \times r_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r_2 - 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & -17 & 12 & -11 \\ 2 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 11 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 11 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

2. 用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ 化为单位阵 $\boldsymbol{E}$.

第三节　可逆矩阵

对于方程 $ax = b$,若 $a \neq 0$,则 $x = a^{-1}b$. 对于矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$,我们设想,若存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$,使得 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$,则方程可变为 $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{EX} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$,从而 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 对于任意一个矩阵 $\boldsymbol{A}$,是否都存在 $\boldsymbol{A}^{-1}$?如果存在,$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的关系是怎样的,如何求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$?

一、逆矩阵的概念与性质

1. 逆矩阵的概念

定义 11　对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$,如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$,则称 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是**可逆的**,方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**,记为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

注意　(1) 定义中,$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 的地位是对等的,所以,如果 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵,即 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^{-1}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,根据逆矩阵的定义,存在 $\boldsymbol{B}$,使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$. 两边同时取行列式得,$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}| = 1$,故 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,$|\boldsymbol{B}| \neq 0$ 且 $|\boldsymbol{A}^{-1}| = |\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(3) 由于 $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}$,故单位阵 $\boldsymbol{E}$ 可逆,且 $\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

定理 4　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则其逆矩阵唯一.

证　设 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的任意两个逆矩阵，则

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}_1=(\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1)=\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}_2.$$

2. 逆矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆方阵，k 为不为零的常数，可逆矩阵具有下列性质：

(1) $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$；

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(4) $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$；

(5) $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$.

二、逆矩阵的求法

1. 伴随矩阵法

定理 5(逆矩阵存在定理)　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$. 其中

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

证　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

又 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E};$$

同理 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}.$$

从而 $\boldsymbol{A}\left(\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\right)=\left(\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\right)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

例 1　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解　因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&0\\-3&2&-5\end{vmatrix}=2\neq0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1&0\\2&-5\end{vmatrix}=-5,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}0&1\\2&-5\end{vmatrix}=2,\qquad A_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&0\\-3&-5\end{vmatrix}=10,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&1\\-3&-5\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\-3&2\end{vmatrix}=7,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&0\\-3&2\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}=1,$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&2&-1\\10&-2&2\\7&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&1&-\frac{1}{2}\\5&-1&1\\\frac{7}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

定理 6　方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

证　(充分性) 由定理 5 可知，若 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

(必要性) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由定义知，存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，所以，

$$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{E}|=1,$$

故 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1$，从而 $|\boldsymbol{A}|\neq0$.

推论　若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$)，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

证　由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=1$，故 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. 于是

$$B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}E = A^{-1}.$$

思考　设 A,B 均可逆，如何求矩阵方程 $AX = D$ 及 $AXB = D$ 的解，其中 D 为 n 阶方阵.

通常，利用 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$ 来求 n 阶方阵 A 的逆矩阵时，共需计算 n^2 个 $n-1$ 阶行列式和 1 个 n 阶行列式，当 n 较大时，计算较困难. 为了避开行列式的计算，在求矩阵的逆矩阵时通常采用下面介绍的初等变换法.

2. 初等行变换法

定理 7　非奇异阵 A 的逆矩阵 A^{-1} 等于有限个初等矩阵的乘积.

证　由于非奇异阵 A 可经过有限次初等行变换化为单位阵 E，而对方阵 A 施行一次初等行变换，相当于在方阵 A 的左边乘上一个相应的初等矩阵，即存在初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_m$，使得

$$P_m P_{m-1} \cdots P_2 P_1 A = E. \tag{2-1}$$

在式(2-1) 两边右乘 A^{-1}，得

$$P_m P_{m-1} \cdots P_2 P_1 A A^{-1} = E A^{-1},$$

即

$$P_m P_{m-1} \cdots P_2 P_1 E = A^{-1}, \tag{2-2}$$

故 $A^{-1} = P_m P_{m-1} \cdots P_2 P_1$，证毕.

由式(2-1) 及式(2-2) 可以看出，如果用一系列初等行变换将可逆矩阵 A 化为单位阵 E，那么用同样的初等行变换按同样的次序作用于单位阵 E，就可得到可逆矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}，从而可得到用初等变换求逆矩阵的方法：作矩阵 $(A \mid E)$，对该矩阵施行初等行变换，将左半部的矩阵 A 化为单位阵 E，那么右半部的单位阵 E 就随之化成了矩阵 A 的逆矩阵 A^{-1}，即

$$(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}).$$

例 2　用初等行变换求方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解
$$\overset{\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E}}{\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-2&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\1&-2&1&1&0&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&-2&0&1&-1&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\underset{\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}}{\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)},$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

注意　在求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的全过程中，若作矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{E})$，则只能用初等行变换.

以上用初等行变换求方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的过程，实际上是用初等行变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$ 的过程. 因此，当方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，用初等行变换可以求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵. 方法是作 $n\times(n+m)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$，对该矩阵作初等行变换，使虚线左边的方阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位阵 $\boldsymbol{E}$，相应地，虚线右边的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 就随之化为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即为所求的矩阵 $\boldsymbol{X}$，即 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E}\,\vdots\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$.

例 3　解方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=0,\\x_1+x_3=2,\\-x_2+x_3=1.\end{cases}$

解　令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2} r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1+2 r_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right),$$

所以$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}0 \\ 1 \\ 2\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x_1=0, \\ x_2=1, \\ x_3=2.\end{cases}$

例 4　用初等行变换求矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}$ 的解 $\boldsymbol{X}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

解　将方程变形为 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，即$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，由于

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

且$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=1 \neq 0$，则

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3\end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{r_3-r_1}\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1\end{array}\right| \xrightarrow{-r_3}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right| \xrightarrow{r_2-r_3}\left|\begin{array}{ccc|cc}1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{array}\right|,$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

例 5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,从而$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$. 又

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}.$$

因为$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|=1\neq0$,所以 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{A}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&2&1&1&2&1\\3&3&2&3&4&2\\1&2&1&1&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&2&2\\3&3&2&3&4&2\\0&2&1&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-3r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&1&1&2&2\\0&-3&-1&0&-2&-4\\0&2&1&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&1\\0&-1&0&1&0&-3\\0&2&1&1&2&1\end{array}\right)\xrightarrow[-r_2]{r_3+2r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&-1&0&3\\0&0&1&3&2&-5\end{array}\right),$$

$$\boldsymbol{E}\ \vdots\ \boldsymbol{B}$$

故 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&3\\3&2&-5\end{pmatrix}$.

习题 2-3

1. 填空题.

(1)若 $ad-bc\neq0$,则$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=$________.

(2)设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,且 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{X}=$________.

2. 选择题.

(1)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆方阵,则下列等式错误的是(　　).

A. $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}||\boldsymbol{B}^{-1}|$　　B. $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=|\boldsymbol{AB}|^{-1}$

C. $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=|\boldsymbol{A}^{-1}|^{-1}|\boldsymbol{B}^{-1}|^{-1}$　　D. $|(\boldsymbol{AB})^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}|\boldsymbol{B}|^{-1}$

(2)设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵,满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$,则下列等式成立的是(　　).

A. $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　　B. $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$

C. $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　　D. $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{E}$

3. 用伴随矩阵法求下列矩阵的逆矩阵.

(1)$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;　　(2)$\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&2&2\\-1&0&3\end{pmatrix}$.

4. 用初等行变换法求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$；　(2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$；　(3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

第四节　矩 阵 的 秩

定义 12　在一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列，位于这些行与列相交位置上的元素按它们在 $\boldsymbol{A}$ 中出现的次序所构成的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**.

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则位于 $\boldsymbol{A}$ 的第一、三行，第二、三列的元素所构成的 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式为 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.

显然，k 阶子式的阶数 $k\leqslant\min(m,n)$. 一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义 13　若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 k 阶子式不为零，而所有高于 k 阶的子式都为零（所有的 $k+1$ 阶子式都为零），则称 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 k，记为 $r(\boldsymbol{A})=k$.

可见，矩阵的秩就是矩阵的非零子式的最高阶数. 规定零矩阵的秩为零.

显然，非奇异阵的秩等于它的阶数，故非奇异阵也称为**满秩方阵**，奇异阵称为**降秩方阵**.

例 1　求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 的秩.

解　显然，$\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq0$，而 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式即最高阶子式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=2$.

