

# 绪 论

## 0.1 自动控制理论概述

### 0.1.1 自动控制的基本概念

控制(control)一词如今已相当广泛地应用在各行各业,如温度控制、微机控制、人口控制等。控制的定义是:为达到某种目的,对某一对象施加所需的操作。控制有调节、调整,管理、监督,运用、操作等含义。

上述定义中所说的对象,是指物体、机器、过程或经济、社会现象等一般广泛的系统,称为被控对象;把想实现控制的目标量,如电动机的转速、储水水位、油压缸中活塞的位置、炉内温度等,称为控制量;而把所希望的转速、水位、位置、温度等称为目标值或参据量。

根据产生控制作用的主体的不同,控制可分为手动控制和自动控制。由人本身通过判断和操作进行的控制称为手动控制。例如,汽车的驾驶,驾驶员为到达目的地,需要根据路况和车况不断地操纵方向盘;人的行走、抓放物品等行为也可称为手动控制。所谓自动控制,是指在没有人直接参与的情况下,利用外加的设备或装置(称控制装置或控制器)使机器、设备或生产过程的某个工作状态或参数自动地按照预定的目标运行。

自动控制技术在现代科学技术的许多领域中起着越来越重要的作用。例如,数控车床按照预定程序自动地切削工件,化学反应炉的温度或压力自动地维持恒定,雷达和计算机组成的导弹发射和制导系统自动地将导弹引导到敌方目标,无人驾驶飞机按照预定航线自动升降和飞行,人造卫星准确地进入预定轨道运行并回收,等等,这一切都是以高水平的自动控制技术为前提的。

另外,为了实现各种复杂的控制任务,首先要将被控对象和控制装置按照一定的方式连接起来,组成一个有机总体,这就是自动控制系统。在自动控制系统中,被控对象的输出量,即被控量是需要严格加以控制的物理量,它可以要求保持为某一恒定值,如温度、压力、液位等,也可以要求按照某个给定规律运行,如飞行航线、记录曲线等;而控制装置则是对被控对象施加控制作用的机构的总体,它可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制。

### 0.1.2 机械与控制的关系

机械可以代替人类从事各种有益的工作,弥补人类体力和能力的不足,在各个方面都给我们的生活带来了极大的帮助。从机械的发展史可以看到,机械的发展和进步与控制是密不可分的。一方面,机械运转本身,广义地讲也可称为控制,因为只有配备一定的控制装置才可以达到某种较复杂的工作目的(尽管这种控制装置最初是通过纯机械机构来实现的)。另一方面,机械的广泛深入的应用也促进了控制科学的产生和发展。例如,作为工业革命象征的蒸汽机,当时主要用于各种机械驱动,为了消除蒸汽机因负荷变化而对转速造成的影响,19世纪末,詹姆斯·瓦特(James Watt)发明了离心调速器。但离心调速器在某种使用条件下,蒸汽机的转速和调速器套筒的位置依然会周期性地发生很大变化,形成异常运转状态。蒸汽机和调速器能单独地各自稳定地工作,为什么在组合的情况下会出现不稳定状态呢?这一问题促使人们展开了相关研究和探索。直到19世纪后半叶,麦克斯韦提出了系统特性,以及劳斯·胡尔维兹发现了系统稳定工作的条件(稳定性判据)后,上述问题才得以解决,这也可以说是控制理论的开始。

生产工艺的发展对机械系统也提出了越来越高的要求。为达到工作目的,控制机械已不再采用纯机械结构,而是与电气、电子装置结合在一起,形成机电控制系统。例如,一些精密机床要求加工精度达百分之几毫米,甚至几微米;重型镗床为保证加工精度和表面粗糙度,要求在极慢的稳速下进给,即要求在很宽的范围内调速;为了提高效率,由数台或数十台设备组成的生产自动线,要求统一控制和管理等。这些要求都是靠驱动装置及其控制系统和机械传动装置的有机结合来实现的。

由此也可得出机电控制和自动控制的关系:自动控制是以一般系统为对象,广泛地使用控制方法进行控制系统的理论设计;而机电控制就是应用自动控制工程学的研究成果,把机械作为控制对象,研究怎样通过采用一定的控制方法来适应对象特性变化,从而达到期望的性能指标。

### 0.1.3 控制系统的发展概况

机械控制系统的发展按所用控制器件来划分,主要经历了4个阶段:最早的机电控制系统出现在20世纪初,它仅借助于简单的接触器与继电器等控制电器,实现对被控对象的启、停及有级调速等控制,它的控制速度慢,控制精度也较差;20世纪30年代,控制系统从断续控制发展到连续控制,连续控制系统可随时检测控制对象的工作状态,并根据输出量与给定量的偏差对被控对象自动进行调整,它的快速性及控制精度都大大超过了最初的断续控制,并简化了控制系统,减少了电路中的触点,提高了可靠性,使生产效率大为提高;20世纪40~50年代初中期出现了大功率可控水银整流器控制;时隔不久,50年代末期出现了大功率固体可控整流元件——晶闸管,很快晶闸管控制就取代了水银整流器控制,而后又出现了功率晶体管控制,由于晶闸管、晶体管具有效率高、控制特性好、反应快、寿命长、可靠性高、维护容易、体积小、重量轻等优点,它们的出现为机电自动

控制系统开辟了新纪元。

随着数控技术的发展,计算机的应用特别是微型计算机的出现和应用,又使控制系统发展到一个新阶段——计算机数字控制,它也是一种断续控制方式,但是和最初的断续控制不同,它的控制间隔(采样周期)比控制对象的变化周期短得多,因此在客观上完全等效于连续控制;它把晶闸管技术与微电子技术、计算机技术紧密地结合在一起,使晶体管与晶闸管控制具有强大的生命力。20世纪70年代初,计算机数字控制系统应用于数控机床和加工中心,不仅加强了机床的自动化程度,而且提高了其通用性和加工效率,在生产上得到了广泛应用。工业机器人的诞生,为实现机械加工全面自动化创造了物质基础。20世纪80年代以来,出现了由数控机床、工业机器人、自动搬运车等组成的统一由中心计算机控制的机械加工自动线——柔性制造系统(FMS),它是实现自动化车间和自动化工厂的重要组成部分。机械制造自动化的高级阶段是走向设计和制造一体化,即利用计算机辅助设计(CAD)与计算机辅助制造(CAM)形成产品设计与制造过程的完整系统,对产品构思和设计,直至装配、试验和质量管理这一全过程实现自动化,以实现制造过程的高效率、高柔性、高质量,实现计算机集成制造系统(CIMS)。

## 0.2 自动控制系统的工作原理和一般构成

所谓自动控制,是指在无人直接参与的情况下,利用控制装置使被控对象(如机器、设备或生产过程等)的某些物理量(如温度、压力、位置、速度等)或工作状态准确地按照预期规律变化(或运行)。如空调能保持恒温;数控机床能加工出预期几何形状的工件;火炮控制系统能准确击中目标等。一般地说,如何使被控制量按照给定量的变化规律而变化,这是控制系统所要完成的基本任务。学习机械工程控制基础要解决两个问题:一是如何分析某个给定控制系统的工作原理、稳定性和过渡过程品质;二是如何根据实际需要来进行控制系统的设计,并用机、电、液、光等设备来实现这一设计系统。前者主要是分析控制系统,后者是对控制系统的设计与综合。无论解决哪类问题,都必须具有丰富的控制理论知识,同时能以系统的而不是孤立的、动态的而不是静态的观点和方法来处理问题,才能实现预期的控制目的。

### 0.2.1 自动控制系统的工作原理

在许多工业生产过程或生产设备运行中,为了保证正常的工作条件,往往需要对某些物理量(如温度、压力、流量、液位、电压、位移、转速等)进行控制,使其尽量维持在某个数值附近,或使其按一定规律变化。要满足这种需要,就应该对生产机械或设备进行及时的操作,以抵消外界干扰的影响。这种操作通常称为控制,用人工操作称为人工控制,用自动装置来完成称为自动控制。

图0-1(a)所示为人工控制水位保持恒定的供水系统。水池中的水位是被控制的物理量,简称被控量。水池这个设备是控制的对象,简称被控对象。当水位在给定位置且流入、流出量相等时,它处于平衡状态。当流出量发生变化或水位给定值发生变化时,就

需要对流入量进行必要的控制。在人工控制方式下,工人用眼观察水位情况,用脑比较实际水位与期望水位的差异并根据经验做出决策,确定进水阀门的调节方向与幅度,然后用手操作进水阀门进行调节,最终使水位等于给定值。只要水位偏离了期望值,工人便要重复上述调节过程。

图 0-1(b)所示为水池水位自动控制系统的一种简单形式。图中用浮子代替人的眼睛,用来测量水位高低;另用一套杠杆机构代替人的大脑和手,用来进行比较、计算误差并实施控制。杠杆的一端由浮子带动,另一端则连向进水阀门。当用水量增大时,水位开始下降,浮子也随之降低,通过杠杆的作用将进水阀门开大,使水位回到期望值附近;反之,若用水量变小,水位及浮子上升,进水阀关小,水位自动下降到期望值附近。整个过程中无须人工直接参与,控制过程是自动进行的。

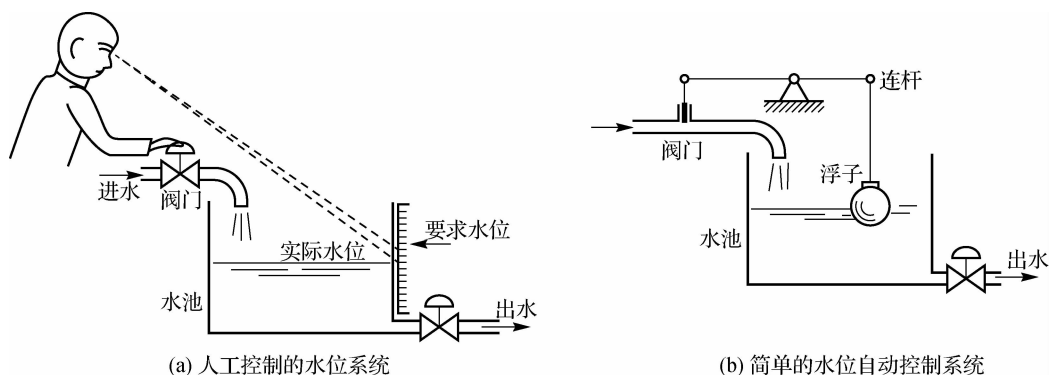


图 0-1 水位控制系统

图 0-1(b)所示的系统虽然可以实现自动控制,但由于结构简单而存在缺陷,主要表现在被控制的水位高度将随着出水量的变化而变化。出水量越多,水位就越低,偏离期望值就越远,误差也越大。控制的结果总是存在着一定范围的误差值。这是因为当出水量增加时,为了使水位基本保持恒定不变,就要开大阀门,增加进水量。要开大进水阀,唯一的途径是浮子要下降得更多,这意味着实际水位要偏离期望值更多。这样,整个系统就会在较低的水位上建立起新的平衡状态。

为克服上述缺点,可在原系统中增加一些设备而组成较完善的水位自动控制系统,如图 0-2 所示。这里,浮子仍是测量元件;连杆起着比较作用,它将期望水位与实际水位两者进行比较,得出误差,同时推动电位器的滑臂上下移动。电位器的输出电压反映了误差的性质(大小和方向)。电位器输出的微弱电压经放大器放大后驱动直流伺服电动机,其转轴经减速器后拖动进水阀门,对系统施加控制作用。

在正常情况下,实际水位等于期望值,此时,电位器的滑臂居中, $u_c = 0$ 。当出水量增大时,浮子下降,带动电位器滑臂向上移动, $u_c > 0$ ,经放大后成为  $u_a$ ,控制电动机正向旋转,以增大进水阀门的开度,促使水位回升。当实际水位回复到期望值时, $u_c = 0$ ,系统达到新的平衡状态。

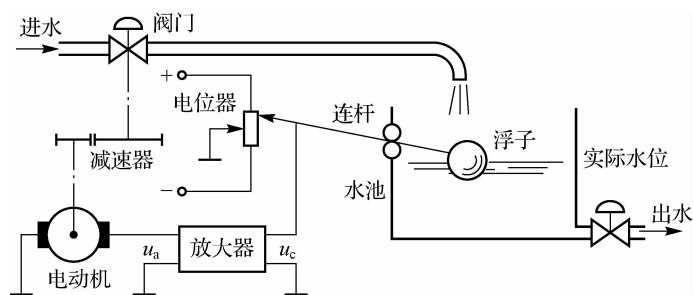


图 0-2 较完善的水位自动控制系统

可见,该系统在运行时,无论何种干扰引起水位出现偏差,系统都要进行调节,最终总是使实际水位等于期望值,大大提高了控制精度。

上述人工控制系统和自动控制系统是极其相似的,执行机构类似于人手,测量装置相当于人的眼睛,控制器类似于人脑。另外,它们还有一个共同的特点,就是都要检测偏差,并根据检测到的偏差去纠正偏差,可见,没有偏差便没有调节过程。在自动控制系统中,这一偏差是通过反馈建立起来的。给定信号也称为激励,给定量也称为控制系统的输入量;被控制量称为系统的输出量,输出信号也称为响应。反馈就是指输出量通过适当的测量装置将信号全部或部分返回输入端,并与之同时作用于系统的过程。反馈量与输入量的比较结果称为偏差。因此,基于反馈基础上的“检测偏差用以纠正偏差”的原理又称为反馈控制原理。利用反馈控制原理组成的系统称为反馈控制系统。实现自动控制的装置可能各不相同,但反馈控制的原理却是相同的,可以说,反馈控制是实现自动控制最基本的方法。

### 0.2.2 自动控制系统的—般构成

机电控制系统一般由 8 个部分组成,如图 0-3 所示。图中,“○”代表比较元件,它将测量元件检测到的被控量与输入量进行比较;“—”号表示两者符号相反,即负反馈;“+”号表示两者符号相同,即正反馈。信号从输入端沿箭头方向到达输出端的传输通路称为前向通路;系统输出量经测量元件反馈到输入端的传输通路称为主反馈通路。前向通路与主反馈通路共同构成主回路。此外,还有局部反馈通路及由它构成的内回路。只包含一个主反馈通路的系统称为单回路系统,有两个或两个以上反馈通路的系统称多回路系统。各个部分的功能和作用如下:

(1) 测量元件的职能是检测被控制的物理量,如执行机构的运动参数、加工状况等。这些参数通常有位移、速度、加速度、转角、压力、流量、温度等。如果这个物理量是非电量,一般要再转换为电量。

(2) 比较元件的职能是把测量元件检测的被控量实际值与给定元件的输入量进行比较,并求出它们之间的偏差。常用的比较元件有差动放大器、机械差动装置、电桥电路等。

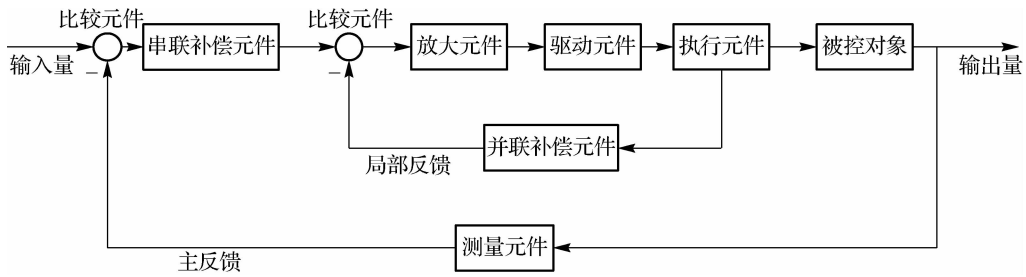


图 0-3 机电控制系统的组成框图

(3)放大元件的职能是将比较元件给出的偏差信号进行放大,用来推动执行元件去控制被控对象。电压偏差信号可用电子管、晶体管、集成电路、晶闸管组成的电压放大级和功率放大级加以放大。