直接利用秩的定义去求矩阵的秩，需要计算很多的行列式，对于阶数较高的矩阵来说是很麻烦的. 但是对于如下形式的矩阵，则很容易看出它的秩：

$$A=\begin{pmatrix}1&*&*&*&*\\0&3&*&*&*\\0&0&0&5&*\\0&0&0&0&7\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $r(\boldsymbol{A})=4$,因为可取 $\boldsymbol{A}$ 的第一、二、三、四行和第一、二、四、五列得到的 $\boldsymbol{A}$ 的一个四阶子式,值为 105,同时 $\boldsymbol{A}$ 所有的五阶子式都为零,即 $\boldsymbol{A}$ 的秩就是 $\boldsymbol{A}$ 的非零元素的行数. 形如 $\boldsymbol{A}$ 的矩阵叫做行阶梯形矩阵,下面给出其确切含义.

定义 14 称满足下列四个条件的矩阵为**行最简形矩阵**:

(1)每一行的第一个非零元素是 1;

(2)各行首非零元素前的零元素的个数逐行递增;

(3)各首非零元素所在列的其余元素均为零;

(4)第一行至少有一个非零元素.

其中满足条件(2),(4)的矩阵为**行阶梯形矩阵.**

定理 8 对矩阵施行初等变换,其秩不变.

可见,在求矩阵秩的时候应先对其施行初等变换使之化为行阶梯形矩阵,行阶梯形矩阵的秩很容易得出,然后就得出所求矩阵的秩了.

定理 9 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与它的转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的秩相等,即 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$.

例 2 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{pmatrix}$ 的秩.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\2&4&3&5\\-1&-2&6&-7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\0&0&5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&4\\0&0&5&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$.

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\-2&4&2&6&-6\\2&-1&0&2&3\\3&3&3&3&4\end{pmatrix}$ 的秩.

解 因为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1\\r_3-2r_1}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&0&0&6&-2\\0&3&2&2&-1\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\\0&9&6&3&-2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{r_4-3r_2}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&6&-2\\0&0&0&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&6&-2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+2r_3}\begin{pmatrix}1&-2&-1&0&2\\0&3&2&2&-1\\0&0&0&-3&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=3$.

定理 10　任一满秩方阵经有限次初等行(列)变换必可化为单位阵 $\boldsymbol{E}$.

例 4　用初等行变换化满秩矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&-2&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ 为单位阵.

解　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&-2&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&3\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-3&5\\0&-1&2\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_2-3r_3]{r_1-2r_3}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-3r_2]{r_3+2r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

习题 2-4

1. 填空题.

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×3 矩阵,则它的秩 $r(\boldsymbol{A})$的取值范围是________.

(2)已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,则 $r(\boldsymbol{A})=$________.

(3)设 5 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于 3,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

2. 求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&-1&1\\2&-3&1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\3&-1&5&-3\\2&1&2&-2\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8 \end{pmatrix}$；

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & -5 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

(5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

第五节　用 MATLAB 求矩阵的秩、逆矩阵及进行矩阵运算

MATLAB 作为优秀的数学计算和分析软件，其中以矩阵运算为代表的基本运算功能一直是 MATLAB 引以为傲的核心和基础. 本节将介绍 MATLAB 的基本运算功能.

一、矩阵的建立

最简单的建立矩阵的方法是从键盘直接输入矩阵的元素. 具体方法为：将矩阵的元素用方括号括起来，按矩阵行的顺序输入各元素. 同一行的各元素之间用空格或逗号分隔，不同行的元素之间用分号分隔.

例 1　建立矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

输入：>>a=[1 6 3 8;3 2 0 4;7 3 1 4]

输出：a=

```
1    6    3    8
3    2    0    4
7    3    1    4
```

此外，MATLAB 还提供了一些特殊矩阵的建立方法，见表 2-2，这些矩阵可作为基本矩阵用于辅助编程或运算.

表 2-2　MATLAB 标准数组生成函数表

函数名称	主要用法	描　述	特　征
zeros	A=zeros(n) A=zeros(m,n)	建立 n 阶的全 0 方阵 建立 $m\times n$ 阶的全 0 矩阵	矩阵的所有元素都是 0
ones	ones(n) ones(m,n)	建立 n 阶的全 1 方阵 建立 $m\times n$ 阶的全 1 矩阵	矩阵的所有元素都是 1
eye	eye(n)	建立 n 阶的单位阵	
rand	rand(n) rand(m,n)	建立 n 阶的随机矩阵 建立 $m\times n$ 阶的随机矩阵	矩阵的所有元素均匀分布在 0～1 之间
diag	A=diag(b)	将向量 $\boldsymbol{b}$ 放置在 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上	矩阵非主对角线元素为 0
magic	A=magic(n)	建立 $n\times n$ 阶的魔术方阵	
pascal	A=pascal(n)	建立 n 阶 Pascal 矩阵	

注意　魔术方阵是指元素均为自然数且每个元素值都不相等，每行、每列以及主、副对角线上各个元素之和都相等的方阵. Pascal 矩阵是指第一行、第一列元素均为 1，其他元素等于前一行的元素和前一列的元素之和的方阵，即满足 $a_{ij}=a_{(i-1)j}+a_{i(j-1)}$.

在 MATLAB 中，可以利用表 2-2 中给出的函数命令，直接得到矩阵. 例如，

```
输入:>>b=[1 3 4];
    >>A=diag(b)
输出:A=
        1    0    0
        0    3    0
        0    0    4
输入:>>magic(3)
输出:ans=
        8    1    6
        3    5    7
        4    9    2
输入:>>pascal(4)
输出:ans=
```

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20

二、矩阵的运算

1. 加、减运算

矩阵的加、减运算在 MATLAB 中用"+"和"−"运算符实现. 但要注意，两个相加(减)的矩阵必须是同型矩阵，否则系统会提示参与运算的两个矩阵尺寸不匹配.

例 2 求 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\0 & -1 & 6\end{pmatrix}$.

输入：>>[1 2 3;4 5 6]+[3 2 5;0 −1 6]

输出：ans=

4	4	8
4	4	12

2. 乘法运算

数与矩阵的乘法由运算符"＊"实现，矩阵的乘法也由运算符"＊"实现. 在用 MATLAB 计算 $\boldsymbol{AB}$ 时，需注意 $\boldsymbol{A}$ 的列数必须与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等，否则系统将提示出错. 此外矩阵乘方也可用"^"符号实现. 例如，$\boldsymbol{A}$ 是一个方阵，p 是一个大于 1 的整数，则 $\boldsymbol{A}$ 的 p 次幂可用 $\boldsymbol{A}$^p 来实现计算.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\0 & -1 & 6\\1 & 3 & -9\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{AB}$.

输入：>>a=[1 2 3;4 5 6];b=[3 2 5;0 −1 6;1 3 −9];

>>3＊a,a＊b

输出：ans=

3	6	9
12	15	18

ans=

6	9	−10
18	21	−4

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^5$.

输入:>>a=[1 2;3 4];

>>a^5

输出:ans=

1069	1558
2337	3406

3. 矩阵的转置与矩阵的秩

矩阵的转置由符号“′”表示和实现,矩阵的秩由命令 rank 实现.

例 5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 及 $r(\boldsymbol{A})$.

输入:>>a=[1 2 3;4 5 6];

>>a′,rank(a)

输出:ans=

1	4
2	5
3	6

ans=

2

4. 方阵的行列式与矩阵的逆

方阵的行列式由命令 det 实现,矩阵的逆由命令 inv 实现.

例 6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$,求 $|\boldsymbol{A}|$,$\boldsymbol{A}^{-1}$.

输入:>>a=[1 2;3 4];

>>det(a),inv(a)

输出:ans=

−2

ans=

−2	1
3/2	−1/2

5. 除法运算

在 MATLAB 中有两种矩阵除法符号“\”和“/”,它们分别表示左除和右除:a\b=inv(a)*b,b/a=b*inv(a).

例 7　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 4\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$.

输入：>>a=[1 2;3 4];b=[2 3;4 4];

>> a\b,b/a

输出：ans=

0　　　−2

1　　　5/2

ans=

1/2　　　1/2

−2　　　2

本章小结

一、基本概念

1. 一般地，由 $m\times n$ 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 有序地排成 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

（两侧加圆括号或方括号），称为一个 m 行 n 列矩阵，记为 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{mn}$，通常用黑体的大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 来表示.

2. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 中的元素按其原次序所构成的行列式称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记为 $|\boldsymbol{A}|$. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异阵；若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵.

3. 将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行与同序数的列互换所得到的矩阵，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记做 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

4. 对矩阵施行下列三类变换称为矩阵的初等变换：

(1)用一个不为零的常数 k 乘矩阵的第 i 行(列)，记做 $kr_i(kc_i)$；

(2)交换矩阵的第 i 行(列)和第 j 行(列)，记做 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$；

(3)将矩阵的第 i 行(列)的各个元素的 k 倍加到第 j 行(列)的对应元素上去，记做 $r_j+kr_i(c_j+kc_i)$.