(4)驱动元件与执行机构相连接,给执行机构提供动力,并控制执行机构启动、停止和换向。驱动元件的作用是完成能量的供给和转换,用来作为执行元件的有阀、电动机、液压马达等。

(5)执行元件的职能是直接推动被控对象,使其被控量发生变化,完成特定的加工任务,如零件的加工或物料的输送。执行机构直接与被加工对象接触。根据不同的用途,执行机构具有不同的工作原理、运动规律、性能参数和结构形状,如车床、铣床、送料机械手等,结构上千差万别。

(6)补偿元件又称校正元件,它是结构或参数便于调整的元件,用串联或反馈的方式连接在系统中,其作用是完成加工过程的控制,协调机械系统各部分的运动,具有分析、运算、实时处理功能,以改善系统的性能。最简单的校正元件是由电阻、电容组成的无源或有源网络,复杂的校正元件则由 STD 总线工业控制机、工业微机(PC)、单片微机等组成。

(7)被控对象是控制系统要操纵的对象。系统的输出量即为系统的被控量,如机床、工作台、设备或生产线等。

(8)机电控制系统各组成部分之间的连接匹配部分称为接口。接口分为两种,即机械接口和电路接口。机械与机械之间的连接部分称为机械接口,电气与电气之间的连接部分称为电路接口。两个组成部分之间如果相匹配,则接口只起连接作用;如果不相匹配,则接口除起连接作用外,还须起某种转换作用,如连接机床主轴和电机的减速箱,连接传感器输出信号和 A/D 转换器的放大电路,这些接口既起连接又起匹配的作用。

机电控制系统的基本工作原理是:操作人员将加工信息(如尺寸、形状、精度等)输入到控制计算机,计算机发出启动命令,启动驱动元件运转,带动执行机构进行加工。测量元件实时地检测元件的加工状态,将信息反馈到计算机,经计算机分析、处理后,发出相应的控制指令,实时地控制执行机构运动,如此反复进行,自动地将工件按输入的加工信息完成加工。

## 0.3 自动控制系统的的基本控制方式和分类

### 0.3.1 自动控制系统的的基本控制方式

自动控制系统的的基本控制方式包括反馈控制方式(闭环控制方式)、开环控制方式和复合控制方式。

#### 1. 反馈控制方式

反馈控制方式又称闭环控制方式,是机电控制系统最基本的控制方式,也是应用最广泛的一种控制方式。在反馈控制系统中,控制装置对被控对象施加的控制作用是取自被控量的反馈信息,用来不断修正被控量的偏差,从而实现对被控对象进行控制的任务,这就是反馈控制的原理。

其实,人的一切活动都体现出反馈控制的原理,人本身就是一个具有高度复杂控制能力的反馈控制系统。例如,人用手拿取桌上的书,汽车驾驶员操纵方向盘使汽车沿公路平稳行驶等,这些日常生活中习以为常的平凡动作都渗透着反馈控制的原理。

下面简要分析手从桌上取书的动作过程所包含的反馈控制机理。如图 0-4 所示,书的位置是手运动的指令信息,一般称为输入信号(或参据量)。取书时,人首先要用眼睛连续观察判断手相对于书的位置,并将这个信息送入大脑(称为位置反馈信息),然后由大脑判断手与书之间的距离,产生偏差信号,并根据其大小发出控制手臂移动的命令(称控制作用或操纵量),逐渐使手与书之间的距离(即偏差)减小。只要这个偏差存在,上述过程就要反复进行,直到偏差减小为零,手便取到了书。可以看出,大脑控制手取书的过程,是一个利用偏差(手与书之间的距离)产生控制作用,并不断使偏差减小直至消除的运动过程。显然,反馈控制实质上是一个按偏差进行控制的过程,因此,它也称为按偏差的控制,反馈控制原理就是按偏差控制的原理。

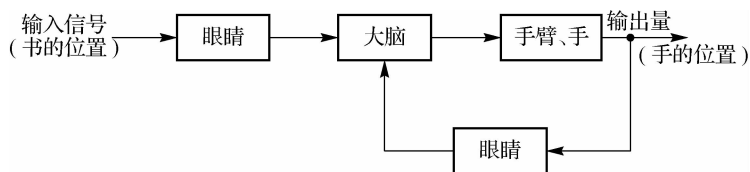


图 0-4 人取书的反馈控制系统方框图

通常,我们把取出的输出量送回到输入端,并与输入信号相比较产生偏差信号的过程,称为反馈。若反馈的信号是与输入信号相减,使产生的偏差越来越小,则称为负反馈;反之,则称为正反馈。反馈控制就是采用负反馈并利用偏差进行控制的过程,而且,由于引入了被控量的反馈信息,整个控制过程成为闭合的,因此反馈控制也称闭环控制。其特点是不论什么原因使被控量偏离期望值而出现偏差时,必定会产生一个相应的控制作用去减小或消除这个偏差,使被控量与期望值趋于一致。可以说,按反馈控制方式组

成的反馈控制系统,具有抑制任何内、外扰动对被控量产生影响的能力,有较高的控制精度。但这种系统使用的元件多,线路复杂,特别是系统的性能分析和设计也比较麻烦。尽管如此,它仍是一种重要的并被广泛应用的控制方式,自动控制理论主要的研究对象就是用这种控制方式组成的系统。

采用反馈控制方式的一个例子是函数记录仪。函数记录仪是一种通用的自动记录仪,它可以在直角坐标上自动描绘两个电量的函数关系;同时,记录仪还带有走纸机构,用以描绘某个电量与时间的函数关系。

函数记录仪通常由测量元件、变换器、放大器、伺服电动机-测速发电机机组、齿轮系及绳轮等组成,采用负反馈控制原理工作,其原理示意图如图 0-5 所示。系统的输入是待记录电压,被控对象是记录笔,其位移即为被控量。系统的任务是控制记录笔的位移,在记录纸上描绘出待记录的电压曲线。

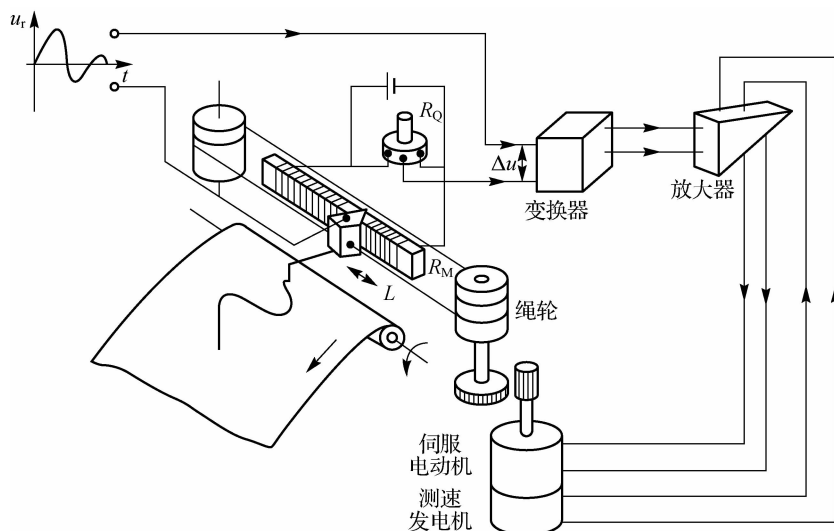


图 0-5 函数记录仪原理示意图

在图 0-5 中,测量元件是由电位器  $R_Q$  和  $R_M$  组成的桥式测量电路,记录笔就固定在电位器  $R_M$  的滑臂上,因此,测量电路的输出电压  $u_p$  与记录笔的位移成正比。当有变化的输入电压  $u_r$  时,在放大元件输入口得到偏差电压 ( $\Delta u = u_r - u_p$ ),经放大后驱动伺服电动机,并通过齿轮系及绳轮带动记录笔移动,同时使偏差电压减小。当偏差电压  $\Delta u = 0$  时,电动机停止转动,记录笔也静止不动。此时  $u_p = u_r$ ,表明记录笔位移与输入电压相对应。如果输入电压随时间连续变化,记录笔便描绘出随时间连续变化的曲线。函数记录仪的结构框图如图 0-6 所示,图中测速发电机反馈的信号是与电动机速度成正比的电压,用以增加阻尼,改善系统性能。



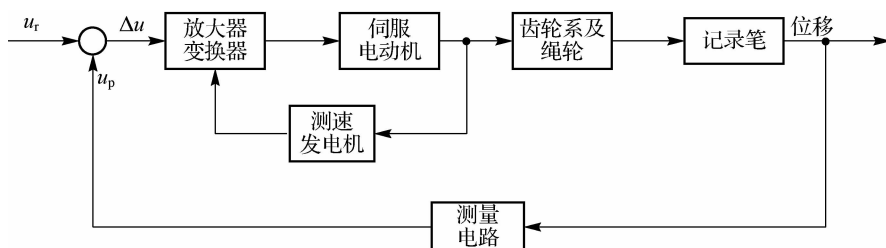


图 0-6 函数记录仪的结构框图

## 2. 开环控制方式

开环控制方式是指控制装置与被控对象之间只有顺向作用而没有反向联系的控制过程,按这种方式组成的系统称为开环控制系统,其特点是系统的输出量不会对系统的控制作用产生影响。开环控制系统可以按给定量控制方式组成,也可以按扰动控制方式组成。

按给定量控制的开环控制系统,其控制作用直接由系统的输入量产生,给定一个输入量,就有一个输出量与之对应,控制精度完全取决于所用的元件及校准的精度。因此,这种开环控制方式没有自动修正偏差的能力,抗扰动性较差;但由于其结构简单,调整方便,成本低,在控制精度要求不高或扰动影响较小的情况下,这种控制方式还有一定的实用价值。目前,用于国民经济各部门的一些自动化装置,如自动售货机、自动洗衣机、产品生产自动线、数控车床及指挥交通的红绿灯的转换系统等,一般都是开环控制系统。

按扰动控制的开环控制系统是利用可测量的扰动量,产生一种补偿作用,以减小或抵消扰动对输出量的影响,这种控制方式也称顺馈控制或前馈控制。例如,在一般的直流速度控制系统中,转速常常随负载的增加而下降,且其转速的下降与电枢电流的变化有一定的关系。如果我们设法将负载引起的电流变化测量出来,并按其大小产生一个附加的控制作用,用以补偿由它引起的转速下降,就可以构成按扰动控制的开环控制系统。这种按扰动控制的开环控制方式是直接从扰动取得信息,并以此来改变被控量,其抗扰动性好,控制精度也较高,但它只适用于扰动是可测量的场合。

## 3. 复合控制方式

反馈控制在外扰动影响出现之后才能进行修正工作,在外扰动影响出现之前则不能进行修正工作。按扰动控制方式在技术上比按偏差控制方式简单,但它只适用于扰动是可测量的场合,而且一个补偿装置只能补偿一个扰动因素,对其余扰动均不起补偿作用。因此,比较合理的一种控制方式是按控制量控制与按扰动控制结合起来,对于主要扰动采用适当的补偿装置实现按扰动控制;同时,再组成反馈控制系统实现按偏差控制,以消除其余扰动产生的偏差。这样,系统的主要扰动已被补偿,反馈控制系统就比较容易设计,控制效果也会更好。这种按偏差控制和按扰动控制相结合的控制方式称为复合控制方式。

## 0.3.2 自动控制系统的分类

自动控制系统的类型很多,它们的结构和所完成的任务也各不相同。

### 1. 按数学模型分

自动控制系统按数学模型可分为线性控制系统和非线性控制系统。

(1)线性控制系统。组成控制系统的元件都具有线性特性。这种系统的输入与输出的关系是线性的,一般可以用微分(差分)方程、传递函数、状态方程来描述其运动过程。线性系统的主要特点是满足叠加原理。

(2)非线性控制系统。只要系统中含有一个具有非线性特性的元件,系统不能用线性微分方程来描述,则称该系统为非线性控制系统。非线性系统一般不具备叠加性。

### 2. 按时间概念分

自动控制系统按时间概念可分为定常系统和时变系统。

(1)定常系统。控制系统中所有的参数都不随时间而变化,这样的系统的输入输出关系可以用常系数的数学模型描述;若为线性系统,则称为线性定常系统。

(2)时变系统。控制系统中的参数随时间的变化而变化。

实际中遇到的系统多少都带有一些非线性和时变性,但多数都可以在一定条件下合理地近似按线性定常系统处理。在经典控制论中研究的对象主要是单输入单输出的线性定常控制系统。

### 3. 按信号的性质分

自动控制系统按信号的性质可分为连续系统和离散系统。

(1)连续系统。系统中各个参量的变化都是连续进行的,即系统中各处信号均为时间的连续函数。

(2)离散系统。控制系统的给定量、反馈量、偏差量都是数字量,数值上不连续,时间上也是离散的。这种系统一般有采样控制系统和数字控制系统两种,其测量、放大、比较、给定等信号处理均由微处理机实现,主要特征是系统中含有采样开关或 D/A、A/D 转换装置。现在这种系统已随着微处理机的发展而日益增多。

连续系统中处理的变量为模拟量,如工业过程中出现的压力、流量、温度、位移等。离散系统中处理的变量为开关量或数字量,如计算机内部处理的变量。在现代的控制形式中,多以计算机控制为主,即以计算机作为控制器,控制模拟量。

### 4. 按给定量的运动规律分

自动控制系统按给定量的运动规律可分为恒值调节系统、程序控制系统和随动系统。

(1)恒值调节系统。这类系统的输入是不随时间而变化的常数。当系统在扰动作用下,被控量偏离要求值时,主要的控制任务是克服各种扰动的影响,使被控量始终与给定输入要求值保持一致。如稳压电源,恒温系统,压力、流量等过程控制系统等。对于这类

系统,分析重点在于克服扰动对输出量的影响。

(2)程序控制系统。当系统输入量为已知给定的时间函数时,称为程序控制系统。这种系统控制的主要目的是保证被控制量能够按给定的时间函数变化。如热处理的升温过程,根据材料特性的要求,温度的升高必须按要求的时间函数进行;汽轮机启动时的升速过程等均须按时间函数进行。近年来,由于微处理机的发展,大量的数字程序控制系统投入了运行。

(3)随动系统。这种系统的给定量是时间的未知函数,即给定量的变化规律事先无法确定,要求输出量能够准确、快速地复现给定量,这样的系统称为随动系统,也称伺服系统,如火炮自动瞄准飞机的系统、液压仿形刀架随动系统等。

除此以外,自动控制系统还可按系统参数特征分为集中参数系统和分布参数系统,按系统组成元件的物理性质可分为电气控制系统、液压控制系统,按系统的被控量可分为液位控制系统、转速控制系统和流量控制系统等。

## 0.4 对控制系统的基本要求

尽管机电控制系统有不同的类型,而且每个系统也都有不同的特殊要求,但对于各类系统来说,在已知系统的结构和参数时,我们感兴趣的都是系统在某种典型输入信号下,其被控量变化的全过程。例如,对恒值控制系统是研究扰动作用引起被控量变化的全过程;对随动系统是研究被控量如何克服扰动影响并跟随参据量的变化过程。但对每一类系统中被控量变化全过程提出的基本要求都是一样的,且可以归结为稳定性、准确性和快速性,即稳、准、快的要求。

稳定性是保证控制系统正常工作的先决条件。一个稳定的控制系统,其被控量偏离期望值的初始偏差应随时间的增长逐渐减小或趋于零。具体来说,对于稳定的恒值控制系统,被控量因扰动而偏离期望值后,经过一个过渡过程的时间,被控量应恢复到原来的期望值状态;对于稳定的随动系统,被控量应能始终跟踪参据量的变化。反之,不稳定的控制系统,其被控量偏离期望值的初始偏差将随时间的增长而发散,因此,不稳定的控制系统无法实现预定的控制任务。