5. 由单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

6. 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称逆矩阵. 记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个 k 阶子式不为零，而所有高于 k 阶的子式都为零(所有的 $k+1$ 阶子式都为零)，则称 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 k，记为 $r(\boldsymbol{A})=k$.

8. 称满足下列四个条件的矩阵为行最简形矩阵：

(1)每一行的第一个非零元素是 1；

(2)各行首非零元素前的零元素的个数逐行递增；

(3)各首非零元素所在列的其余元素均为零；

(4)第一行至少有一个非零元素.

其中仅满足条件(2),(4)的矩阵为行阶梯形矩阵.

二、基本知识

1. 矩阵的和(差):$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$.

2. 数乘矩阵:设 k 为常数,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mn}$ 为一个矩阵,则

$$k\boldsymbol{A}=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. 矩阵乘法:一般地,设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{mr}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{rn}$,则矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{mn}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,其中,

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}\,(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

4. 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶方阵,则 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

5. 逆矩阵存在定理 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异阵,则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$. 其中

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,A_{ij} 是 $|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

三、基本方法

1. 用初等变换法求秩:$\boldsymbol{A}\xrightarrow{\text{初等变换}}\boldsymbol{B}$(行阶梯形矩阵),则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

2. 求逆矩阵的方法:

(1)伴随矩阵法 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$;

(2)初等行变换法 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{A}^{-1})$.

复习题二

1. 填空题.

(1)若 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$,则 $c_{ij}=$________.

(2)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=1$,则 $|-2\boldsymbol{A}|=$________.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,则 $\boldsymbol{AA}^*=$________.

(4)$\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵,则 $\boldsymbol{ABC}$ 可逆的充要条件是________,且 $(\boldsymbol{ABC})^{-1}=$________.

(5)设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 同为 5 阶方阵,$|\boldsymbol{A}|=1$,$|\boldsymbol{B}|=2$,则 $|2(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1})^2|=$________.

(6)若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$,则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\2&1&2&1\\1&2&3&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&3&2&1\\-2&1&-2&1\\0&-1&0&-1\end{pmatrix}$,(1)求 $3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$;(2)若 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{X}$;(3)若 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{Y})+2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{0}$,求 $\boldsymbol{Y}$.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,求 $|3\boldsymbol{A}|$ 及 $3|\boldsymbol{A}|$,并比较它们是否相等.若 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵,k 是一个常数,问 $|k\boldsymbol{A}|$ 等于什么?

4. 求下列矩阵的乘积.

(1) $\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0\\2\\5\\-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\end{pmatrix}$.

5. 利用伴随矩阵求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}3&2&1\\3&1&5\\3&2&3\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&-3\\3&2&-5\end{pmatrix}$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆方阵,$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,试证:$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

7. 利用矩阵的初等行变换,求下列矩阵的逆矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&1&0\\3&0&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$.

8. 求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix}1&4&-1&2&2\\2&-2&1&1&0\\-2&-1&3&2&0\end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix}0&-1&3&0&2\\2&-4&1&5&3\\-4&5&7&-10&0\end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix}1&a&a&a\\a&1&a&a\\a&a&1&a\\a&a&a&1\end{pmatrix}$($a$ 为任意实数).

第三章　线性方程组

为了更深入地研究线性方程组解的情况，并找出求解的一般方法，本章引入 n 维向量及向量组的线性相关性、极大线性无关组和向量组的秩等重要概念.

第一节　n 维 向 量

已知一个二元有序数组(x,y)可以确定平面上的一个向量，一个三元有序数组(x,y,z)可以确定空间中的一个向量. 对于 n 元有序数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们引入 n 维向量的概念.

一、n 维向量的概念

定义 1　一般地，由 n 个实数组成的有序数组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为一个 n **维向量**，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**分量**(或**坐标**)，a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量，向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中分量的个数 n 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**维数**.

向量通常用黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$来表示.

由定义可知，n 维向量有两个基本条件：第一，由 n 个数组成；第二，这 n 个数具有确定的顺序. 满足这样两个条件，其表现形式可以有两种：由 n 个实数组成一行 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为**行向量**(也称行矩阵)；由 n 个实数组成一列 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$称为**列向量**(也称列矩阵).

此外，规定分量全为零的向量为**零向量**，记做 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

注意　维数不同的零向量是不相同的.

定义 2　向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$的各分量取相反数所得到的向量称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负向量**，记做$-\boldsymbol{\alpha}$，即$-\boldsymbol{\alpha}=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$.

定义 3　如果 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，当 $a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$时，称这两个**向量相等**，记做 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

二、n 维向量的运算

1. 向量的和(差)

定义 4 若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，则 $\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和(差).

2. 向量的数乘

定义 5 若 λ 为一实数，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则 $\lambda\boldsymbol{\alpha}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\cdots,\lambda a_n)$称为数 λ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数乘.

向量的和(差)及数乘运算统称为向量的**线性运算**，有如下运算规律：

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2)$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$;

(4)$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(5)$\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha})=(\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$;

(6)$(\lambda+\mu)\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\mu\boldsymbol{\alpha}$，$\lambda(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\lambda\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$，

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 表示 n 维向量，λ,μ 表示实数.

例 1 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,4,5,6)$，且 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，求 $\boldsymbol{\alpha}$.

解 因为 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=\frac{1}{8}(2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=\frac{1}{8}[2(1,2,3,4)+3(2,3,4,5)-5(3,4,5,6)]\\&=\frac{1}{8}(-7,-7,-7,-7)=\left(-\frac{7}{8},-\frac{7}{8},-\frac{7}{8},-\frac{7}{8}\right).\end{aligned}$$

例 2 将线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

写成向量的形式.

解　记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}x_2+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}x_n=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix},$$

即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$，这就是线性方程组的向量形式.

习题 3-1

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0),\boldsymbol{\beta}=(0,1,1),\boldsymbol{\gamma}=(3,4,0)$，求 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ 及 $3\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}$.
2. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,7,9),\boldsymbol{\beta}=(-1,5,2,0)$.

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$；　　(2)若 $3\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\gamma}=5\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$.

第二节　向量组的线性相关性

已知一个含有 n 个未知数 m 个方程的线性方程组可写成向量的形式

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}.$$

观察这个式子可发现，系数列向量组和常数列向量之间存在一种线性关系. 如果方程组有解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以写成 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合. 于是，求解方程组的问题就转化为求一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$ 成立，即方程组有解$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 可表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合；方程组有唯一解$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，且表示形式唯一；方程组有多组解$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 表示的形式不唯一；方程组无解$\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

这说明方程组的解是否存在和向量组的线性组合之间有着密切的关系.

一、线性组合与线性表示

定义 6　设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

成立，则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合，或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

例 1　证明任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 都可由 n 维标准单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$ 线性表示.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{\varepsilon}_k$，故结论成立.

例 2 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$，试证这三个向量中的任一向量均不能由其余两个向量线性表示.

证 假设存在 k_1,k_2，使得 $k_1\boldsymbol{\varepsilon}_2+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1$，即 $k_1(0,1,0)+k_2(0,0,1)=(1,0,0)$，化简得 $\begin{cases}0=1,\\k_1=0,\\k_2=0,\end{cases}$ 矛盾，所以 k_1,k_2 不存在，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示.

同理，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示，$\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 线性表示.

例 3 判断下列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由其余向量线性表示，若能，写出线性表达式.

(1) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

解 假设存在 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$.

(1) $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3=6,\\2k_1+3k_2+k_3=6,\\3k_1+k_2+2k_3=6,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k_1=1,\\k_2=1,\\k_3=1.\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$，即

$$\begin{cases} k_1+k_3=2, \\ k_1+k_2+2k_3=4, \\ k_2+k_3=2, \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} k_1=-k_3+2, \\ k_2=-k_3+2, \\ k_3=k_3, \end{cases}$$

其中 k_3 可取任何实数,为自由未知量,如果取 $k_3=1$,则 $k_1=1,k_2=1$,从而 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;如果取 $k_3=0$,则 $k_1=2,k_2=2$,从而 $\boldsymbol{\beta}=2\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$. 故 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示形式有无穷多种.

(3)$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,即$\begin{cases} k_1=0, \\ k_2=0, \\ 0=1, \end{cases}$ 矛盾,故 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

二、线性相关与线性无关

定义 7 设有 m 个 n 维向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,如果存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0} \tag{3-1}$$

成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性相关**;反之,如果这样的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不存在,也就是说,只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时,式(3-1)才成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ **线性无关**.

注意 可将式(3-1)看成关于 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 的齐次线性方程组,则方程组仅有零解$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关;方程组有非零解$\Leftrightarrow$向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

例 4 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$是否线性相关?

解 假设存在三个数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$,即

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\text{即}\begin{cases} k_1+k_2=0, \\ k_1+k_3=0, \\ k_1+k_2+2k_3=0, \end{cases}$$

由于其系数行列式$\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&2\end{vmatrix}=-2\neq0$,故该方程组仅有零解,从而 $k_1=k_2=k_3=0$,

所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

例 5 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

证 假设存在三个数 k_1,k_2,k_3,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\mathbf{0}$,整理得

$$(k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,所以

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_2+k_3=0,\\k_3=0,\end{cases}$$

从而 $k_1=k_2=k_3=0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关.

注意 单独的一个零向量是线性相关的;单独的一个非零向量是线性无关的.

定理 1 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关,则整个向量组也线性相关.

证明略.

推论 1 含有零向量的向量组必线性相关.

推论 2 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则其中任何部分向量组成的向量组也线性无关.

定理 2 当 $m\geqslant 2$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量能由其他向量线性表示.

证明略.

定理 3 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,而向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示,且表达式唯一.

证 由于 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,故存在不全为零的数 $l,k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$l\boldsymbol{\beta}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

若 $l=0$,则数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不全为零,且 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关,矛盾,所以 $l\neq 0$,于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{l}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{l}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_m}{l}\boldsymbol{\alpha}_m.$$

下证表达式唯一,假设有两种表示方法:

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}=c_1\boldsymbol{\alpha}_1+c_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则

$$(k_1-c_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-c_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_m-c_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

又因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,所以 $k_i-c_i=0$,即 $k_i=c_i(i=1,2,\cdots,m)$,所以表达式唯一.

三、向量组线性相(无)关的矩阵判定法

定理 4　设有 $m(m\leqslant n)$ 个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix},$$

它们的坐标排成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=m$.

证明略.

推论 1　m 个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是它们构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})<m$.

推论 2　若 $m>n$,则 m 个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 必线性相关.

推论 3　n 个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关(无关)的充要条件是它们所构成的方阵 $\boldsymbol{A}$ 是降秩(满秩)矩阵.

推论 4　设

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,m),\boldsymbol{\beta}_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\\vdots\\a_{ni}\\b_i\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,m),$$

若 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,则 $n+1$ 维向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

例 6　判断下列向量组是否线性相关.

$$(1)\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix};$$

$$(2)\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix};$$

(3)$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\4\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\begin{pmatrix}4\\-1\\4\\0\end{pmatrix}$.

解　(1)$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&-1\\4&0&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-4r_1}\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&-1\\0&4&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{pmatrix}1&-1&4\\0&1&-1\\0&0&-8\end{pmatrix}$,

所以 $r(\boldsymbol{A})=3$,因此向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(2)由定理 4 的推论 2 知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

(3)由(1)以及定理 4 的推论 4 知,向量组 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3$ 线性无关.

习题 3-2

1. 选择题.

(1)设向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$,则下列选项中正确的是(　　).

A. $(2,6,-4)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示

B. $(2,6,-4)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示

C. $(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示

D. $(5,11,-7)^{\mathrm{T}}$ 不能由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 线性表示

(2)已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,5)$,当 $\boldsymbol{\beta}=$(　　)时,$\boldsymbol{\beta}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合.

A. $(-3,0,4)$　　B. $(1,1,0)$　　C. $(0,-1,1)$　　D. $(0,1,0)$

(3)若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m(m\geqslant 2)$线性相关,则向量组内(　　)可由向量组其余向量线性表示.

A. 任意一个向量　　B. 至少有一个向量

C. 至多有一个向量　　D. 没有一个向量

2. 将下列向量中的 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为其余向量的线性组合.

$$\boldsymbol{\beta}=(2,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3),\boldsymbol{\alpha}_2=(5,-5,12),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,6).$$

3. 判定下列向量组线性相关还是线性无关.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,2,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,-5,2)$;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,2,7,-1)$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(9,10,10,4),\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-4,2,-8)$;

(4)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,6),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7),\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-1,0)$.

第三节　极大线性无关组与向量组的秩

一个向量组所含向量的个数可能很多,有时甚至有无穷多个,能不能仅通过它

的一部分向量来进行研究呢？

如果一个向量组中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；如果一个向量组线性无关，则它的任何部分组也线性无关. 然而线性相关向量组的部分组却不总是线性相关的，例如，向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，但是部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1$；$\boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$；$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$；$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是线性无关的. 注意到部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 中任意一个向量都可以由部分组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，这样的线性无关部分组就是本节要介绍的极大线性无关组.

一、极大线性无关组

定义 8　设 $\boldsymbol{T}$ 是 n 维向量所组成的向量组，在 $\boldsymbol{T}$ 中选取 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，如果满足：

（ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

（ⅱ）任取 $\boldsymbol{T}$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 $\boldsymbol{T}$ 的一个极大线性无关组，简称**极大无关组**.

注意　(1)一个线性无关向量组的极大无关组就是它本身；

(2)全部由零向量组成的向量组不存在极大无关组；

(3)只要一个向量组中含有非零向量就一定存在极大无关组.

根据定义可知，求一个向量组的极大无关组的步骤如下.

首先从所给向量组中剔除零向量，然后将第一个非零向量保留，若第二个非零向量与第一个非零向量线性相关，则剔除，否则就保留(两个向量线性相关的充要条件是它们的分量对应成比例)，接着考虑下一个非零向量，若能由前面保留下来的非零向量线性表示，则剔除，否则保留. 重复这个过程，直到最后一个向量，所有被保留下来的向量所构成的部分组即为一个极大无关组.

例 1　求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

的极大无关组.

解　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，并且 $\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$，

$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是已知向量组的一个极大无关组. 事实上,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 也是已知向量组的一个极大无关组.

例 2 求全体 n 维向量组成的向量组的极大无关组.

解 n 维标准单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$线性无关,又对任一 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,都有 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{\varepsilon}_k$,所以 n 维标准单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是全体 n 维向量组成的向量组的一个极大无关组.

实际上,任意一个线性无关的 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都是全体 n 维向量组成的向量组的一个极大无关组. 这是因为对于任意一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$,都有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关,故 $\boldsymbol{\alpha}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,所以线性无关向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是全体 n 维向量组成的向量组的一个极大无关组.

上述两例表明:一个向量组的极大无关组可能不止一个,但是它们所含向量的个数却是相等的. 由此引出下面的定义.

二、向量组的秩

定义 9 一个向量组的极大无关组所含向量的个数称为向量组的**秩**.

如果一个向量组的秩为 r,那么,其中任何 r 个线性无关的部分向量组都是它的极大无关组,而线性无关向量组的极大无关组就是它自身.

定义 10 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行秩**,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩称为 $\boldsymbol{A}$ 的**列秩**.

定理 5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩且均等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证明略.

定理 6 一个向量组线性相(无)关的充要条件是该向量组的秩小于(等于)向量组中向量的个数.

引理 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的初等行变换不改变 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的线性相关性和线性组合关系.

可见,求一个向量组的极大无关组与秩时,可以将这些向量作为列向量构造矩阵 $\boldsymbol{A}$,用初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}$ 非零行的行数即为向量组的秩,每一行的首非零元所在的列所对应的原向量组中的向量即构成一个极大无关组.

例 3 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,0,1)$的一个极大无关组和它的秩,并判断该向量组的线性相关性. 若线性相关,则其余向量分别用极大无关组线性表示出来.

解 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列构造矩阵 $\boldsymbol{A}$,然后利用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$,就可以得出 $\boldsymbol{A}$ 的秩,它恰为 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的个数. 在 $\boldsymbol{B}$ 的每一个首非零元

素上取一个列向量，构成 $\boldsymbol{B}$ 的一个列向量组，它所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组就是原向量组的一个极大无关组. 即

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_3}$$

$$\begin{pmatrix}\underline{1}&0&1&0\\0&\underline{1}&-1&0\\0&0&0&\underline{1}\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B},$$

可见，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 即为一个极大无关组，向量组的秩为 $3<4$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$.

例 4　求向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

的一个极大无关组和它的秩，并判断该向量组的线性相关性. 若线性相关，则其余向量分别用极大无关组线性表示出来.

解　$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&1\\3&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&1\\0&1&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-2&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_3}\begin{pmatrix}\underline{1}&0&0&-1\\0&\underline{1}&0&3\\0&0&\underline{1}&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

在每个首非零元素上取一个向量，则由所取向量对应的原向量组中的向量即为一个极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为一个极大无关组，秩为 $3<4$，所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

习题 3-3

1. 选择题.

(1)极大无关组必(　　).

A. 含零向量　　B. 不含零向量

C. 是向量组本身　　D. 线性相关

(2)向量组的秩就是向量组的(　　).