线性自动控制系统的稳定性是由系统结构所决定的,与外界因素无关。这是因为控制系统中一般含有储能元件或惯性元件,如绕组的电感、电枢转动惯量、电炉热容量、物体质量等,储能元件的能量不可能突变。因此,当系统受到扰动或有输入量时,控制过程不会立即发生,而是有一定的延缓,这就使得被控量恢复期望值或跟踪参据量有一个时间过程,称为过渡过程。例如,在反馈控制系统中,由于被控对象的惯性,会使控制动作不能及时纠正被控量的偏差,控制装置的惯性则会使偏差信号不能及时转化为控制动作。具体来说,在控制过程中,当被控量已经回到期望值而使偏差为零时,执行机构本应立即停止工作,但由于控制装置的惯性,控制动作仍继续向原来方向进行,致使被控量超过期望值又产生符号相反的偏差,导致执行机构向相反方向动作,以减小这个新的偏差;另外,当控制动作已经到位时,又由于被控对象的惯性,偏差并未减小为零,因而执行机

构继续向原来方向进行,使被控量又产生符号相反的偏差,如此反复进行,致使被控量在期望值附近来回摆动,过渡过程呈现振荡形式。如果这个振荡过程是逐渐减弱的,系统最终可以达到平衡状态,控制目的得以实现,称为稳定系统;反之,如果振荡过程逐步增强,系统被控量将失控,则称为不稳定系统。

为了很好地完成控制任务,控制系统仅仅满足稳定性要求是不够的,还必须对其过渡过程的形式和快慢提出要求。例如,对用于高射炮的射角随动系统,虽然炮身最终能跟踪目标,但如果目标变动迅速,而炮身跟踪目标所需过渡过程时间较长,就不可能击中目标;对自动驾驶仪系统,当飞机受阵风扰动而偏离预定的航线时,具有自动使飞机恢复预定航线的的能力,但在恢复过程中,如果机身摇晃幅度过大,或恢复速度过快,就会使乘客感到不适。又如,函数记录仪记录输入电压时,如果记录笔移动很慢或摆动幅度过大,不仅使记录曲线失真,而且会损坏记录笔,或使电气元件承受过大电压。因此,对控制系统过渡过程的时间(即快速性)和最大振荡幅度(即超调量)一般都有具体要求。

综上所述,对控制系统的基本要求是在稳定的前提下,系统要稳、准、快。由于受控对象的具体情况不同,各种系统对稳、准、快的要求各有侧重。例如,随动系统对快速性要求较高,而调速系统则对稳定性提出较严格的要求。同一系统的稳、准、快是相互制约的。快速性好,可能会有强烈振荡;改善稳定性,控制过程可能又过于迟缓,精度也可能变坏。分析和解决这些矛盾,也是本课程讨论的重要内容。对于机械动力学系统的要求,首要的也是稳定性,因为过大的振荡将会使部件过载而损坏,此外还要降低噪声、增加刚度等,这些都是控制理论研究的主要问题。

理想情况下,当过渡过程结束后,被控量达到的稳态值(即平衡状态)应与期望值一致。但实际上,由于系统结构、外作用形式及摩擦、间隙等非线性因素的影响,被控量的稳态值与期望值之间会有误差存在,称为稳态误差。稳态误差是衡量控制系统控制精度的重要指标,在技术指标中一般都有具体要求。

基本指标以能满足用户的使用要求为度,以能加工制造出合格的工件为标准,而不是越高越好,因为有时基本指标的提高将导致投资的增加。

## 0.5 自动控制理论的发展

以“三论”(系统论、信息论、控制论)为代表的科学方法论,是一门新兴的学科。它的崛起,为人类认识世界和改造世界提供了新的有力武器。作为“三论”之一的控制论中的控制的概念,人们并不陌生。控制活动是一种普遍现象,自人类文明伊始,人类就有控制的尝试。“人猿相揖别,只几个石头磨过,小儿时节”。人是控制者,工具(石刀)是被控制对象。控制就是反映人和工具关系的一个概念,控制工程是一门研究控制论在工程中应用的科学。控制工程基础主要阐述自动控制技术的基础理论及其分析问题与解决问题的基本方法。

控制论的产生有其自身的理论基础和实践基础。中国古代的指南车、风磨漏斗、木牛流马、地动仪、水运仪象台等,18世纪英国的蒸汽机的调节器,19世纪以来出现的以电

信号为主的控制系统(如数控机床)等,都是人类生产过程中自动控制的实践明证。控制理论随着生产的机械化及电气技术的发展得到丰富与不断完善。第二次世界大战期间,控制论创始人维纳(N. Wiener)在对火炮自动控制的研究中发现了极为重要的反馈(feedback)概念,他总结了包括生理学、信息论等诸多学科在内的前人成果,于1948年发表了著名的《控制论——关于在动物和机器中控制和通信的科学》一文,奠定了控制论这门科学的基础。维纳发现,机器系统、生命系统甚至社会经济系统都有一个共同的特点,即通过信息的传递、加工处理和反馈来进行控制,亦即具备了控制论的信息、反馈与控制3个要素,这就是控制论的中心思想。在控制论建立后的不长时间,其中心思想便迅速渗透到其他许多学科领域,大大推动了近代科学技术的发展,并派生出许多新的边缘学科。1954年,中国学者钱学森运用控制论的思想和方法,首创了“工程控制论”,把控制论推广到其他领域。此后出现了生物控制论——运用控制论研究生命系统的控制与信息处理,经济控制论——运用控制论研究经济运行与发展问题,社会控制论——运用控制论研究社会管理与社会服务问题等。

随着科技进步,特别是计算机科学技术的发展,控制论无论是在三要素的内涵上,还是在其深度与广度上,均处于动态发展状态,对促进社会生产的发展与社会进步产生着深远的影响,就其发展过程,大体可分为三个阶段。

第一阶段:20世纪40~50年代为经典控制论发展时期。经典控制论的内容是以传递函数为基础,主要研究单输入、单输出控制系统的分析和设计问题,实现的是单机、局部的自动化。如自动调节器、伺服系统等。对线性定常系统,这种方法是成熟而有效的。

第二阶段:20世纪60~70年代为现代控制论发展时期。这期间随着计算机技术的发展和空间技术的进步,产生了把经典控制论中的高阶常微分方程转化为一阶微分方程组来描述系统的方法,即所谓状态空间法。这种方法可以解决多输入、多输出问题,实现的是多变量控制、最优控制,可以考虑多种变化因素,对非线性、时变系统也同样有效,如航天系统、导弹系统等。

第三阶段:20世纪70年代末至今,控制论向着“大系统理论”和“智能控制论”发展。“大系统理论”是用控制和信息的观点研究大系统的结构方案、总体设计中的分析方法和协调问题,“智能控制论”是研究与模拟人类活动的机理。可实现规模庞大、结构复杂、变量参数多、多目标控制系统的控制,如智能机器人技术、生物系统、社会系统等。

回顾控制论的发展历程,它是与计算机技术、现代应用数学的发展息息相关的。它反映了人类社会由机械化步入电气化,继而走向自动化、信息化和智能化的时代特征。控制论的基本概念和研究方法是人类认识史上的一个飞跃,开辟了认识世界的新途径。从控制论的发展中可以看出,经典控制论是基础,现代控制论、智能控制论等都是在此基础上发展起来的。本书将主要介绍经典控制理论。

## 0.6 控制工程实践

### 0.6.1 电压调节系统

电压调节系统的工作原理如图 0-7 所示。系统在运行过程中,不论负载如何变化,要求发电机能够提供由给定电位器设定的规定电压值。在负载恒定,发电机输出规定电压的情况下,偏差电压  $\Delta u = u_r - u = 0$ ,放大器输出为零,电动机不动,励磁电位器的滑臂保持原来的位置上,发电机的励磁电流不变,发电机在原动机带动下维持恒定的输出电压。当负载增加使发电机输出电压低于规定电压时,输出电压在反馈口与给定电压经比较后所得的偏差电压  $\Delta u = u_r - u > 0$ ,放大器输出电压  $u_1$  便驱动电动机带动励磁电位器的滑臂顺时针旋转,使励磁电流增加,发电机输出电压  $u$  上升。直到  $u$  达到规定电压  $u_r$  时,电动机停止转动,发电机在新的平衡状态下运行,输出满足要求的电压。

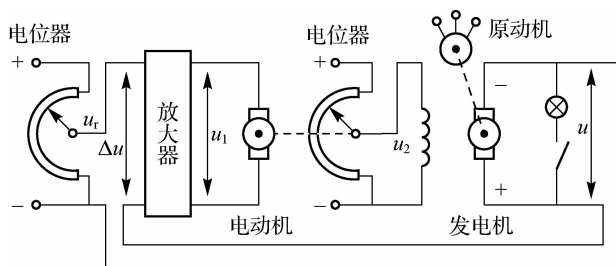


图 0-7 电压调节系统的工作原理

系统中,发电机是被控对象,发电机的输出电压是被控量,给定量是给定电位器设定的电压  $u_r$ 。电压调节系统方框图如图 0-8 所示。

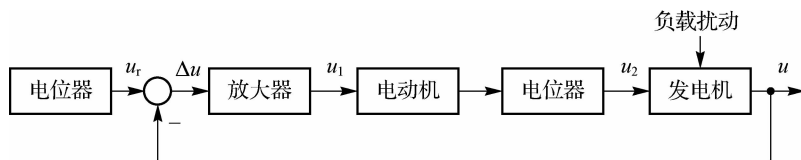


图 0-8 电压调节系统方框图

### 0.6.2 火炮方位角控制系统

采用自整角机作为角度测量元件的火炮方位角控制系统如图 0-9 所示。图中的自整角机工作在变压器状态,自整角发送机 BD 的转子与输入轴连接,转子绕组通入单相交流电;自整角接收机 BS 的转子则与输出轴(火炮架的方位角轴)相连接。

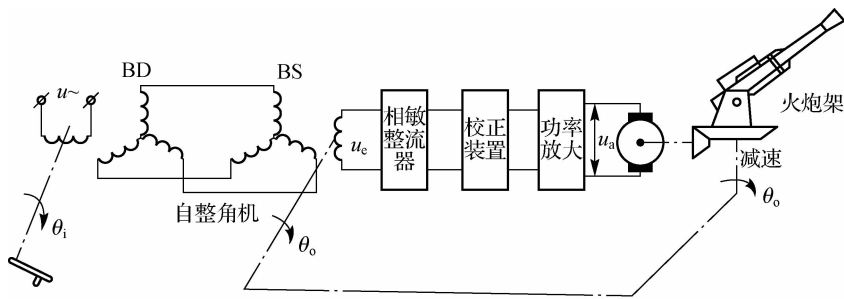


图 0-9 火炮方位角控制系统示意图

当转动瞄准具输入一个角度  $\theta_i$  的瞬间, 由于火炮方位角  $\theta_o \neq \theta_i$ , 会出现角位置偏差  $\theta_e$ 。这时, 自整角接收机 BS 的转子输出一个相应的交流调制信号电压  $u_c$ , 其幅值与  $\theta_e$  的大小成正比, 相位则取决于  $\theta_e$  的极性。当偏差角  $\theta_e > 0$  时, 交流调制信号呈正相位; 当  $\theta_e < 0$  时, 交流调制信号呈反相位。该调制信号经相敏整流器解调后, 变成一个与  $\theta_e$  的大小和极性对应的直流电压, 经校正装置、放大器处理后成为  $u_a$ 。 $u_a$  驱动电动机带动火炮架转动, 同时带动自整角接收机的转子将火炮方位角反馈到输入端。显然, 电动机必须是朝着减小或消除偏差角  $\theta_e$  的方向转动, 直到  $\theta_o = \theta_i$  为止。这样, 火炮就指向手柄给定的方位角。

在该系统中, 火炮是被控对象, 火炮方位角  $\theta_o$  是被控量, 给定量是由手柄给定的方位角  $\theta_i$ 。火炮方位角控制系统方框图如图 0-10 所示。

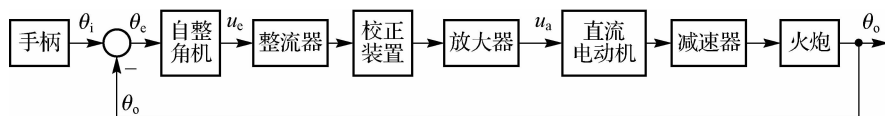


图 0-10 火炮方位角控制系统方框图

### 0.6.3 飞机-自动驾驶仪系统

飞机-自动驾驶仪是一种能保持或改变飞机飞行状态的自动装置。它可以稳定飞机的姿态、高度和航迹, 可以操纵飞机爬高、下滑和转弯。飞机和自动驾驶仪组成的控制系统称为飞机-自动驾驶仪系统。

如同飞行员操纵飞机一样, 自动驾驶仪控制飞机飞行是通过控制飞机的 3 个操纵面(升降舵、方向舵、副翼)的偏转改变舵面的空气动力特性, 以形成围绕飞机质心的旋转力矩, 从而改变飞机的飞行姿态和轨迹。以比例式自动驾驶仪稳定飞机俯仰角的过程为例, 说明其工作原理。图 0-11 所示为飞机-自动驾驶仪系统稳定俯仰角的工作原理。

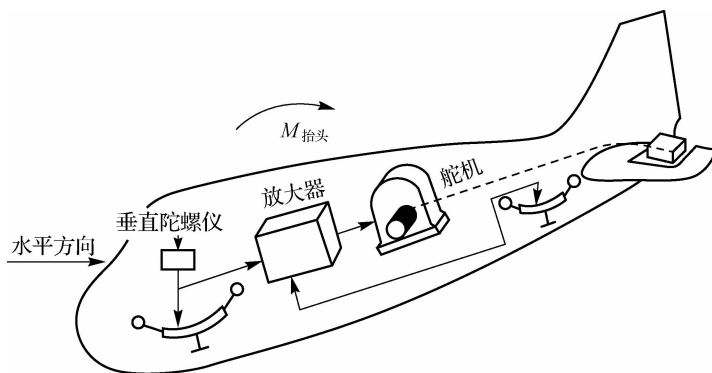


图 0-11 飞机-自动驾驶仪系统稳定俯仰角的工作原理

图 0-11 中,垂直陀螺仪作为测量元件用以测量飞机的俯仰角,当飞机以给定俯仰角水平飞行时,陀螺仪电位计没有电压输出;如果飞机受到扰动,使俯仰角向下偏离期望值,陀螺仪电位计输出与俯仰角偏差成正比的信号,经放大器放大后驱动舵机。一方面推动升降舵面向上偏转,产生使飞机抬头的转矩,以减小俯仰角偏差;另一方面带动反馈电位计滑臂,输出与舵偏角成正比的电压信号并反馈到输入端。随着俯仰角偏差的减小,陀螺仪电位计输出的信号越来越小,舵偏角也随之减小,直到俯仰角回到期望值。这时,舵面也恢复到原来状态。

图 0-12 所示为飞机-自动驾驶仪俯仰角稳定系统方框图。图中,飞机是被控对象,俯仰角是被控量,放大器、舵机、垂直陀螺仪、反馈电位计等组成控制装置,即自动驾驶仪。参考量是给定的常值俯仰角,控制系统的任务就是在任何扰动(如阵风或气流冲击)作用下,始终保持飞机以给定俯仰角飞行。