A. 极大无关组　　B. 极大无关组中的向量

C. 极大无关组中所含向量的个数　　D. 向量组中无关组的个数

2. 求下列向量组的一个极大无关组及其秩,并将其余向量用极大无关组线性表示.

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$;

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}6\\4\\1\\-1\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\\-4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\-9\\-16\\22\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}7\\1\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$;

(4)$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

第四节　线性方程组的求解

m 个方程 n 个未知数的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \qquad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\tag{3-2}$$

若常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为零,则方程组为非齐次线性方程组.

在非齐次线性方程组中,将它右端的常数项全换为零所得到的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{3-3}$$

为齐次线性方程组，也称非齐次线性方程组(3-2)的导出方程组.

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，则非齐次线性方程组可写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$；其导出方程组（齐次线性方程组）可写成 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$. 其中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 叫非齐次线性方程组（或其导出方程组）的**系数矩阵**，矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$ 叫非齐次线性方程组的**增广矩阵**，记为 $\overline{\boldsymbol{A}}$.

若 $x_1=k_1, x_2=k_2, \cdots, x_n=k_n$ 满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，则称其为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，由于解可以看成一个 n 维向量，故称这个向量为方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个**解向量**.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 总有解，因为零向量就是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量，而非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 则不一定有解. 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，则称该非齐次线性方程组是**相容**的；否则，称该非齐次线性方程组是**不相容**的.

一、解的性质

1. 齐次线性方程组 AX= 0 的解的性质

性质 1 若 $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，则 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

证 因为 $\boldsymbol{\eta}_1$ 和 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，所以 $\boldsymbol{A\eta}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{0}$，从而

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 2 如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，k 为任意实数，则 $k\boldsymbol{\eta}$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

证 因为 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解，所以 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$，上式两边同乘以 k，得 $k\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\eta})=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，即 $k\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

可见，如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的 s 个解向量，则它们的任一线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\eta}_i$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解向量. 于是，求齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 全部解的关键是求其解向量组的极大无关组.

定义 11 如果 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 解向量的一个极大无关

组，则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

注意 (1) 如果 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则它不存在基础解系；

(2) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，那么基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 必存在，此时 $\boldsymbol{\eta}=\sum_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\eta}_i(k_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,s)$ 即为导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的全部解，并称其为导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

2. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解的性质

性质 3 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的两个解 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 的差是其导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$的一个解.

证 由于 $\boldsymbol{A\xi}_1=\boldsymbol{B},\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A\xi}_1-\boldsymbol{A\xi}_2=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解.

性质 4 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个解 $\boldsymbol{\xi}$ 与它的导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解 $\boldsymbol{\eta}$ 的和是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个解.

证 由于 $\boldsymbol{A\xi}=\boldsymbol{B},\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{A\xi}+\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解.

由此可得如下定理.

定理 7 设 $\boldsymbol{\xi}_0$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个解向量(称为特解)，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的任一解 $\boldsymbol{\xi}$ 都可表示为 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_0+\boldsymbol{\eta}$，其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个解向量.

二、线性方程组的相容性定理

定理 8 若将增广矩阵$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$用初等行变换化为$(\boldsymbol{S}\,\vdots\,\boldsymbol{T})$，则 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{SX}=\boldsymbol{T}$ 是同解方程组.

证 设$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$经过一系列初等行变换化为矩阵$(\boldsymbol{S}\,\vdots\,\boldsymbol{T})$，由于对矩阵施行初等行变换相当于在矩阵的左边乘上相应的初等矩阵，不妨设存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_k$，使得

$$\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{S}\,\vdots\,\boldsymbol{T}).$$

记 $\boldsymbol{P}_k\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}$，显然 $\boldsymbol{P}$ 可逆. 若 $\boldsymbol{X}_1$ 是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解，即 $\boldsymbol{AX}_1=\boldsymbol{B}$，上式两边同时左乘矩阵 $\boldsymbol{P}$，得 $\boldsymbol{PAX}_1=\boldsymbol{PB}$，即 $\boldsymbol{SX}_1=\boldsymbol{T}$. 于是 $\boldsymbol{X}_1$ 也是 $\boldsymbol{SX}=\boldsymbol{T}$ 的解.

反之，若 $\boldsymbol{X}_2$ 是 $\boldsymbol{SX}=\boldsymbol{T}$ 的解，即 $\boldsymbol{SX}_2=\boldsymbol{T}$，上式两边同时左乘 $\boldsymbol{P}^{-1}$，得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{SX}_2=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{T}$，即 $\boldsymbol{AX}_2=\boldsymbol{B}$，从而 $\boldsymbol{X}_2$ 也是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解.

定理 9 如果导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则该方程组的基础解系必存在，且基础解系中含有 $n-r$ 个解向量.

证 由于 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{A}$ 必可经若干次初等行变换化为如下行最简形矩阵

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0, \\ 0 = 0, \\ \cdots \\ 0 = 0, \end{cases}$$

其中后面 $m-r$ 个方程 $0=0$ 为多余方程,可删去,从而有效方程组为

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{2n}x_n = 0, \\ \cdots \\ x_r + c_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + c_{rn}x_n = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \cdots \\ x_n = x_n, \end{cases}$$

其中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \cdots, x_n$ 为自由未知量,可任意取值. 令 $x_{r+1}=k_1, x_{r+2}=k_2, \cdots, x_n=k_{n-r}$ 为任意实数,则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的解可表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ -c_{2,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_1 + \begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ -c_{2,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} k_2 + \cdots + \begin{pmatrix} -c_{1n} \\ -c_{2n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} k_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意实数.

下面证明 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-c_{1,r+1}\\-c_{2,r+1}\\\vdots\\-c_{r,r+1}\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-c_{1,r+2}\\-c_{2,r+2}\\\vdots\\-c_{r,r+2}\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\begin{pmatrix}-c_{1n}\\-c_{2n}\\\vdots\\-c_{rn}\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 一方面,因为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的后 $n-r$ 个分量组成的 $n-r$ 个 $n-r$ 维标准单位向量组线性无关,从而在这 $n-r$ 个 $n-r$ 维标准单位向量组中每一个向量的第一个分量前添加 r 个分量所构成的向量组 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 也线性无关. 另一方面,$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的任意一个解均可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系.

注意 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中所含解向量个数=自由未知量个数$=n-r$. 其中 n 为未知量个数,r 为系数矩阵的秩.

推论 齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$,当 $r=n$ 时,只有零解;当 $r<n$ 时,有无穷多组解.

定理 10 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$,无解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

证 设 $r(\boldsymbol{A})=r$,则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的增广矩阵经若干次初等行变换必可化为如下行阶梯形矩阵

$$(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0&c_{1,r+1}&\cdots&c_{1n}&d_1\\0&1&\cdots&0&c_{2,r+1}&\cdots&c_{2n}&d_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&c_{r,r+1}&\cdots&c_{rn}&d_r\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&d_{r+1}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases} x_1=-c_{1,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{1n}x_n+d_1, \\ x_2=-c_{2,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{2n}x_n+d_2, \\ \qquad\qquad\cdots \\ x_r=-c_{r,r+1}x_{r+1}-\cdots-c_{rn}x_n+d_r, \\ 0=d_{r+1}. \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解$\Leftrightarrow 0=d_{r+1}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$，$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解$\Leftrightarrow 0\neq d_{r+1}\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{B})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

定理 11　设非齐次线性方程组(3-2)满足 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r$，则当 $r=n$ 时，有唯一解；当 $r<n$ 时，有无穷多组解.

三、线性方程组的求解

例 1　解非齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=6, \\ 3x_1+2x_2+x_3=1, \\ 5x_1+3x_2+4x_3=27. \end{cases}$

解　$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 27 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ 5 & 3 & 4 & 27 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 27 \end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 7 & 16 \\ 0 & -2 & 14 & 52 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right),$$

得同解方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-5, \\ -x_2+7x_3=16, \\ 0=20, \end{cases}$　矛盾，从而原方程组无解. 此时 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组无解.

例 2　解方程组$\begin{cases} x_1+x_2=2, \\ x_2+x_3=0, \\ x_1+x_3=0. \end{cases}$

解　$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_3}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

得同解方程组$\begin{cases}x_1=1,\\x_2=1,\\x_3=-1,\end{cases}$ 即为原方程组的解.此时 $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=r=3$,未知数的个数 $n=3$,方程组有唯一解.

例 3 解方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-x_4=2,\\3x_1+2x_2+x_3-x_4=4,\\x_1-2x_2-5x_3+x_4=0.\end{cases}$

解 $\overline{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&-1&2\\3&2&1&-1&4\\1&-2&-5&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&-1&2\\0&-4&-8&2&-2\\0&-4&-8&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_2}$

$\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&-1&2\\0&-4&-8&2&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{\left(-\frac{1}{4}\right)r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&3&-1&2\\0&1&2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-2r_2}$

$\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-1&0&1\\0&1&2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$,

得同解方程组$\begin{cases}x_1-x_3=1,\\x_2+2x_3-\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2},\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=x_3+1,\\x_2=-2x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2}.\end{cases}$

显然,未知数 x_3,x_4 任意取定一组值带入上式即可求得相应的 x_1,x_2,这样就可以得到原方程组的一个解.由于 x_3,x_4 取值的任意性,因此方程组有无穷多组解.于是上式可进一步写成

$$\begin{cases}x_1=x_3+1,\\x_2=-2x_3+\frac{1}{2}x_4+\frac{1}{2},\\x_3=x_3,\\x_4=x_4,\end{cases}$$

即

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\-2x_3\\x_3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}x_4\\0\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}.$$

令 $x_3=k_1, x_4=k_2$，则 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$ $(k_1,k_2\in\mathbf{R})$即为所求通解. 此时 $r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})=r=2$，未知数个数 $n=4$，自由未知量个数为 $n-r=2$ 个.

例 4　求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\3x_1+2x_2+x_3-3x_5=0,\\x_2+2x_3+3x_4+6x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+2x_4+6x_5=0\end{cases}$ 的一个基础解系，并用基础解系表示全部解.

解　$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&0&-3\\0&1&2&3&6\\5&4&3&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&-6\\0&1&2&3&6\\0&-1&-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&-1&-2&-3&-6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{7}r_4]{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&-5\\0&-1&-2&-3&-6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+6r_4]{r_1+5r_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&0\\0&-1&-2&-3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&0&-1&-2&0\\0&-1&-2&-3&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组 $\begin{cases}x_1-x_3-2x_4=0,\\x_2+2x_3+3x_4=0,\\x_5=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=x_3+2x_4,\\x_2=-2x_3-3x_4,\\x_3=x_3,\\x_4=x_4,\\x_5=0.\end{cases}$

取 x_3, x_4 为自由未知量，分别令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

所以，该方程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$，全部解为 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2$（其中 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$）.

例 5 求齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3-2x_4=0,\\2x_1+x_2+x_3-x_4=0,\\2x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$ 的一个基础解系，并用基础解系表示全部解.

解 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\2&1&1&-1\\2&2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&1&2&-2\\0&-1&-3&3\\0&0&-3&6\end{pmatrix}\xrightarrow[\left(-\frac{1}{3}\right)r_3]{r_1+r_2}$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&-1&-3&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+3r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&0&-3\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_4=0,\\x_2+3x_4=0,\\x_3-2x_4=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1=x_4,\\x_2=-3x_4,\\x_3=2x_4,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

取 x_4 为自由未知量，令 $x_4=1$，得一个解向量为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$，故该方程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$，全部解为 $k\boldsymbol{\eta}_1=k\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$（其中 k 为任意实数）.

例 6 求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1,\\2x_1+4x_2+x_3+x_4=5,\\-x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4\end{cases}$ 的通解.

解 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&2&1\\2&4&1&1&5\\-1&-2&-2&1&-4\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&2&1\\0&0&3&-3&3\\0&0&-3&3&-3\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2}$

$$\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&-1&2&1\\0&0&1&-1&1\\0&0&-3&3&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+3r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&2&0&1&2\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_4=2,\\x_3-x_4=1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4+2,\\x_2=x_2,\\x_3=x_4+1,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

令 $x_2=0,x_4=0$ 得原方程组的一个特解为 $\boldsymbol{\xi}_0=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}$.

下面求其导出方程组的一个基础解系. 由于导出方程组是将原方程组的常数全部改为 0 得到的,因此可得导出方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_4=0,\\x_3-x_4=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1=-2x_2-x_4,\\x_2=x_2,\\x_3=x_4,\\x_4=x_4.\end{cases}$$

取 x_2,x_4 为自由未知量,可得导出方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

于是原方程组的通解为 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\xi}_0=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

例 7 λ 为何值时,方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+\lambda x_2+2x_3=1,\\\lambda x_1+(2\lambda-1)x_2+3x_3=1,\\\lambda x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=2\lambda-1\end{cases}$ 有唯一解,无解,无穷

多组解？

解 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & \lambda & 2 & 1\\ \lambda & 2\lambda-1 & 3 & 1\\ \lambda & \lambda & \lambda+3 & 2\lambda-1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & \lambda & 2 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 2(\lambda-1)\end{array}\right)$.

(1)当 $\lambda=0$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2}\end{array}\right),$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故原方程组无解.

(2)当 $\lambda=-1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}-1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right),$$

此时 $r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，故原方程组无解.

(3)当 $\lambda=1$ 时，

$$\overline{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-2r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

此时 $r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=2<3$，故原方程组有无穷多组解.

(4)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-1$ 时，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=3$，原方程组有唯一解.

最后，总结如下：

(1)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

(2)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$. 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，且未知数的个数为 n，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r$，则

(a)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow n-r=0$，即 $n=r$；

(b)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow n-r>0$，此时自由未知量的个数为 $n-r$.

(3)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=n$.

(4)$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})<n$.

习题 3-4

1. 选择题.

(1)适用任一线性方程组的解法是(　　).

A. 逆矩阵法　　B. 克拉默法则　　C. 行变换法　　D. 以上方法都行

(2)齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{3\times5}\boldsymbol{X}_{5\times1}=\boldsymbol{0}$ (　　).

A. 无解　　B. 只有零解　　C. 必有非零解　　D. 可能有非零解

(3)对于 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$，若 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则此方程组的基础解系(　　).

A. 唯一存在　　B. 共有 $n-r$ 个

C. 含有 $n-r$ 个解向量　　D. 含有无穷多个向量

(4)若方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=4,\\x_2+2x_3=2,\\(\lambda-1)(\lambda-2)x_3=(\lambda-3)(\lambda-4)\end{cases}$ 无解，则 $\lambda=$ (　　).

A. 0　　B. 1 或 2　　C. 3　　D. 4

2. 求下列方程组的通解.

(1) $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4-x_5=0,\\2x_1+x_2+x_3-x_4-2x_5=0,\\x_1-3x_2+4x_3+3x_4-x_5=0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0,\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0,\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3=4,\\x_1-2x_2+4x_3=-5,\\3x_1+8x_2-2x_3=13,\\4x_1-x_2+9x_3=-6;\end{cases}$　(4) $\begin{cases}x_1+x_2=5,\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=1,\\5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3.\end{cases}$

3. 问 λ,μ 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=6,\\x_1-x_2+6x_3=0,\\3x_1-2x_2+\lambda x_3=\mu\end{cases}$ 无解，有唯一解，有无穷多解？

第五节　投入产出数学模型

投入产出理论是研究一个经济系统内各部门在产品的消耗与生产之间的“投入”及“产出”之间数量依存关系的综合平衡的数学模型. 它是由 1973 年诺贝尔经济学奖获得者列昂惕夫(W. Leontief)在 20 世纪 30 年代(1936 年)创立的. 投入是指进行一项经济活动的各种消耗(如原材料、能源、设备、人的劳动消耗等)，而产出是指从事经济活动的结果(如生产出的产品等). 投入产出理论就是以线性代数理论和计算机技术为主要工具，研究各种经济活动的投入与产出之间的数量规律性的经济分析法.

一、投入产出平衡表

考察一个具有 n 个部门的经济系统，各部门分别用 $1,2,\cdots,n$ 表示，并作如下基本假设：

(1)部门 i 仅生产一种产品(称为部门 i 的产出)，不同部门的产品不能相互

替代；

（2）部门 i 在生产过程中至少需要消耗另一部门 j 的产品（称为部门 j 对部门 i 的投入），并且消耗的各部门产品的投入量与该部门的总产出量成正比.

根据上述假设，每一个生产部门，一方面，将自己的产品分配给各部门作为生产资料或满足社会的非生产性消费需要，并提供积累；另一方面，每一个生产部门在其生产过程中也要消耗各部门的产品，所以该经济系统内各部门之间就形成了一个错综复杂的关系，这一关系可用投入产出表来表示. 利用某一年的统计数字，可先编制出投入产出表，并进一步建立相应的投入产出数学模型.

投入产出模型按计量单位的不同，可分为价值型和实物型两种，在价值型模型中，各部门的投入、产出均以货币单位表示；在实物型模型中，则按各产品的实物单位（如米、千克、吨等）表示. 本书只讨论价值型的投入产出模型. 因此，后面提到的诸如“产品”、“总产品”、“中间产品”、“最终产品”等分别指“产品的价值”、“总产品的价值”、“中间产品的价值”、“最终产品的价值”等.