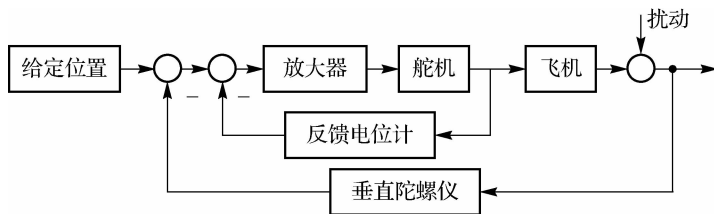


图 0-12 飞机-自动驾驶仪俯仰角稳定系统方框图

## 0.7 本课程的特点与学习方法

本课程是一门专业基础课,以数学、物理及有关电工学科理论为基础,以机械工程中有关系统的动力学为研究对象,运用信息论、系统论和控制论的方法,建立起数理基础与专业课程之间的联系。本课程比较抽象,与理论力学、机械原理、电工电子学等技术基础课相比,概括性更高,涉及的范围更为广泛。读者在学习过程中将会清楚地了解到这一点。



本课程几乎涉及机械工程类专业在学习本课程前所学的全部数学知识,特别是工程数学中的复变函数和积分变换;还要用到所了解过的有关动力学的知识。因此,学习本课程应有良好的数学、力学、电学的基础,有一定的机械工程(包括机械制造)方面的专业知识,还要有一定的其他学科领域的知识。

在学习本课程时,既要重视抽象思维,了解一般规律,又要充分注意与实际相结合,联系专业,努力实践;既要重视理论基础,善于从个性中概括出共性,又要注意工程实践,善于从共性出发,深刻分析了解个性,努力学习用控制论的方法去抽象与解决实际问题的思路。当然,本课程只能为此打下初步的基础。在学习的过程中,要重视实验,重视习题,尤其是要独立完成作业,要重视 MATLAB 的实践,这些都助于对基本概念的理解与基本方法的运用。

控制理论不仅是一门重要的学科,还是一门卓越的方法论。它提出、思考、分析与解决问题的思想方法符合唯物辩证法,符合现代物理学前沿领域中的成就。“他山之石,可以攻玉”。将控制论与机械工程结合起来,运用控制论的理论与方法来考察、提出、分析与解决机械工程中的问题,毕竟还有不完善之处。因此,在学习本课程时,更应该大胆地思考问题,提出问题,研究问题,运用学习中所获得的信息来总结经验,指导学习,不为教材所束缚。

## 习 题

0-1 试列举几个日常生活中的开环和闭环控制系统的例子,并说明其工作原理。

0-2 图 0-13 所示为电动机速度控制系统工作原理图。

(1)将  $a$ 、 $b$  与  $c$ 、 $d$  用线连接成负反馈系统;

(2)画出系统方框图。

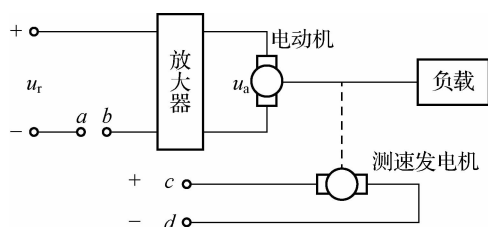


图 0-13 题 0-2 图

0-3 图 0-14 所示为水位控制系统的示意图,图中  $Q_1$  和  $Q_2$  分别为进水流量和出水流量。控制的目的是保持水位为一定的高度。试说明该系统的工作原理并画出其方框图。

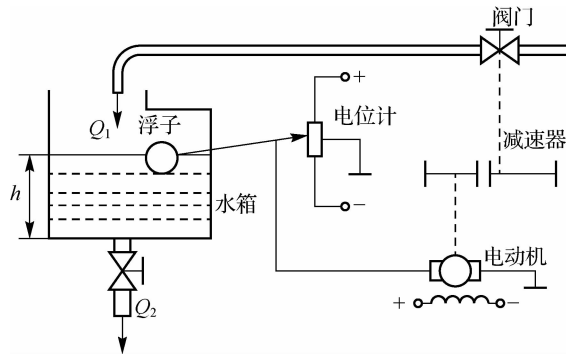


图 0-14 题 0-3 图

0-4 仓库大门自动控制系统如图 0-15 所示,试分析系统的工作原理,绘制系统的方框图,指出各实际元件的功能及输入、输出量。

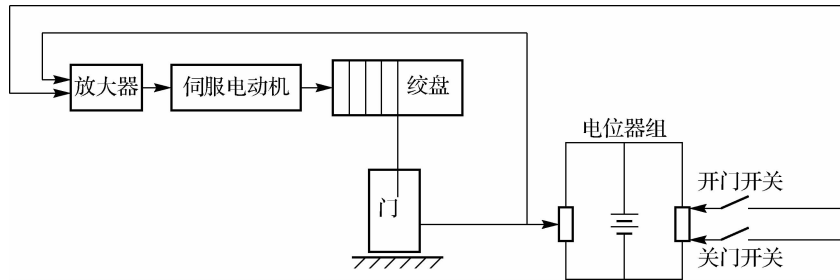


图 0-15 题 0-4 图

# 第 1 章

## 控制系统的数学模型

研究一个自动控制系统,除了对系统进行定性分析外,还必须进行定量分析,进而探讨改善系统稳态和动态性能的具体方法;而分析、研究系统的动态特性,或对系统进行控制,非常重要的一步就是建立系统的运动方程式(即数学模型)。控制系统的数学模型是根据系统的动态特性,即通过决定系统特征的物理学定律,如机械、电气、热力、液压、气动等方面的基本定律而建立的。它代表系统在运动过程中各变量之间的相互关系,既定性又定量地描述了整个系统的动态过程。因此,要分析和研究一个控制系统的动态特性,就必须建立该系统的数学模型。

### 1.1 数学模型的基本概念

模型是在某种相似基础上建立起来的,如航空、航海模型,机械构件的有机玻璃模型,是结构相似、比例缩小的实体模型。在控制工程中为研究系统的动态特性,要建立另外一种模型——数学模型。

数学模型是描述系统输入量、输出量及内部各变量之间关系的数学表达式,它揭示了系统结构及其参数与其性能之间的内在关系。建立数学模型是分析、研究一个动态系统特性的前提,是非常重要的同时也是较困难的工作。一个合理的数学模型应以最简化的形式,准确地描述系统的动态特性。

按照其建立的条件,数学模型可分为两种。一是静态数学模型:静态条件(变量各阶导数为零)下描述变量之间关系的代数方程。它反映了系统处于稳态时,系统状态有关属性变量之间的关系。二是动态数学模型:动态条件(变量各阶导数不为零)下描述变量各阶导数之间关系的微分方程;也可定义为描述实际系统各物理量随时间演化的数学表达式。它反映了动态系统瞬态与过渡态的特性。本章以动态数学模型的研究为主。

系统的数学模型有多种形式,这取决于变量和坐标系统的选择。在时间域,通常采用微分方程或一阶微分方程组(状态方程)的形式;在复数域采用传递函数的形式;而在频率域则采用频率特性的形式。对于线性系统来说,它们之间是等价的。

建立数学模型,一般采用解析法或实验法。所谓解析法建模,就是依据系统及元件各变量之间所遵循的物理或化学规律列写出相应的数学关系式,建立模型;所谓实验法建模,就是人为地对系统施加某种测试信号,记录其输出响应,并用适当的数学模型进行

逼近。这种方法也称为系统辨识。本章仅讨论解析建模方法,关于实验法建模将在后面的章节进行介绍。

必须指出,由于不可能将系统实际的错综复杂的物理现象完全表达出来,因而要对模型的简洁性和精确性进行折中考虑。一般须根据系统的实际结构参数和系统分析所要求的精度,忽略一些次要因素,建立既能反映系统内在本质特性、又能简化分析计算工作的模型。

## 1.2 系统的动态微分方程

工程中的控制系统,不管它是机械的、电气的、液压的、气动的,还是热力的、化学的,其运动规律都可以用动态微分方程加以描述,因此,用解析法建立系统或元件的数学模型就是从列写它们的运动微分方程开始。对这些微分方程求解,就可以获得系统在输入作用下的输出响应。

在建立系统的动态微分方程时,主要应用机械动力学、流体动力学等基础理论,对于一些机、电、液综合系统,除需运用能量守恒定律外,还必须应用电工原理、电子学等方面的基础理论。此外,还须具备相关的专业技术理论,如金属切削原理、液压传动及各种加工工艺原理等。下面通过简单示例来介绍建立微分方程所应用的原理和方法。

**【例 1-1】** 列写图 1-1 所示 RLC 网络的微分方程。

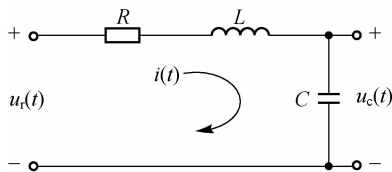


图 1-1 RLC 网络

**解** (1)明确输入量、输出量。网络的输入量为电压  $u_r(t)$ ,输出量为电压  $u_c(t)$ 。

(2)列出原始微分方程式。根据电路理论得

$$u_r(t) = L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) \quad (1-1)$$

而 
$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (1-2)$$

式中,  $i(t)$  为网络电流,是除输入量、输出量之外的中间变量。

(3)消去中间变量。将式(1-2)两边求导,得

$$\frac{du_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$$

即 
$$i(t) = C \frac{du_c(t)}{dt} \quad (1-3)$$

将式(1-3)代入式(1-1),整理得

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t) \quad (1-4)$$

显然,这是一个二阶线性微分方程,也就是图 1-1 所示  $RLC$  无源网络的数学模型。

**【例 1-2】** 试列写图 1-2 所示电枢控制直流电动机的微分方程,电枢电压  $u_a(t)$  为输入量,电动机转速  $\omega_m(t)$  为输出量。图中,  $R_a$ 、 $L_a$  分别是电枢电路的电阻和电感。设  $M_c$  是折合到电动机轴上的总负载转矩,激磁磁通为常值。

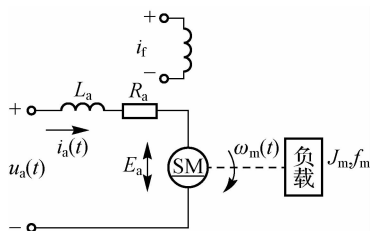


图 1-2 电枢控制直流电动机原理图

**解** 电枢控制直流电动机是控制系统中常用的执行机构或控制对象,其工作实质是将输入的电能转换为机械能,也就是由输入的电枢电压  $u_a(t)$  在电枢回路中产生电枢电流  $i_a(t)$ ,再由电流  $i_a(t)$  与激磁磁通相互作用产生电磁转矩  $M_m(t)$ ,从而拖动负载运动。因此,直流电动机的运动方程可以由以下 3 个部分组成。

(1) 电枢回路电压平衡方程:

$$u_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_a \quad (1-5)$$

式中,  $E_a$  为电枢反电势,它是当电枢旋转时产生的反电势,其大小与激磁磁通及转速成正比,方向与电枢电压  $u_a(t)$  相反。

(2) 电磁转矩方程:

$$M_m(t) = C_m i_a(t) \quad (1-6)$$

式中,  $C_m$  为电动机转矩系数;  $M_m(t)$  为电枢电流产生的电磁转矩。

(3) 电动机轴上的转矩平衡方程:

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f_m \omega_m(t) = M_m(t) - M_c(t) \quad (1-7)$$

式中,  $f_m$  为电动机和负载折合到电动机轴上的黏性摩擦系数;  $J_m$  为电动机和负载折合到电动机轴上的转动惯量。

由式(1-5)、式(1-6)和式(1-7)中消去中间变量  $i_a(t)$ 、 $E_a$  及  $M_m(t)$ ,便可得到以  $\omega_m(t)$  为输出量,以  $u_a(t)$  为输入量的直流电动机微分方程,即

$$\begin{aligned} L_a J_m \frac{d^2 \omega_m(t)}{dt^2} + (L_a f_m + R_a J_m) \frac{d\omega_m(t)}{dt} + (R_a f_m + C_m C_e) \omega_m(t) \\ = C_m u_a(t) - L_a \frac{dM_c(t)}{dt} - R_a M_c(t) \end{aligned} \quad (1-8)$$

在工程应用中,由于电枢电路电感  $L_a$  较小,通常忽略不计,因而式(1-8)可简化为

$$T_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K_1 u_a(t) - K_2 M_c(t) \quad (1-9)$$

## 控制工程基础

式中,  $T_m = \frac{R_a J_m}{R_a f_m + C_m C_e}$  为电动机机电时间常数, s;  $K_1 = \frac{C_m}{R_a f_m + C_m C_e}$ ,  $K_2 = \frac{R_a}{R_a f_m + C_m C_e}$  为电动机传递系数。

如果电枢电阻  $R_a$  和电动机的转动惯量  $J_m$  都很小而忽略不计, 式(1-9)还可进一步简化为

$$C_e \omega_m(t) = u_a(t) \quad (1-10)$$

这时, 电动机的转速  $\omega_m(t)$  与电枢电压  $u_a(t)$  成正比, 于是电动机可作为测速发电机使用。

**【例 1-3】** 图 1-3 所示为一具有弹簧、质量块、阻尼器的机械位移系统。试列写质量块  $m$  在外力  $f(t)$  作用下, 位移  $y(t)$  的运动方程。

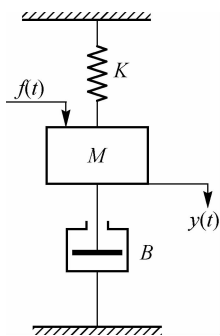


图 1-3 弹簧、质量块、阻尼器的机械位移系统

**解** 设质量块  $m$  相对于初始状态的位移、速度、加速度分别为  $y(t)$ ,  $\frac{dy(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ , 由牛顿运动定律有

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - f_1(t) - f_2(t) \quad (1-11)$$

式中,  $f_1(t) = B \frac{dy(t)}{dt}$  为阻尼器的阻尼力, 其方向与运动方向相反, 其大小与运动速度成正比,  $B$  为阻尼系数;  $f_2(t) = Ky(t)$  为弹簧弹性力, 其方向亦与运动方向相反, 其大小与位移成正比,  $K$  为弹性系数。将  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  代入式(1-11)中, 经整理后即得该系统的微分方程式为

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t) \quad (1-12)$$

**【例 1-4】** 试列写图 1-4 所示速度控制系统的微分方程。

**解** 通过分析图 1-4 可知, 控制系统的被控对象是电动机(带负载), 系统的输出量是转速  $\omega$ , 输入量是  $u_g$ , 控制系统由给定电位器、运算放大器 I (含比较作用)、运算放大器 II (含 RC 校正网络)、功率放大器、测速发电机、减速器等部分组成。现分别列写各元件的微分方程。

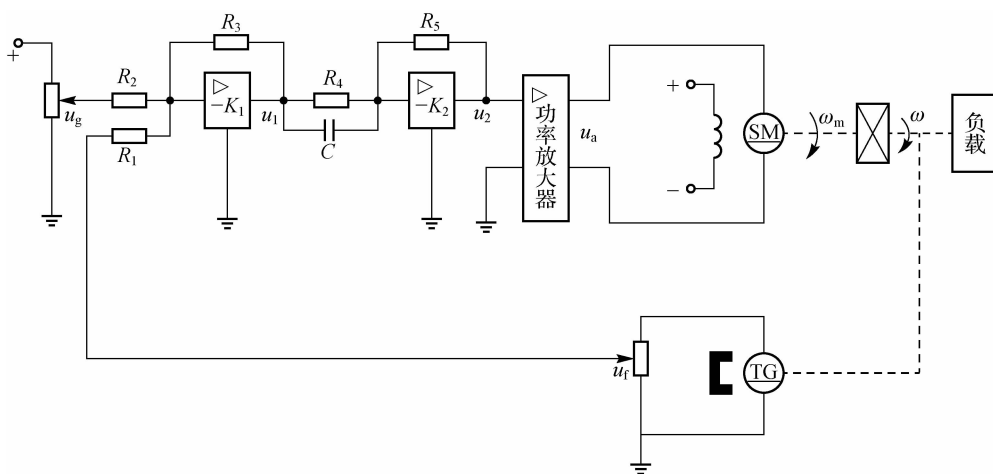


图 1-4 速度控制系统

(1) 运算放大器 I。输入量(即给定电压) $u_g$  与速度反馈电压  $u_f$  在此合成产生偏差电压并经放大,即

$$u_1 = K_1(u_g - u_f) \quad (1-13)$$

式中,  $K_1 = \frac{R_3}{R_2}$  为运算放大器 I 的比例系数。

(2) 运算放大器 II。考虑 RC 校正网络,  $u_2$  与  $u_1$  之间的微分方程为

$$u_2 = K_2 \left( \tau \frac{du_1}{dt} + u_1 \right) \quad (1-14)$$

式中,  $K_2 = \frac{R_5}{R_4}$  为运算放大器 II 的比例系数;  $\tau = R_4 C$  为微分时间常数。

(3) 功率放大器。本系统采用晶闸管整流装置,它包括触发电路和晶闸管主回路。忽略晶闸管控制电路的时间滞后,其输入输出方程为

$$u_a = K_3 u_2 \quad (1-15)$$

式中,  $K_3$  为比例系数。

(4) 测速发电机。测速发电机的输出电压  $u_f$  与其转速  $\omega$  成正比,即有

$$u_f = K_t \omega \quad (1-16)$$

式中,  $K_t$  为测速发电机比例系数,  $V/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$ 。