首先，可利用某年的经济统计数据编制投入产出表（见表 3-1）.

表 3-1　价值型投入产出表

部门间流量 产出 / 投入		中间产品							最终产品				总产品
		部门 1	部门 2	…	部门 j	…	部门 n	合计 $\sum$	积累	消费	…	合计 $\sum$	
物质消耗	部门 1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum\limits_j x_{1j}$				y_1	x_1
	部门 2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\sum\limits_j x_{2j}$				y_2	x_2
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮				⋮	⋮
	部门 n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum\limits_j x_{nj}$				y_n	x_n
合计 $\sum$		$\sum\limits_i x_{i1}$	$\sum\limits_i x_{i2}$	…	$\sum\limits_i x_{ij}$	…	$\sum\limits_i x_{in}$	$\sum\limits_i \sum\limits_j x_{ij}$				$\sum\limits_i y_i$	$\sum\limits_i x_i$
新创造价值	劳动报酬	v_1	v_2	…	v_j	…	v_n	$\sum\limits_j v_j$					
	纯收入	m_1	m_2	…	m_j	…	m_n	$\sum\limits_j m_j$					
	合计 $\sum$	z_1	z_2	…	z_j	…	z_n	$\sum\limits_j z_j$					
总收入		x_1	x_2	…	x_j	…	x_n	$\sum\limits_j x_j$					

其中：

$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 的总产品；

$y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 的最终产品；

$x_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 i 分配给部门 j 的产品量，或称部门 j 在生产过程中需消耗部门 i 的产品量；

$v_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 的劳动报酬；

$m_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 的纯收入；

$z_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示部门 j 新创造的价值. 它是部门 j 的劳动报酬 v_j 与纯收入 m_j 的总和.

用双线把投入产出表分割成四个部分：左上、右上、左下、右下，分别称为第 Ⅰ、第 Ⅱ、第 Ⅲ、第 Ⅳ 象限.

在第 Ⅰ 象限中，每一个部门都以生产者和消费者的双重身份出现. 从每一行看，该部门作为生产部门以自己的产品分配给各部门；从每一列看，该部门又作为消耗部门在生产过程中消耗各部门的产品. 行和列的交叉点是部门之间的流量，这个量也是以双重身份出现，它是行部门分配给列部门的产品量，也是列部门消耗行部门的产品量.

在第 Ⅱ 象限中，反映了各部门用于最终产品的部分. 从每一行来看，反映了该部门最终产品的分配情况；从每一列看，反映了用于消费、积累等方面的最终产品分别由各部门提供的数量情况.

在第 Ⅲ 象限中，反映了总产品中新创造的价值情况，从每一行来看，反映了各部门新创造价值的构成情况；从每一列看，反映了该部门新创造的价值情况.

第 Ⅳ 象限反映总收入的再分配，由于该部分的经济内容比较复杂，人们对其研究、利用还很少，因此，投入产出表中一般不编制这部分的内容.

二、平衡方程

从表3-1的第 Ⅰ、第 Ⅱ 象限来看，每一行都存在一个等式，即每一个部门作为生产部门分配给各部门用于生产消耗的产品，加上它本部门的最终产品，应等于它的总产品，即

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i(i=1,2,\cdots,n), \tag{3-4}$$

这个方程称为**产品平衡方程组.**

从表3-1的第 Ⅰ、第 Ⅲ 象限来看，每一列也存在一个等式，即每一个部门作为消耗部门，各部门为它的生产消耗转移的产品价值，加上它本部门新创造的价值，应等

于它的总产值,即

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + z_j (j = 1,2,\cdots,n), \tag{3-5}$$

这个方程称为**产值构成平衡方程组.**

根据前述基本假设(2),记

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} (i,j = 1,2,\cdots,n), \tag{3-6}$$

易见 a_{ij} 表示生产单位产品 j 所需直接消耗产品 i 的数量,一般称为**直接消耗系数.**

各部门间的直接消耗系数构成一个 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**直接消耗系数矩阵.**

直接消耗系数 a_{ij} 具有下列性质:

(1)$0 \leqslant a_{ij} < 1$;

(2)$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1 (j = 1,2,\cdots,n)$.

利用直接消耗系数矩阵,可分别将产品平衡方程组(3-4)和产值构成平衡方程组(3-5)表示成矩阵形式.

将 $x_{ij} = a_{ij} x_j$ 带入产品平衡方程组(3-4),得

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i (i = 1,2,\cdots,n), \tag{3-7}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \qquad\cdots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n. \end{cases} \tag{3-8}$$

若记 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^{\mathrm{T}}$,则产品平衡方程组(3-4)可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \text{ 或 } (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \tag{3-9}$$

将 $x_{ij} = a_{ij} x_j$ 带入产值构成平衡方程组(3-5),得

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j + z_j (j = 1,2,\cdots,n), \tag{3-10}$$

即

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_1 + z_1, \\ x_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} x_2 + z_2, \\ \cdots \\ x_n = \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_n + z_n. \end{cases} \tag{3-11}$$

若记 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^{\mathrm{T}}$，及

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n} a_{in} \end{pmatrix},$$

则产值构成平衡方程组(3-5)可表示为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} \text{ 或} (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}. \tag{3-12}$$

三、平衡方程组的解

根据直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的性质知，矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^k + \cdots,$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素非负(称为非负矩阵)，由上式可知 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}$(称为列昂惕夫逆矩阵)的所有元素也非负. 因此，对产品平衡方程组 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$，若已知最终需求向量 $\boldsymbol{y}$(非负)，则可求得总产品向量

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}, \tag{3-13}$$

即 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是非负的，这样的解在经济预测和分析中才具有实际意义.

而对产值构成平衡方程组(3-12)，因对角矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}$ 的主对角线元素均为正数，所以 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})^{-1}$ 非负. 于是，如果已知总产品向量 $\boldsymbol{x}$，就可得到新创造价值向量 $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})\boldsymbol{x}$. 反之，如果已知新创造价值向量 $\boldsymbol{z}$ 非负时，则可求出对应的总产品向量

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D})^{-1}\boldsymbol{z}. \tag{3-14}$$

例 1　假设某地区经济系统只分为三个部门：农业、工业和服务业，这三个部门间的生产分配关系见表 3-2.

表 3-2　投入产出表

单位:万元

部门间流量 产出 / 投入	中间产品 农业	中间产品 工业	中间产品 服务业	合计	最终需求 y	总产品 x
农业	27	44	2	73	120	193
工业	58	11 010	182	11 250	13 716	24 966
服务业	23	284	153	460	960	1 420
合计	108	11 338	337			
新创造价值 z	85	13 628	1 083			
总收入	193	24 966	1 420			

根据表 3-2 和直接消耗系数的定义,可求出直接消耗系数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$,从而求得直接消耗系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.139\,9 & 0.001\,8 & 0.001\,4\\ 0.300\,5 & 0.441\,0 & 0.128\,2\\ 0.119\,2 & 0.011\,4 & 0.107\,7\end{pmatrix},\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0.860\,1 & -0.001\,8 & -0.001\,4\\ -0.300\,5 & 0.559\,0 & -0.128\,2\\ -0.119\,2 & -0.011\,4 & 0.892\,3\end{pmatrix}.$$

如果给定下一年计划的最终需求量 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$,则由模型(3-13),有

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{y}.$$

从而可预测下一年各部门的总产出. 利用这一结果,可以进一步得到 $x_{ij}=a_{ij}x_j(i,j=1,2,3)$ 和 $z_j(j=1,2,3)$,即可预测下一年各部门间的流量和各部门的新创造价值,从而为决策提供依据.

第六节　用 MATLAB 求方程组的解

任意一个线性方程组都可以写成矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的形式. 其中 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵,$\boldsymbol{X}$ 是由未知数组成的列矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是由常数组成的列矩阵. MATLAB 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有两种方法,下面分别介绍.

一、利用矩阵除法求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$

在线性代数中,没有除法,只有逆矩阵. 矩阵除法是 MATLAB 从逆矩阵的概念引申出来的. 对于矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则在等式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$,可得 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$. 在 $\boldsymbol{B}$ 的左边乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$,MATLAB 就记做 $\boldsymbol{A}\backslash$,称之为“左除”. 根据矩阵乘法可知,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同,因此左除的条件是两矩阵的行数必须相同. 类似

可得，对于矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，其解为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}=\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}$，在 $\boldsymbol{B}$ 的右边乘以 $\boldsymbol{A}^{-1}$，记做 $/\boldsymbol{A}$，称之为“右除”. 右除的条件是两矩阵的列数必须相同.

例 1　解线性方程组 $\begin{cases}6x_1+3x_2+4x_3=3,\\-2x_1+5x_2+7x_3=-4,\\8x_1-4x_2-3x_3=-7.\end{cases}$

解　将方程组写成矩阵方程形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$.

输入：>> A = [6 3 4; -2 5 7; 8 -4 -3]; B = [3; -4; -7];

>> X = A\B

输出：X =

0.6000

7.0000

-5.4000

MATLAB 中的除法还可以用来解方程个数多于未知数个数的方程组.

例 2　解线性方程组 $\begin{cases}6x_1+3x_2+4x_3=3,\\-2x_1+5x_2+7x_3=-4,\\8x_1-4x_2-3x_3=-7,\\x_1+5x_2-7x_3=9.\end{cases}$

解　将方程组写成矩阵方程形式 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$. 经计算知，$r(\boldsymbol{A})=3<r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，故方程组无解.

输入：>> A = [6 3 4; -2 5 7; 8 -4 -3; 1 5 -7]; B = [3; -4; -7; 9];

>> X = A\B

输出：X =

-0.1564

1.0095

-0.6952

MATLAB 并未显示出错信息，而是给出了解. 事实上，此时 MATLAB 给出的是最小二乘解.

MATLAB 的除法还可以用来求解方程个数少于未知数个数的情况，此时方程组有无穷多解. MATLAB 的除法给出的解是满足方程的，但并不是通解，而是令某个或某些未知量为 0 所得到的一个特解.

二、利用符号工具箱求解 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$

符号数学是以符号（如 a,b,c,x,y,z 等）为对象的数学，区别于以数值为对象的

MATLAB 中的部分.

在 MATLAB 中,函数 syms 可以方便地一次创建多个符号变量. 在 MATLAB 的符号数学工具箱中,求代数方程的解由函数 solve 实现,其调用格式为:

s = solve(eq) 求解符号表达式 eq = 0 的根,自变量为默认自变量;

s = solve(eq,var) 求解符号表达式 eq = 0 的根,自变量为 var;

[x1,x2,…] = solve(eq1,eq2,…,eqn) 求解符号表达式 eq1 = 0, eq2 = 0,…,eqn = 0 组成的方程组,x1,x2,… 表示需求解方程的变量名.

例 3 解方程组 $\begin{cases} x+y-z=5, \\ 2x-3y+z=3, \\ -5x+2y-2z=0. \end{cases}$

解 利用 MATLAB 的符号工具箱来求解.

输入:

```
>> syms x y z;
>> f = x+y-z-5;g = 2*x-3*y+z-3;h =-5*x+2*y-2*z;
>> [x,y,z] = solve(f,g,h)
```

输出:

```
x =
    10/7
y =
    -13/7
z =
    -38/7
```

当然对于有无穷多组解的情形,最好通过编写相应的程序来求解. 这里不再介绍,有兴趣的读者可参阅相关书籍.

本章小结

一、基本概念

1. 一般地,由 n 个实数组成的有序数组 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为一个 n 维向量,其中 a_1, $a_2,\cdots,a_n$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分量(或坐标),a_i 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的第 i 个分量,向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 中分量的个数 n 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的维数.

2. 设有 n 维向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,如果存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

成立,则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的线性组合,或称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

3. 设有 m 个 n 维向量组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$,如果存在 m 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$$

成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关；反之，如果这样的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不存在，也就是说，只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时，上式才成立，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

4. 设 $\boldsymbol{T}$ 是 n 维向量所组成的向量组，在 $\boldsymbol{T}$ 中选取 r 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，如果满足：

(ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(ⅱ) 任取 $\boldsymbol{T}$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 总可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 为向量组 $\boldsymbol{T}$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

5. 一个向量组的极大无关组所含向量的个数称为向量组的秩.

6. 如果 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的解向量的一个极大无关组，则称 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系.

二、基本知识

1. 线性方程组的向量形式：$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}$.

2. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中有一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关.

3. 当 $m\geqslant 2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关的充要条件是向量组中至少有一个向量能由其他向量线性表示.

4. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达式唯一.

5. 设有 $m(m\leqslant n)$ 个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m=\begin{pmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\\vdots\\a_{nm}\end{pmatrix},$$

它们的坐标排成一个 $n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nm}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=m$.

6. 如果导出方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r<n$，则该方程组的基础解系必存在，且基础解系中含有 $n-r$ 个解向量.

7. $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\overline{\boldsymbol{A}})$，即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$.

设未知数的个数为 n，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=r$，则

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解 $\Leftrightarrow n-r=0$，即 $n=r$；

$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有无穷多解 $\Leftrightarrow n-r>0$，此时自由未知量的个数为 $n-r$.

三、基本方法

1. 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示的方法：

(1) 设存在 s 个数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \boldsymbol{\beta}$；

(2) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}$ 带入上式中，写出相应的非齐次线性方程组；

(3) 判断第(2)步中的方程组是否有解，如果方程组有解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示；如果方程组无解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示.

2. 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关性的方法：

以向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为行或列构造矩阵 $\boldsymbol{A}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})$，则 $r(\boldsymbol{A}) = m \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关；$r(\boldsymbol{A}) < m \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

3. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组及秩的方法：

以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 为列构造矩阵 $\boldsymbol{A}$，然后利用初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}$，就可以得出 $\boldsymbol{A}$ 的秩，它恰为 $\boldsymbol{B}$ 中非零行的个数. 在 $\boldsymbol{B}$ 的每一个首非零元上取一个列向量，构成 $\boldsymbol{B}$ 的一个列向量组，它所对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组就是原向量组的一个极大无关组.

4. 解线性方程组的方法：初等行变换法.

复习题三

1. 填空题.

(1) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,5,1,3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (10,2,5,10), \boldsymbol{\alpha}_3 = (4,3,-1,1)$ 满足 $3(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\beta}) + 2(\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\beta}$，则 $\boldsymbol{\beta} =$ ________.

(2) 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,6)$，若存在一组数 k_1, k_2, k_3，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$，则 $k_1 =$ ________，$k_2 =$ ________，$k_3 =$ ________，由此知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性________.

(3) 若 n 个 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则由这 n 个向量构成的矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 必是________ 矩阵.

(4) 齐次线性方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}$ 的系数行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1 \ \boldsymbol{\alpha}_2 \ \boldsymbol{\alpha}_3| = 0$，则此方程组有________ 解，且系数列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性________.

(5) 若非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = \lambda - 1, \\ 3x_2 - x_3 = \lambda - 2, \\ \lambda x_2 - x_3 = \lambda^2 - 6\lambda + 10 \end{cases}$ 有无穷多组解，则 $\lambda =$ ______.

2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha} = (5,-1,2,4), 3\boldsymbol{\alpha} - 4\boldsymbol{\beta} = (3,-7,-2,8)$，求 $2\boldsymbol{\alpha} + 3\boldsymbol{\beta}$.

3. 在下列各题中，向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否由其他向量线性表示.

(1) $\boldsymbol{\beta} = (1,1), \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-3), \boldsymbol{\alpha}_2 = (-3,9)$；

(2) $\boldsymbol{\beta} = (3,5,-6), \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,-1,-1)$.

4. 判断下列向量组的线性相关性.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,-5,4), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-1,3,-3), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,5,0,11)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (4,3,-1,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,5,-1,-1,-5), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,0,1,2), \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,5,1,-2,2)$.

5. 求下列向量组的秩，极大无关组，并将向量组中其余向量由极大无关组线性表示.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,1,-1,-1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-1,-1,-1), \boldsymbol{\alpha}_4 = (-1,-1,1,1)$.

(2)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-1)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,3,-2)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(-3,4,14)$,$\boldsymbol{\alpha}_5=(-2,1,-4)$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,-1,-5,-6)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-3,-4,-7)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,-1,0)$.

6. 求下列线性方程组的通解.

(1)$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0;\end{cases}$

(2)$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0,\\2x_1+3x_2+x_3=0,\\3x_1+x_2-2x_3+7x_4=0,\\4x_1-x_2+2x_3=0;\end{cases}$

(3)$\begin{cases}x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11,\\5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1,\\2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6;\end{cases}$

(4)$\begin{cases}4x_1+2x_2-x_3=2,\\3x_1-x_2+2x_3=10,\\11x_1+3x_2=8.\end{cases}$

7. λ 为何值时，下列方程组有唯一解，无解，无穷多组解？

(1)$\begin{cases}x_1+x_2+\lambda x_3=4,\\-x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda^2,\\x_1-x_2+2x_3=-4;\end{cases}$

(2)$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2.\end{cases}$