(5) 减速器(齿轮系)。设齿轮系的转速比为  $i$ , 则电动机转速  $\omega_m$  经齿轮系减速后变为  $\omega$ , 故有

$$\omega = \frac{1}{i} \omega_m \quad (1-17)$$

(6) 直流电动机。直接引用例 1-2 所求得直流电动机的微分方程式(1-9):

$$T'_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + \omega_m(t) = K'_m u_a(t) - K'_c M'_c(t) \quad (1-18)$$

式中,  $T'_m$ 、 $K'_m$ 、 $K'_c$  及  $M'_c$  均为考虑齿轮系和负载后, 折算到电动机轴上的等效值。

从上述各方程中消去中间变量, 经整理后便得到控制系统的微分方程:

$$T'_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = K'_g \frac{du_g}{dt} + K_g u_g - K'_c M'_c(t) \quad (1-19)$$

式中,  $T'_m = \frac{iT_m + K_1 K_2 K_3 K_m K_t \tau}{i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$ ;  $K'_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m \tau}{i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$ ;  $K_g = \frac{K_1 K_2 K_3 K_m}{i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}$ ;

$$K'_c = \frac{K_c}{i + K_1 K_2 K_3 K_m K_t}。$$

综上所述, 动态微分方程的列写步骤可归纳如下:

(1) 确定系统或元件的输入量、输出量。系统的输入量或扰动输入量都是系统的输入量, 而被控量则是输出量。对于一个环节或元件而言, 应该按照系统信号的传递情况来确定输入量和输出量。

(2) 按照信号的传递顺序, 从系统的输入端开始, 依据各变量所遵循的运动规律(如电路中的基尔霍夫定律, 力学中的牛顿定律, 热力系统中的热力学定律及能量守恒定律等), 列写出在运动过程中的各个环节的动态微分方程。列写时可按工作条件, 忽略一些次要因素, 并须考虑相邻元件之间是否存在负载效应。

(3) 消去所列各微分方程的中间变量, 从而得到描述系统输入量、输出量的微分方程。

比较式(1-4)、式(1-9)、式(1-12)和式(1-19)后发现, 虽然它们所代表的系统的类别、结构完全不同, 但表征其运动特征的微分方程式却是相似的。从这里也可以看出, 尽管环节(或系统)的物理性质不同, 但它们的数学模型却可以是相似的。这就是系统的相似性, 利用这个性质, 就可以用那些数学模型容易建立、参数调节方便的系统作为模型, 代替实际系统从事实验研究。

### 1.3 拉普拉斯变换与拉普拉斯反变换

拉普拉斯变换简称拉氏变换, 是常用的积分变换之一。控制工程所涉及的数学问题较多, 经常要解算一些线性微分方程。按照一般方法解算比较麻烦, 如果用拉氏变换求解线性微分方程, 可将经典数学中的微积分运算转化为代数运算, 又能够单独地表明初始条件的影响, 并有变换表可查找, 因而是一种较为简便的工程数学方法。更重要的是, 通过采用拉氏变换, 可把描述系统运动状态的微分方程很方便地转换为系统的传递函数, 并由此发展出用传递函数的零极点分布、频率特性等间接地分析和设计控制系统的工程方法。本节从复数与复变函数的概念入手, 着重介绍拉氏变换的定义、一些典型时间函数的拉氏变换、拉氏变换的性质及拉氏反变换的方法; 最后介绍用拉氏变换解微分方程的方法。在学习中应注重该数学方法的应用, 为后续章节的学习奠定基础。



### 1.3.1 复数与复变函数

#### 1. 复数的定义

设  $\sigma$  和  $\omega$  是两个任意实数, 则  $\sigma + j\omega$  称为复数, 记为

$$s = \sigma + j\omega \quad (1-20)$$

其中,  $\sigma$  和  $\omega$  分别称为复数  $s$  的实部和虚部, 记为  $\sigma = \operatorname{Re}(s)$ ,  $\omega = \operatorname{Im}(s)$ ;  $j = \sqrt{-1}$  为虚数单位。对于一个复数, 只有当实部和虚部均为零时, 该复数才为零; 对于两个复数而言, 只有当实部和虚部分别相等时, 两复数才相等。 $\sigma + j\omega$  和  $\sigma - j\omega$  称为共轭复数。

**注意:** 实数可以比较大小, 而复数不能比较大小, 这是复数与实数一个重要的不同。

#### 2. 复数的表示方法

(1) 平面向量表示法。复数  $s = \sigma + j\omega$  可以用从原点指向点  $(\sigma, \omega)$  的向量来表示, 如图 1-5 所示, 向量的长度称为复数  $s = \sigma + j\omega$  的模, 即

$$|s| = r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \quad (1-21)$$

向量与  $\sigma$  轴的夹角  $\theta$  称为复数  $s$  的辐角, 即

$$\theta = \arctan(\omega/\sigma) \quad (1-22)$$

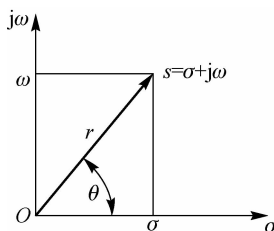


图 1-5 复数的向量表示

(2) 三角表示法。由图 1-5 可知

$$\sigma = r \cos \theta, \omega = r \sin \theta$$

因此, 复数的三角表示法为

$$s = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (1-23)$$

(3) 指数表示法。由欧拉公式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

可将式(1-23)写成

$$s = r e^{j\theta} \quad (1-24)$$

式(1-23)和式(1-24)分别称为复数的三角形式和指数形式, 则式(1-20)称为复数的代数形式, 这三种形式可相互转换。

#### 3. 复变函数

以复数  $s = \sigma + j\omega$  为自变量, 并按某种确定规则构成的函数  $G(s)$  称为复变函数。复变函数  $G(s)$  可写成

$$G(s) = u + jv \quad (s \in E) \quad (1-25)$$

其中,  $u$  和  $v$  分别称为复变函数的实部和虚部, 点集  $E$  称为函数的定义域, 相应的  $G(s)$  取值的全体称为函数的值域。若  $E$  内的每一个点  $s$  对应唯一的函数值  $G(s)$ , 则称函数  $G(s)$  为单值函数。在线性控制系统中, 通常遇到的复变函数  $G(s)$  都是  $s$  的单值函数。

**【例 1-5】** 设复变函数  $G(s) = s^2 + 1$ , 当  $s = \sigma + j\omega$  时, 求其实部  $u$  和虚部  $v$ 。

解  $G(s) = s^2 + 1 = (\sigma + j\omega)^2 + 1 = \sigma^2 - \omega^2 + 1 + j2\sigma\omega$

所以  $u = \sigma^2 - \omega^2 + 1, v = 2\sigma\omega$

### 1.3.2 拉氏变换

#### 1. 拉氏变换的定义

若  $f(t)$  为实变量时间  $t$  的函数, 且  $t < 0$  时, 函数  $f(t) = 0$ , 则函数  $f(t)$  的拉氏变换记作  $L[f(t)]$  或  $F(s)$ , 并定义为

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1-26)$$

式中,  $s = \sigma + j\omega$  为复变量,  $F(s)$  称为  $f(t)$  的象函数, 称  $f(t)$  为  $F(s)$  的原函数。原函数是实变量  $t$  的函数, 象函数是复变量  $s$  的函数, 所以拉氏变换是将原来的实变量函数  $f(t)$  转化为复变量函数  $F(s)$  的一种积分运算。在本书中, 将用大写字母表示相对应的小写字母所代表的函数的拉氏变换。

#### 2. 典型时间函数的拉氏变换

(1) 单位阶跃函数。单位阶跃函数如图 1-6 所示。其定义为

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

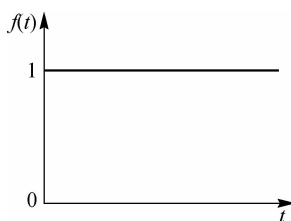


图 1-6 单位阶跃函数

由式(1-26)可得

$$L[1(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (1-27)$$

在自动控制系统中, 单位阶跃函数相当于一个实加作用信号, 如开关的闭合(或断开)、加(减)负载等。

(2) 单位脉冲函数。单位脉冲函数如图 1-7 所示, 其定义为

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & (t=0) \\ 0 & (t \neq 0) \end{cases}$$

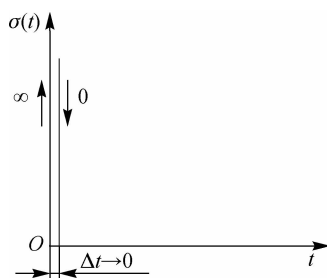


图 1-7 单位脉冲函数

同时,  $\int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$ , 即脉冲面积为 1。而且有如下特性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0)$$

$f(0)$  为  $f(t)$  在  $t=0$  时刻的函数值。

$\delta(t)$  的拉氏变换为

$$L[\delta(t)] = \int_0^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad (1-28)$$

(3) 单位斜坡函数。单位斜坡函数如图 1-8 所示, 其定义为

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ t & (t \geq 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L[t] &= \int_0^{+\infty} t \cdot e^{-st} dt = -t \frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{e^{-st}}{s}\right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} dt = -\frac{1}{s^2} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s^2} \end{aligned} \quad (1-29)$$

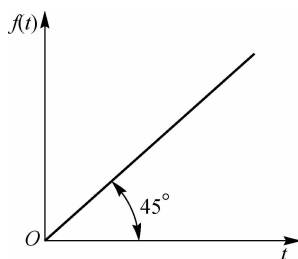


图 1-8 单位斜坡函数

(4) 指数函数。指数函数  $e^{at}$  的拉氏变换为

$$L[e^{at}] = \int_0^{+\infty} e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = \frac{1}{s-a} \quad (1-30)$$

同理

$$L[e^{-at}] = \frac{1}{s+a} \quad (1-31)$$

(5) 正弦函数  $\sin \omega t$ 。由欧拉公式

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

可得

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \int_0^{+\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_0^{+\infty} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (1-32)$$

(6) 余弦函数  $\cos \omega t$ 。由欧拉公式

$$\cos \omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

可得

$$\begin{aligned} L[\cos \omega t] &= \int_0^{+\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (1-33)$$

(7) 幂函数  $t^n$ 。幂函数的拉氏变换为

$$L[t^n] = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-st} dt$$

令  $u=st$ , 则  $t=\frac{u}{s}$ ,  $dt=\frac{1}{s}du$ , 有

$$L[t^n] = \int_0^{+\infty} t^n \cdot e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{s^n} \cdot e^{-u} \cdot \frac{1}{s} du = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{+\infty} u^n \cdot e^{-u} du$$

式中,  $\int_0^{+\infty} u^n e^{-u} du = \Gamma(n+1)$  为  $\Gamma$  函数, 而

$$\Gamma(n+1) = n!$$

故

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (1-34)$$

上面求取了几个简单函数的拉氏变换式, 用类似的方法可求出其他时间函数的拉氏变换式。实际上, 常把原函数与象函数之间的对应关系列成对照表的形式。通过查表, 就能够知道原函数的象函数或象函数的原函数。常用函数的拉氏变换对照见表 1-1。

表 1-1 常用函数的拉氏变换对照

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
5	$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
8	$t^n (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
9	$t^n e^{-at} (n=1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
11	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
12	$\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt}) \right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2}(e^{-at} + at - 1)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t)$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ ( $0 < \xi < 1$ )

续表

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
17	$\frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \varphi)$ $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$ $(0 < \xi < 1)$
18	$1 - \frac{-1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t - \varphi)$ $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$ $(0 < \xi < 1)$

### 3. 拉氏变换的性质

根据拉氏变换定义或查表能对一些标准的函数进行拉氏变换和拉氏反变换,但利用以下的定理,则对一般的函数可以使运算简化。

(1) 线性定理。

拉氏变换是一个线性变换,若有常数  $K_1, K_2$  和函数  $f_1(t), f_2(t)$ , 则

$$L[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 L[f_1(t)] + K_2 L[f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s) \quad (1-35)$$

式(1-35)可由拉氏变换的定义式直接得证。

线性定理表明,时间函数和的拉氏变换等于每个时间函数拉氏变换之和;原函数乘以常数  $K$  的拉氏变换等于原函数拉氏变换的  $K$  倍。

**【例 1-6】** 已知  $f(t) = 1 - 2\cos \omega t$ , 求  $F(s)$ 。

解  $F(s) = L[f(t)] = L[1 - 2\cos \omega t] = L[1] - L[2\cos \omega t]$

$$= \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + \omega^2} = \frac{-s^2 + \omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$$

(2) 实数域的位移定理(延时定理)。

若有一函数  $f_1(t)$  相当于  $f(t)$  从坐标轴右移一段时间  $\tau$ , 即  $f_1(t) = f(t - \tau)$ , 则称函数  $f_1(t)$  为  $f(t)$  的延迟函数, 如图 1-9 所示。那么,  $f_1(t)$  和  $f(t)$  的象函数之间具有下列关系:

$$L[f_1(t)] = L[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (1-36)$$

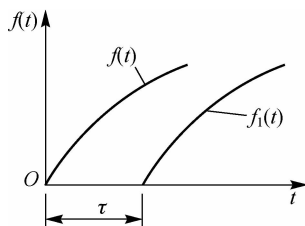


图 1-9 延迟函数

证明

$$L[f(t - \tau)] = \int_0^{+\infty} f(t - \tau) e^{-st} dt$$

令  $u=t-\tau$ , 则  $t=u+\tau, dt=du$ 。

代入上式有

$$\begin{aligned} L[f(t-\tau)] &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+\tau)} du \\ &= e^{-s\tau} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\ &= e^{-s\tau} F(s) \end{aligned}$$

可见,比  $f(t)$  延迟  $\tau$  的  $f_1(t)$  的象函数只要把  $f(t)$  的象函数  $F(s)$  乘以  $e^{-s\tau}$  即可求得。

**【例 1-7】** 求图 1-10 所示方波的拉氏变换。

**解** 方波可表达为

$$f(t) = \frac{1}{T} \cdot 1(t) - \frac{1}{T} \cdot 1(t-T)$$

则方波的拉氏变换为

$$L[f(t)] = \frac{1}{Ts} - \frac{1}{Ts} e^{-sT} = \frac{1}{Ts} (1 - e^{-sT})$$

(3) 复数域的位移定理(平移定理)。

若  $L[f(t)] = F(s)$ , 则对任意常数  $a$ , 有

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (1-37)$$

**证明** 由定义出发:

$$\begin{aligned} L[e^{-at} f(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t) \cdot e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-(s+a)t} dt \\ &= F(s+a) \end{aligned}$$

可见,原函数  $f(t)$  乘以  $e^{-at}$  时,它的象函数只需将  $F(s)$  中的  $s$  用  $(s+a)$  代替即可。

**【例 1-8】** 求  $e^{-at} \sin \omega t$  的拉氏变换。

**解** 直接运用复数域的位移定理可得

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

同理,可求得

$$L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cdot t^n] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(4) 相似定理。

若  $L[f(t)] = F(s)$ , 如将  $f(t)$  的波形相对于时间轴  $t$  进行压缩(或伸长)  $a$  倍, 成为

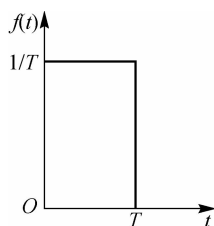


图 1-10 方波

$f(\frac{t}{a})$ , 则有

$$L[f(\frac{t}{a})] = aF(as) \quad (1-38)$$

证明

$$L[f(\frac{t}{a})] = \int_0^{+\infty} f(\frac{t}{a}) e^{-st} dt$$

令  $\frac{t}{a} = \tau$ , 则  $t = a\tau, dt = a d\tau$

$$\begin{aligned} L[f(\frac{t}{a})] &= \int_0^{+\infty} f(\frac{t}{a}) e^{-st} dt \\ &= a \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-sa\tau} d\tau \\ &= aF(as) \end{aligned}$$

上式表明, 当原函数  $f(t)$  的自变量  $t$  变化为原来的  $\frac{1}{a}$  时, 则它对应的象函数  $F(s)$  及变量  $s$  按比例变化  $a$  倍。

(5) 原函数导数的象函数(微分定理)。

若  $L[f(t)] = F(s)$ , 则导数  $\frac{d}{dt}f(t)$  的象函数为

$$L[\frac{d}{dt}f(t)] = sF(s) - f(0) \quad (1-39)$$

式中,  $f(0)$  是当  $t=0$  时函数  $f(t)$  的值, 即原函数的初始条件。

证明

$$L[\frac{d}{dt}f(t)] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

利用分部积分公式  $\int u dv = uv - \int v du$ 。

令  $u = e^{-st}, v = f(t)$ , 则有

$$\begin{aligned} L[\frac{d}{dt}f(t)] &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= sF(s) - f(0) \end{aligned}$$

同理可得

$$\left. \begin{aligned} L[\frac{d^2}{dt^2}f(t)] &= s^2 F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0) \\ L[\frac{d^3}{dt^3}f(t)] &= s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf^{(1)}(0) - f^{(2)}(0) \\ L[\frac{d^n}{dt^n}f(t)] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

式中,  $f(0), f^{(1)}(0), f^{(2)}(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$  分别为函数  $f(t)$  及其各阶导数在  $t=0$  时的值。



由式(1-39)和式(1-40)可知,在求导数的拉氏变换中,已引入各个初始条件。如果这些初始条件均为零,则有

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^n F(s) \quad (n=1,2,\dots) \quad (1-41)$$

式(1-41)表明,在初始条件为零的前提下,原函数  $n$  阶导数的拉氏变换就等于其象函数乘以  $s^n$ 。

(6)原函数积分的象函数(积分定理)。

若  $L[f(t)]=F(s)$ ,则  $f(t)$  的积分  $\int f(t)dt$  的象函数为

$$L\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0)}{s} \quad (1-42)$$

式中,  $f^{(-1)}(0)=\int f(t)dt\Big|_{t=0}$ 。

**证明** 
$$L\left[\int f(t)dt\right]=\int_0^{+\infty}\left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt$$

利用分部积分法,取  $u=\int f(t)dt, dv=e^{-s}dt$

则有 
$$du=f(t)dt, v=\frac{e^{-s}}{-s}$$

因此

$$\begin{aligned} L\left[\int f(t)dt\right] &= \int_0^{+\infty}\left[\int f(t)dt\right]e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s}\int f(t)dt\Big|_{t=0}+\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt \\ &= \frac{1}{s}F(s)+\frac{f^{(-1)}(0)}{s} \end{aligned}$$

同理可得  $n$  重积分的拉氏变换为

$$L\left[\dots\int f(t)(dt)^n\right]=\frac{F(s)}{s^n}+\frac{f^{(-1)}(0)}{s^n}+\frac{f^{(-2)}(0)}{s^{n-1}}+\dots+\frac{f^{(-n)}(0)}{s} \quad (1-43)$$

式中,  $f^{(-1)}(0), f^{(-2)}(0), \dots, f^{(-n)}(0)$  分别为  $f(t)$  的各重积分在  $t=0$  的值。若这些积分的初始值均为零,则有

$$\left. \begin{aligned} L\left[\int f(t)dt\right] &= \frac{F(s)}{s} \\ L\left[\int\int f(t)(dt)^2\right] &= \frac{F(s)}{s^2} \\ L\left[\dots\int f(t)(dt)^n\right] &= \frac{F(s)}{s^n} \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

式(1-44)表明,在零初始条件下,原函数的  $n$  重积分的拉氏变换等于其象函数除以  $s^n$ 。

(7)终值定理。

若  $L[f(t)]=F(s)$ ,则原函数  $f(t)$  的终值为

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1-45)$$

**证明** 由式(1-40)可得

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

当  $s \rightarrow 0$  时,  $e^{-st} \rightarrow 1$ , 于是由上式左边得

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] = f(t) \Big|_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0)$$

由右边得

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

因此得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

上式表明,原函数  $f(t)$  在  $t \rightarrow +\infty$  的数值(稳态值),可以通过将象函数  $F(s)$  乘以  $s$  后,再取  $s \rightarrow 0$  的极限来求得。条件是当  $t \rightarrow +\infty$  和  $s \rightarrow 0$  时,等式两边各个极限均存在。

(8)初值定理。

若  $L[f(t)] = F(s)$ , 则原函数  $f(t)$  的初值为

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) \quad (1-46)$$

**证明** 由式(1-40)知

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

当  $s \rightarrow \infty$ , 则  $e^{-st} \rightarrow 0$ , 因此

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[ \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right] = \lim_{s \rightarrow +\infty} [sF(s) - f(0)] = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s) - f(0) = 0$$

即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sF(s)$$

上式表明,原函数  $f(t)$  在  $t=0$  时的数值(初始值),可以通过将象函数  $F(s)$  乘以  $s$  后,再求  $s \rightarrow +\infty$  的极限来求得。条件是在  $t \rightarrow 0$  和  $s \rightarrow +\infty$  时等式两边各有极限存在。

(9)卷积定理。

若  $L[f(t)] = F(s)$ ,  $L[g(t)] = G(s)$ , 则有

$$L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right] = F(s) \cdot G(s) \quad (1-47)$$

式中,积分  $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = f(t) \otimes g(t)$ , 称作  $f(t)$  和  $g(t)$  的卷积。

**证明** 当  $\tau > t$  时,  $f(t-\tau) \cdot 1(t-\tau) = 0$ , 因此有

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} f(t-\tau) \cdot 1(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau$$

$$\text{于是 } L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau\right] = \int_0^{+\infty} [f(t-\tau) \cdot 1(t-\tau)g(\tau) d\tau] e^{-st} dt$$

令  $t-\tau = \lambda$ , 代入上式,又由于  $f(t)$  和  $g(t)$  是可进行拉氏变换的,所以可改变上式的

积分次序,可得

$$\begin{aligned} L\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] &= \int_0^{+\infty} f(\lambda)e^{-s(\lambda+\tau)}d\lambda \cdot \int_0^{+\infty} g(\tau)d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} f(\lambda)e^{-s\lambda}d\lambda \cdot \int_0^{+\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

上式表明,两个时间函数  $f(t)$  和  $g(t)$  卷积的拉氏变换等于两个时间函数拉氏变换的乘积。这个关系式在拉氏反变换中可简化计算。

### 1.3.3 拉氏反变换

#### 1. 拉氏反变换的定义

拉氏反变换是指将象函数  $F(s)$  变换成与其对应的原函数  $f(t)$  的过程。其计算公式为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (1-48)$$

式中,  $L^{-1}$  为拉氏反变换的符号。

根据定义计算拉氏反变换要进行复变函数积分,一般很难直接计算,通常采用部分分式展开法将复变函数展开成有理分式函数之和,然后由拉氏变换表一一查出对应的反变换函数,即得所求的原函数  $f(t)$ 。

#### 2. 部分分式展开法

如果把  $f(t)$  的拉氏变换  $F(s)$  分成若干分量的和,即

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

并且  $F_1(s), F_2(s), \cdots, F_n(s)$  的拉氏反变换很容易由拉氏变换表查得,那么即得

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)] = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_n(t) \quad (1-49)$$

可见,应用叠加原理即可求得原函数  $f(t)$ 。

但是,  $F(s)$  有时比较复杂,当不能很简便地将其分成若干分量之和时,可采用部分分式展开法对  $F(s)$  进行分解。也就是说,部分分式展开法是一种将较复杂的象函数分解成若干简单的很容易从拉氏变换表中查到其原函数的求解方法。

在控制理论中,常遇到的象函数  $F(s)$  具有如下形式:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

式中,  $A(s)$  和  $B(s)$  均为变量  $s$  的多项式,且  $A(s)$  的阶次  $n$  较  $B(s)$  的阶次  $m$  要高,即  $n \geq m$ 。

在应用部分分式展开法求  $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$  的拉氏反变换时,必须预先知道分母多项式  $A(s)$  等于零时的根。换句话说,这个方法在分母多项式被分解成因式后才能应用。

将  $F(s)$  分母的  $A(s)$  进行因子分解,可写成

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

式中,  $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$  称为  $A(s)=0$  的根或  $F(s)$  的极点, 它们可以是实数, 也可以是复数。如果是复数, 则一定是成对共轭的。

下面分两种情况进行讨论。

(1) 分母  $A(s)=0$  无重根。在这种情况下,  $F(s)$  总是可以展开成下面的简单部分分式之和, 即

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \\ &= \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s+p_n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s+p_k} \end{aligned} \quad (1-50)$$

式中,  $a_k$  为常值。  $a_k$  称为在极点  $s=-p_k$  处的留数。  $a_k$  的值可用  $(s+p_k)$  乘以式(1-50)的两边, 并令  $s=-p_k$  的方法求出。即

$$a_k = \left[ \frac{B(s)(s+p_k)}{A(s)} \right] \Big|_{s=-p_k} = \left[ \frac{a_1(s+p_k)}{s+p_1} + \frac{a_2(s+p_k)}{s+p_2} + \cdots + a_k + \cdots + \frac{a_n(s+p_k)}{s+p_n} \right] \Big|_{s=-p_k}$$

可以看出, 在所有展开项中除  $a_k$  项外, 其余各项全为零了, 因此留数  $a_k$  可由下式求出。

$$a_k = \left[ \frac{B(s)}{A(s)}(s+p_k) \right] \Big|_{s=-p_k} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1-51)$$

因为  $L^{-1}\left[\frac{1}{s+p_k}\right] = e^{-p_k t}$ , 从而可求得  $F(s)$  的原函数为

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n a_k e^{-p_k t}$$

需要指出, 因为  $f(t)$  是一个时间的实函数, 如果  $p_1$  和  $p_2$  是一对共轭复数, 则留数  $a_1$  和  $a_2$  也必然是共轭复数。这种情况下, 式(1-51)照样可应用, 且只需对复留数  $a_1$  和  $a_2$  中的任意一个求值, 另一个自然也就知道了。

**【例 1-9】** 求  $F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$  的拉氏反变换。

$$\text{解 } F(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{a_1}{s+1} + \frac{a_2}{s+2}$$

由式(1-51)可得

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+1) \Big|_{s=-1} = 2 \\ a_2 &= \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}(s+2) \Big|_{s=-2} = -1 \end{aligned}$$

因此

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

**【例 1-10】** 求  $F(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+5}$  的拉氏反变换。

解 分母多项式可以因式分解为

$$s^2 + 2s + 5 = (s + 1 + 2j)(s + 1 - 2j)$$

$F(s)$ 可展开为

$$F(s) = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} = \frac{a_1}{s + 1 + 2j} + \frac{a_2}{s + 1 - 2j}$$

由式(1-51)可得

$$a_1 = \frac{2s + 12}{s^2 + 2s + 5} (s + 1 + 2j) \Big|_{s = -1 - 2j} = 1 + \frac{5}{2}j$$

由于  $a_1$  与  $a_2$  共轭, 得

$$a_2 = 1 - \frac{5}{2}j$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{1 + \frac{5}{2}j}{s + 1 + 2j} + \frac{1 - \frac{5}{2}j}{s + 1 - 2j}\right] \\ &= (1 + \frac{5}{2}j)e^{-(1+2j)t} + (1 - \frac{5}{2}j)e^{-(1-2j)t} \\ &= e^{-t}(e^{-j2t} + e^{j2t}) + j\frac{5}{2}e^{-t}(e^{-j2t} - e^{j2t}) \\ &= 2e^{-t}\cos 2t + 5e^{-t}\sin 2t \end{aligned}$$

(2)分母  $A(s) = 0$  有重根。假设  $F(s)$  有  $r$  个重极点  $-p_1$ , 其余极点均不相同, 则

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s + p_1)^r (s + p_{r+1}) \cdots (s + p_n)} \\ &= \frac{a_{11}}{(s + p_1)^r} + \frac{a_{12}}{(s + p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{a_{1r}}{s + p_1} + \frac{a_{r+1}}{s + p_{r+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} \end{aligned}$$

式中,  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1r}$  的求法如下:

$$\begin{aligned} a_{11} &= F(s)(s + p_1)^r \Big|_{s = -p_1} \\ a_{12} &= \frac{d}{ds} [F(s)(s + p_1)^r] \Big|_{s = -p_1} \\ a_{13} &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s + p_1)^r] \Big|_{s = -p_1} \\ &\vdots \\ a_{1r} &= \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{(r-1)}}{ds^{(r-1)}} [F(s)(s + p_1)^r] \Big|_{s = -p_1} \end{aligned} \quad (1-52)$$

其余留数  $a_{r+1}, a_{r+2}, \dots, a_n$  的求法与第一种情况所述的方法相同, 即

$$a_k = F(s)(s + p_k) \Big|_{s = -p_k} \quad (k = r+1, r+2, \dots, n)$$

求得所有的留数后,  $F(s)$  的反变换为

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] \\ &= \left[ \frac{a_{11}}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{a_{12}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + a_{1r} \right] e^{-p_1 t} + a_{r+1} e^{-p_{r+1} t} + a_{r+2} e^{-p_{r+2} t} + \cdots + a_n e^{-p_n t} \end{aligned} \quad (1-53)$$

**【例 1-11】** 求  $F(s) = \frac{1}{s(s+2)^3(s+3)}$  的拉氏反变换。

解

$$F(s) = \frac{a_{11}}{(s+2)^3} + \frac{a_{12}}{(s+2)^2} + \frac{a_{13}}{s+2} + \frac{a_4}{s+3} + \frac{a_5}{s}$$

$$a_{11} = F(s)(s+2)^3 \Big|_{s=-2} = \frac{1}{s(s+3)} \Big|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{d}{ds}[F(s)(s+2)^3] \Big|_{s=-2} = \frac{-(2s+3)}{s^2(s+3)^2} \Big|_{s=-2} = \frac{1}{4}$$

$$a_{13} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2}[F(s)(s+2)^3] \Big|_{s=-2} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[ \frac{1}{s(s+3)} \right] \Big|_{s=-2} = -\frac{3}{8}$$

$$a_4 = F(s)(s+3) \Big|_{s=-3} = \frac{1}{s(s+2)^3} \Big|_{s=-3} = \frac{1}{3}$$

$$a_5 = F(s) \cdot s \Big|_{s=0} = \frac{1}{(s+2)^3(s+3)} \Big|_{s=0} = \frac{1}{24}$$

所以 
$$F(s) = \frac{-1}{2(s+2)^3} + \frac{1}{4(s+2)^2} - \frac{3}{8(s+2)} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{24s}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{t^2}{2} e^{-2t} + \frac{1}{4} t e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{8} (-2t^2 + 2t - 3) e^{-2t} + \frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{24}$$

### 1.3.4 用拉氏变换解线性定常微分方程

应用拉氏变换法得到的解是线性定常微分方程的全解(特解+补解)。求线性定常微分方程的经典方法需要利用初始条件求积分常数的值。然而,在应用拉氏变换法的情况下,由于初始条件已自动地包含在微分方程的拉氏变换式中,就不需要根据初始条件求积分常数的值了。

应用拉氏变换解线性定常微分方程时,采用下列步骤:

- (1)对线性微分方程中的每一项进行拉氏变换,使微分方程变为  $s$  的代数方程。
- (2)解代数方程,得到有关变量的拉氏变换表达式。
- (3)用拉氏反变换得到微分方程的时域解。

以下的例子说明求解过程。

**【例 1-12】** 应用拉氏变换求解线性微分方程。

设微分方程  $\frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + 5 \frac{dx_o(t)}{dt} + 6x_o(t) = 1$ , 初始条件分别为  $x'_o(0) = 1, x_o(0) = 2$ 。

试求  $x_o(t)$ 。

解 根据微分定理进行拉氏变换:

$$L \left[ \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} \right] = s^2 X_o(s) - s x_o(0) - x'_o(0) = s^2 X_o(s) - 2s - 1$$

$$L\left[\frac{dx_o(t)}{dt}\right]=5sX_o(s)-10$$

$$L[6+x_o(t)]=6X_o(s)$$

整理得

$$X_o(s)=\frac{2s^2+11s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

可得

$$x_o(t)=\frac{1}{6}+\frac{13}{2}e^{2t}-\frac{14}{3}e^{-3t}$$

**【例 1-13】** 图 1-11 所示机械系统,在不计阻尼的情况下,求质量块  $m$  在外施作用力  $f(t)$  作用下的运动规律。

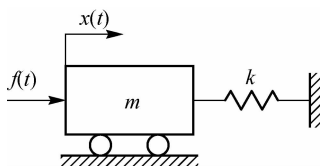


图 1-11 机械系统

**解** 若不计阻尼,系统的运动微分方程为

$$mx''(t)+kx(t)=f(t) \quad (1-54)$$

对式(1-54)中的每一项进行拉氏变换,可得

$$L[mx''(t)]=m[s^2X(s)-sx(0)-x'(0)]$$

$$L[kx(t)]=kX(s)$$

$$L[f(t)]=F(s)$$

式(1-54)的拉氏变换可写成如下形式:

$$(ms^2+k)X(s)-msx(0)-mx'(0)=F(s) \quad (1-55)$$

解出式(1-55)中的  $X(s)$ , 可得

$$X(s)=\frac{F(s)}{ms^2+k}+\frac{msx(0)+mx'(0)}{ms^2+k} \quad (1-56)$$

式(1-56)等号右边的第一项表示当初始条件全部为零时由外施作用所产生的微分方程的解(特解)的象函数,式(1-56)等号右边的第二项表示初始条件的影响所产生的解(补解)的象函数。微分方程的时间解是由  $X(s)$  进行拉氏反变换求得的:

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}[X(s)] \\ &= L^{-1}\left[\frac{F(s)}{ms^2+k}\right]+L^{-1}\left[\frac{msx(0)+mx'(0)}{ms^2+k}\right] \end{aligned} \quad (1-57)$$

如果  $f(t)$  是一个单位阶跃函数,那么  $F(s)=\frac{1}{s}$ , 式(1-57)变为

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\left[\frac{1}{s(ms^2+k)}\right]+L^{-1}\left[\frac{msx(0)+mx'(0)}{ms^2+k}\right] \\ &= \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)+[x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+x'(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t] \end{aligned}$$

如果  $f(t)$  是一个单位脉冲函数,那么  $F(s)=1$ ,又若初始条件  $x(0)=x'(0)=0$ ,则有

$$\begin{aligned} x(t) &= L^{-1}\left[\frac{1}{ms^2+k}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{mk}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{s^2+(\sqrt{\frac{k}{m}})^2}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{mk}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \end{aligned}$$

故质量块  $m$  的运动是一个幅值为  $\frac{1}{\sqrt{mk}}$ 、角频率为  $\sqrt{\frac{k}{m}}$  的简谐运动。

## 1.4 传递函数

求解控制系统的微分方程,可以得到在确定的初始条件及外作用下系统输出响应的表达式,并可画出时间响应曲线,因而可直观地反映出系统的动态过程。如果系统的参数发生变化,则微分方程及其解均会随之而变。为了分析参数的变化对系统输出响应的影响,就需要进行多次重复的计算。而微分方程的阶次越高,这种计算越复杂。因此,仅仅从系统分析的角度来看,就会发现当系统阶次较高时,采用微分方程这种数学模型是相当不方便的;而且,对于系统的综合校正及设计,采用微分方程这种数学模型也会遇到更大的困难。

对于线性定常系统,传递函数是常用的一种数学模型,它是在拉氏变换的基础上建立的。用传递函数描述系统可以免去求解微分方程的麻烦,间接地分析系统结构参数对系统性能的影响,并且可以根据传递函数在复平面上的形状直接判断系统的动态性能,找出改善系统品质的方法。因此,传递函数是经典控制理论的基础,是一个极其重要的基本概念。

### 1.4.1 传递函数的定义

在例 1-13 中,曾建立了机械系统的微分方程,并用拉氏变换法对微分方程进行了求解。

其微分方程为

$$mx''(t)+kx(t)=f(t)$$

假定初始值为零,对微分方程进行拉氏变换,则有

$$ms^2 X(s)+kX(s)=F(s)$$

系统输出的拉氏变换式为

$$X(s)=\frac{1}{ms^2+k}F(s)$$

这是一个以  $s$  为变量的代数方程,方程右端是两部分的乘积:一部分是  $F(s)$ ,这是外作用(输入量)的拉氏变换式,随  $f(t)$  的形式而改变;另一部分是  $\frac{1}{ms^2+k}$ ,它完全由网络的



结构参数确定。将上式改写成如下形式:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

令  $G(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$ , 则输出的拉氏变换式可写成

$$X(s) = G(s)F(s)$$

可见, 如果  $F(s)$  给定, 则输出  $X(s)$  的特性完全由  $G(s)$  决定。  $G(s)$  反映了系统(网络)自身的动态本质。这很显然, 因为  $G(s)$  是由微分方程经拉氏变换得到的, 而拉氏变换又是一种线性变换, 只是将变量从实数  $t$  域变换(映射)到复数  $s$  域, 所得结果不会改变原方程所反映的系统本质, 对照  $G(s)$  与原微分方程式(1-54)的形式, 也可看出二者的联系。

我们称  $G(s)$  为传递函数, 并将其看作另一种数学模型。这是一个复变量函数, 对任意元部件或系统, 传递函数的具体形式各不相同, 但都可看作在零初始条件下输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比。图 1-11 中机械系统的传递函数即为

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k}$$

输出、输入与传递函数三者之间的关系, 还可以用图 1-12 所示的方框图形象地表示, 输入经  $G(s)$  传递到输出。对具体的系统或元部件, 只要将其传递函数的表达式写入方框图的方框中, 即为该系统或该元部件的传递函数方框图, 又称结构图。如上述网络, 只需在方框中写入  $\frac{1}{ms^2 + k}$ , 即表示了机械系统的结构图。

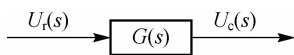


图 1-12 输出、输入与传递函数三者之间的关系

根据上述说明, 可以对传递函数做出定义: 传递函数是线性定常系统在零初始条件下, 输出量的拉氏变换式与输入量的拉氏变换式之比。

设线性定常系统的微分方程一般式为

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) \\ = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t) \end{aligned} \quad (1-58)$$

式中,  $c(t)$  为系统的输出量;  $r(t)$  为系统的输入量;  $a_0, a_1, \cdots, a_n$  及  $b_0, b_1, \cdots, b_m$  均为由系统结构参数决定的实常数。

设初始条件为零, 对式(1-58)两边进行拉氏变换, 得

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s)$$

则系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (1-59)$$

$$\begin{aligned} M(s) &= b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \\ N(s) &= a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

则式(1-59)可表示为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

若在式(1-59)中令  $s=0$ , 则有

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0}$$

即为系统的放大系数。从微分方程式(1-58)看,  $s=0$  相当于所有导数项为零, 方程变为静态方程,  $\frac{b_0}{a_0}$  恰好为输出、输入的静态比值。

传递函数是在初始条件为零(称零初始条件)时定义的。控制系统的零初始条件有两方面含义: 一是指输入是在  $t=0$  以后才作用于系统, 因而系统输入量及其各阶导数在  $t=0$  时的值为零; 二是指输入作用加于系统之前, 系统是“相对静止”的。因此, 系统输出量及其各阶导数在  $t=0$  时的值也为零。实际的工程控制系统多属此类情况, 这时, 传递函数一般都可以完全表征线性定常系统的动态性能。

必须指出, 用传递函数来描述系统的动态特性也有一定的局限性。首先, 对于非零初始条件, 传递函数便不能完全描述系统的动态特性。因为传递函数只反映零初始条件下, 输入作用对系统输出的影响, 对于非零初始条件的系统, 只有同时考虑由非零初始条件对系统输出的影响, 才能对系统的动态特性有完全的了解。其次, 传递函数只是通过系统的输入变量与输出变量之间的关系来描述系统, 亦即为系统动态特性的外部描述, 而对系统内部其他变量的情况却不完全知道, 甚至完全不知道。当然, 现代控制理论采用状态空间法描述系统, 可以克服传递函数的这一缺点。尽管如此, 传递函数作为经典控制理论的基础, 仍是十分重要的数学模型。

**【例 1-14】** 如图 1-13 所示的 RLC 无源网络, 图中电感为  $L$ , 电阻为  $R$ , 电容为  $C$ , 试求输入电压  $u_i(t)$  与输出电压  $u_o(t)$  之间的传递函数。

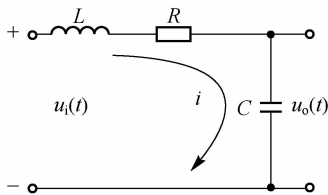


图 1-13 RLC 无源网络

**解** 为了改善系统的性能, 常引入图示的无源网络作为校正元件。无源网络通常由电阻、电容、电感组成, 利用电路理论可方便地求出其动态方程, 对其进行拉氏变换即可求出传递函数。因为电阻、电容、电感的复阻抗分别为  $R$ 、 $1/Cs$ 、 $Ls$ , 它们的串并联运算关系类同电阻。

$$U_i(s) = (Ls + R + 1/Cs)I(s)$$

$$U_o(s) = 1/Cs \cdot I(s)$$

则传递函数为

$$\frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{1/Cs}{Ls + R + 1/Cs} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

### 1.4.2 传递函数的基本性质

从线性定常系统传递函数的定义可知,传递函数具有以下性质:

(1)传递函数是复变量  $s$  的有理真分式,而且所有系数均为实数。通常分子多项式的次数  $m$  低于(或等于)分母多项式的次数  $n$ ,即  $m \leq n$ 。这是因为系统必然具有惯性,且能源是有限的。

(2)传递函数只取决于系统和元件的结构参量,与外作用形式无关。

(3)一定的传递函数有一定的零、极点分布图与之对应。将式(1-59)写成如下零、极点形式:

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} \quad (1-60)$$

式中,  $z_1, z_2, \dots, z_m$  为传递函数分子多项式  $M(s)$  等于零的根,称为传递函数的零点;  $p_1, p_2, \dots, p_n$  为传递函数分母多项式  $N(s)$  等于零的根,称为传递函数的极点。把传递函数的零点和极点同时表示在复平面  $[s]$  上的图形,就称为传递函数的零、极点分布图。图 1-14 表示了传递函数  $G(s) = \frac{s+2}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$  的零、极点分布情况,图中零点用“○”表示,极点用“×”表示。

(4)传递函数的拉氏反变换,即为系统的脉冲响应。所谓脉冲响应,是指系统在单位脉冲函数  $\delta(t)$  输入下的响应,也称为脉冲过渡函数。因为单位脉冲的拉氏变换式等于 1,因此

$$k(t) = L^{-1}[C(s)] = L^{-1}[G(s)]$$

显然,系统的脉冲响应  $k(t)$  与系统传递函数  $G(s)$  有单值对应关系,故可以用来描述系统的动态特性,如图 1-15 所示。

(5)若令  $s = j\omega$  (即  $s = \sigma + j\omega$ , 其中  $\sigma = 0$ ), 这是传递函数的一种特殊形式,  $G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$ , 称为频率特性。  $G(j\omega)$  是用频率法研究系统动态特性的基础。显然,频率特性也是描述系统动态特性的一种数学模型;而且频率特性有鲜明的物理定义,这些将在后面讲述频域分析法时详细介绍。

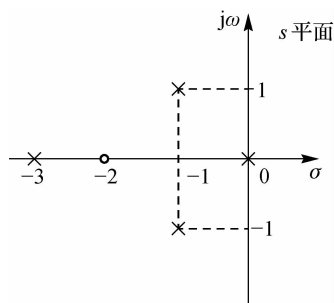


图 1-14 零、极点分布图

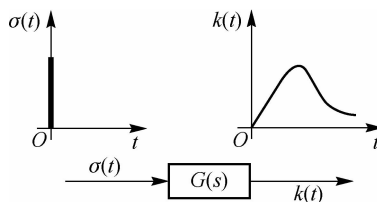


图 1-15 脉冲响应

## 1.5 典型环节

控制系统种类繁多,构成系统的元件、部件更是多种多样。但不论它们是机械的、电气的还是液压的,只要具有相同的数学模型,就具有相同的物理本质和相同的运动规律。另外,像式(1-60)所表示的传递函数,总可以把它分解成有限种类的因式之积。在这有限种类的因式中,每一种因式描述着输入、输出之间的某种典型运动规律。输入、输出之间具有这种典型运动规律的环节,称为典型环节。因此,掌握这些典型环节的运动规律,将给系统动态特性的研究带来极大的方便。

### 1.5.1 典型环节的分类

经过推导,可将系统传递函数模型改写成如下形式:

$$G(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{K \prod_{k=1}^{m_1} (\tau_k s + 1) \prod_{l=1}^{m_2} (\tau_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n_1} (T_i s + 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)} \quad (1-61)$$

式(1-61)表明,任何线性系统的传递函数都可由 6 种(或其中若干种)典型的因式所构成。也就是说,任何线性系统都可由 6 种(或其中若干种)典型环节所构成。

与分子 3 种因子相对应的环节及其传递函数分别为:

- (1)比例环节,传递函数为  $G(s) = K$ 。
- (2)一阶微分环节,传递函数为  $G(s) = \tau s + 1$ 。
- (3)二阶微分环节,传递函数为  $G(s) = \tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$ 。

与分母 3 种因子相对应的环节及其传递函数分别为:

- (1)积分环节,传递函数为  $G(s) = \frac{1}{s}$ 。
- (2)惯性环节,传递函数为  $G(s) = \frac{1}{T_s + 1}$ 。
- (3)振荡环节,传递函数为  $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$ 。

此外,在各类系统特别是机械、液压或气动系统中均会遇到纯时间延迟现象,这种现象可用延迟函数  $g(t-\tau)$  描述,其时间起点在时刻  $(t-\tau)$ , 因而有  $L[g(t-\tau)] = L[g(t)]e^{-s\tau} = G(s)e^{-s\tau}$ , 故典型环节还应增加一个延迟环节  $e^{-s\tau}$ 。

### 1.5.2 典型环节传递函数示例

为了方便地研究系统,熟悉和掌握典型环节的数学模型是十分必要的。下面对各种环节分别进行研究。

(1)比例环节。比例环节又称无惯性环节,输出量不失真、无惯性地跟随输入量,且两者成比例关系。其运动方程式为

$$x_o(t) = Kx_i(t) \quad (1-62)$$

式中,  $x_o(t)$ 、 $x_i(t)$  分别为环节的输出和输入量;  $K$  为环节的比例系数,等于输出量与输入量之比。

比例环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K \quad (1-63)$$

图 1-16 所示的齿轮传动副,若忽略齿侧间隙的影响,则有

$$n_i(t)z_1 = n_o(t)z_2$$

式中,  $n_i(t)$  为输入轴转速;  $n_o(t)$  为输出轴转速;  $z_1$ 、 $z_2$  为齿轮齿数。

上式经拉氏变换后得

$$N_i(s)z_1 = N_o(s)z_2$$

则

$$G(s) = \frac{N_o(s)}{N_i(s)} = \frac{z_1}{z_2} = K$$

图 1-17 所示为数字运算放大器。图中,  $u_i(t)$  为输入电压,  $u_o(t)$  为输出电压,  $R_1$ 、 $R_2$  为电阻。

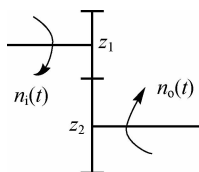


图 1-16 齿轮传动副

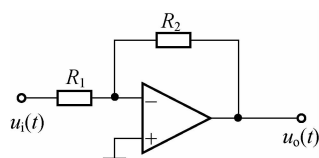


图 1-17 数字运算放大器

已知 
$$u_o(t) = -\frac{R_2}{R_1}u_i(t)$$

将上式经拉氏变换后得

$$U_o(s) = -\frac{R_2}{R_1}U_i(s)$$

故

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

(2) 惯性环节。运动方程为一阶微分方程

$$T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = Kx_i(t) \quad (1-64)$$

的环节称为惯性环节。其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{K}{Ts+1} \quad (1-65)$$

式中,  $K$  为环节增益(放大系数);  $T$  为时间常数, 表征了环节的惯性, 它和环节结构参数有关。

由于惯性环节中含有一个储能元件, 所以当输入量突然变化时, 输出量不能跟着突变, 而是按指数规律逐渐变化, 惯性环节的名称就由此而来。

图 1-18 所示为弹簧和阻尼器组成的一个环节, 其方程为

$$B \frac{dx_o(t)}{dt} + Kx_o(t) = Kx_i(t)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{Bs+K} = \frac{1}{Ts+1}$$

式中,  $T$  为惯性环节的时间常数,  $T = \frac{B}{K}$ 。

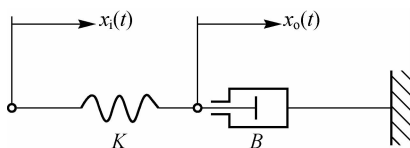


图 1-18 弹簧和阻尼器组成的环节

(3) 微分环节。凡输出量正比于输入量的微分的环节称为微分环节, 其运动方程为

$$x_o(t) = T \frac{dx_i}{dt} \quad (1-66)$$

传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = Ts \quad (1-67)$$

式中,  $T$  为微分环节的时间常数。

在工程中, 测量转速的测速发电机实质上是一台直流发电机, 如图 1-19 所示。当以发电机转角  $\theta_i$  为输入量, 电枢电压  $u_o$  为输出量时, 则有

$$u_o(t) = K_i \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

式中,  $K_i$  为发电机常数。

传递函数为

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{\theta_i(s)} = K_i s$$

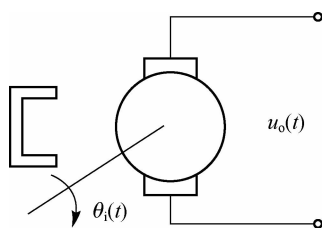


图 1-19 测速发电机

微分环节的输出是输入的微分,当输入为单位阶跃函数时,输出就是脉冲函数,这在实际中是不可能的。因此,理想的微分环节难以实现,它总是与其他环节同时出现。

图 1-20 所示为机械-液压阻尼器的原理图。图中,  $A$  为活塞面积,  $K$  为弹簧刚度,  $q$  为节流阀流量,  $R$  为节流阀液阻,  $p_1$ 、 $p_2$  分别为液压缸左、右腔油液的工作压力,  $x_i$  为活塞位移(输入量),  $x_o$  为液压缸位移(输出量)。

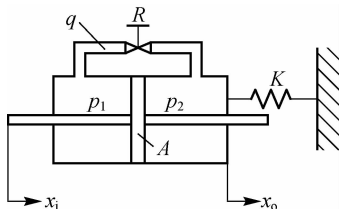


图 1-20 机械-液压阻尼器的原理图

当活塞做位移  $x_i$  时,液压缸瞬时位移  $x_o$ 。力图与  $x_i$  相等,但由于弹簧被压缩,弹簧恢复力加大,液压缸右腔油压  $p_2$  增大,迫使油液以流量  $q$  通过节流阀反流到液压缸左腔,从而使液压缸左移,直到液压缸受力平衡为止。

液压缸的力平衡方程为

$$A(p_2 - p_1) = Kx_o$$

通过节流阀的流量为

$$q = \frac{p_2 - p_1}{R} = A(x_i' - x_o')$$

由以上两式得

$$x_i' - x_o' = \frac{K}{A^2 R} x_o$$

其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{s}{s + \frac{K}{A^2 R}} = \frac{Ts}{Ts + 1}$$

式中,  $T$  为时间常数,  $T = \frac{A^2 R}{K}$ 。

由此可知,此阻尼器为含有惯性环节和微分环节的系统,此系统也称为惯性微分环

## 控制工程基础

节。仅当  $|Ts| \ll 1$  时,  $G(s) \approx Ts$ , 才近似成为微分环节。

此外, 还有一种微分环节, 称为一阶微分环节, 其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = Ts + 1 \quad (1-68)$$

式中,  $T$  为时间常数。

微分环节的输出是输入的导数, 即输出反映了输入信号的变化趋势, 所以也等于给系统以有关输入变化趋势的预告。因而, 微分环节常用来改善控制系统的动态性能。

(4) 积分环节。积分环节的输出量  $x_o(t)$  与输入量  $x_i(t)$  对时间的积分成正比, 即

$$x_o(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x_i(t) dt \quad (1-69)$$

其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{Ts} \quad (1-70)$$

式中,  $T$  为积分环节的时间常数。

积分环节的一个显著特点是输出量取决于输入量对时间的积累过程。输入量作用一段时间后, 即使输入量变为零, 输出量仍将保持在已达到的数值, 故积分环节具有记忆功能; 它的另一个显著特点是有明显的滞后作用。

(5) 振荡环节。振荡环节含有两个独立的储能元件, 并且所储存的能量可以相互转换, 从而导致输出带有振荡的性质, 这种环节的微分方程式为

$$T^2 \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dx_o(t)}{dt} + x_o(t) = Kx_i(t) \quad (1-71)$$

其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} \quad (1-72)$$

式中,  $T$  为振荡环节的时间常数;  $\zeta$  为阻尼比;  $K$  为比例系数。

振荡环节传递函数的另一常用标准形式 ( $K=1$ ) 为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1-73)$$

式中,  $\omega_n = \frac{1}{T}$  为无阻尼固有频率。

弹簧、质量块、阻尼器系统, 其运动微分方程为

$$m \frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + B \frac{dx_o(t)}{dt} + Kx_o(t) = f_i(t)$$

故得传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{ms^2 + Bs + K} = \frac{1/K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

式中,  $T = \sqrt{\frac{m}{K}}$ ;  $\zeta = \frac{B}{2\sqrt{mK}}$ 。



当  $B < 2\sqrt{mK}$  时,它是一个振荡环节。但必须指出,当  $0 < \zeta < 1$  时,二阶特征方程才有共轭复根,这时二阶系统才能称为振荡环节。当  $\zeta > 1$  时,二阶系统有两个实数根,而为两个惯性环节的串联。

(6)二阶微分环节。二阶微分环节的输出量  $x_o(t)$  不仅取决于输入量  $x_i(t)$  本身,而且取决于输入量的一阶和二阶导数,这种环节的微分方程式为

$$x_o(t) = K \left[ \tau^2 \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dx_i(t)}{dt} + x_i(t) \right] \quad (1-74)$$

式中,  $K$  为比例系数;  $\tau$  为二阶微分环节的时间常数;  $\zeta$  为阻尼比。

其传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1) \quad (1-75)$$

同样必须指出,只有当式(1-75)中的  $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = 0$  具有一对共轭复根时,才能称此环节为二阶微分环节。如果具有两个实根,则可以认为这个环节是由两个一阶微分环节串联而成的。

(7)延迟环节。延迟环节不单独存在,一般与其他环节同时出现。延迟环节的输入量  $x_i(t)$  与输出量  $x_o(t)$  之间有如下关系:

$$x_o(t) = x_i(t - \tau) \quad (1-76)$$

式中,  $\tau$  为纯延迟时间。  $x_i(t - \tau)$  是  $x_i(t)$  的延迟函数,或称平移函数。

延迟环节是线性环节,故其传递函数为

$$G(s) = \frac{L[x_o(t)]}{L[x_i(t)]} = \frac{L[x_i(t - \tau)]}{L[x_i(t)]} = \frac{X_i(s)e^{-\tau s}}{X_i(s)} = e^{-\tau s} \quad (1-77)$$

延迟环节与惯性环节的区别在于:惯性环节从输入开始时刻起就已有输出,仅由于惯性,输出要滞后一段时间才接近于所要求的输出值;延迟环节从输入开始之初,在  $0$  到  $\tau$  的区间内并无输出,但在  $t = \tau$  之后,输出就完全等于输入。

以上就是线性定常系统中,按数学模型区分的几个最基本的典型环节。掌握这些典型环节,在以后的系统分析和设计中将十分有用。

综上所述,环节是根据微分方程划分的,不是具体的物理装置或元件;一个环节往往由几个元件之间的运动特性共同组成;同一元件在不同系统中作用不同,输入输出的物理量不同,可以起到不同环节的作用。

## 1.6 系统方框图

系统方框图是描述控制系统各组成部件间变量的传递和变换关系的图形表达式。它以传递函数概念为基础,同微分方程一样,也是描述系统变量间因果关系的抽象模型,但比微分方程更为直观和具有形象性。在控制理论中,系统方框图为描述复杂的控制系统和确定系统的传递函数提供了一条简便的途径。但需要注意的是,即使描述系统的数学关系式相同,其方框图也不一定相同。

### 1.6.1 系统方框图的组成

系统方框图由若干基本符号构成,即信号线、传递方框、综合点和引出点。

(1)信号线。信号线是带有箭头的直线,箭头表示信号的传递方向,直线旁标记变量,即信号的时间函数或象函数,如图 1-21 所示。

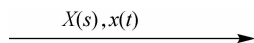


图 1-21 信号线

(2)传递方框。传递方框是传递函数的图解表示。方框的两侧应为输入信号线和输出信号线,方框内写入该输入、输出之间的传递函数  $G(s)$ ,如图 1-22 所示。

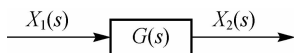


图 1-22 传递方框

传递方框具有运算功能,即  $X_2(s) = G(s)X_1(s)$ 。

(3)综合点。综合点是信号之间代数加减运算的图解,亦称加减点、比较点。用符号“○”及相应的信号箭头表示,每个箭头前方的“+”或“-”表示加上此信号或减去此信号,如图 1-23 所示。

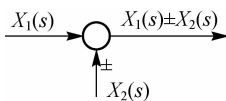


图 1-23 综合点

相邻综合点可以互换、合并、分解,即满足代数运算的交换律、结合律和分配律,如图 1-24 所示。综合点可以有多个输入,但输出是唯一的。

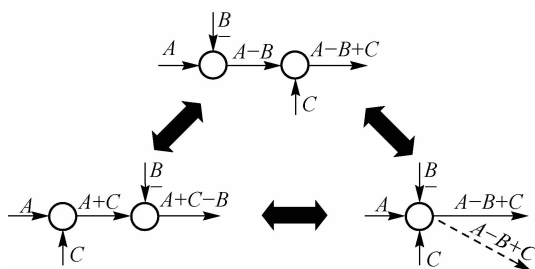


图 1-24 综合点变换

(4)引出点。引出点表示信号引出或测量的位置和传递方向,如图 1-25 所示。同一信号线上引出的信号,其性质、大小完全一样。

任何系统都可以由信号线、传递方框、综合点及引出点组成的方框图来表示。

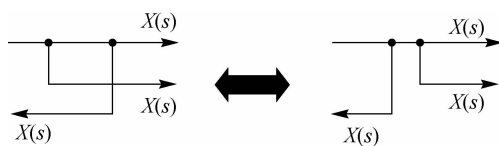


图 1-25 引出点

### 1.6.2 系统方框图的基本连接形式

系统方框图的基本连接形式有串联连接、并联连接和反馈连接三种。

(1) 串联连接。方框与方框通过信号线相连,前一个方框的输出作为后一个方框的输入,这种形式的连接称为串联连接,如图 1-26 所示。

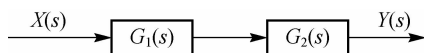


图 1-26 串联连接

(2) 并联连接。两个或两个以上的方框,具有同一个输入信号,并以各方框输出信号的代数和作为输出信号,这种形式的连接称为并联连接,如图 1-27 所示。

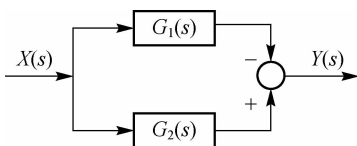


图 1-27 并联连接

(3) 反馈连接。一个方框的输出信号,输入到另一个方框后,得到的输出再返回到这个方框的输入端,构成输入信号的一部分,这种连接形式称为反馈连接,如图 1-28 所示。

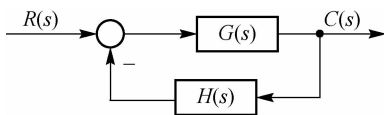


图 1-28 反馈连接

### 1.6.3 系统方框图的建立

系统方框图的建立步骤如下:

- (1) 建立系统各部件的微分方程,明确信号的因果关系(输入/输出)。
- (2) 对上述微分方程进行拉氏变换,绘制各部件的系统方框图。
- (3) 按照信号在系统中的传递、变换过程,依次将各部件的方框图连接起来,得到系统的方框图。

以机电随动系统为例,如图 1-29 所示。

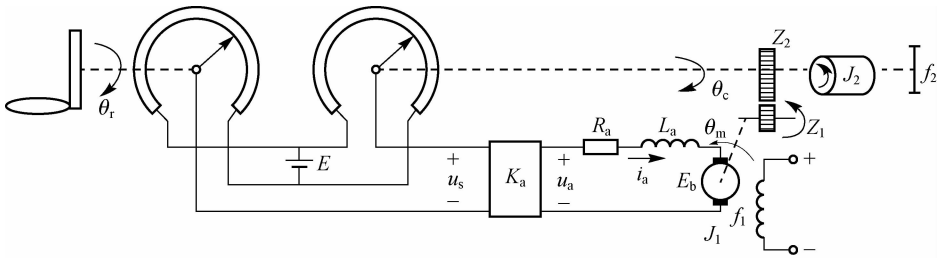


图 1-29 机电随动系统

其象方程组如下：

$$\theta_c(s) = \theta_r(s) - \theta_c(s)$$

$$U_s(s) = K_s \theta_c(s)$$

$$U_a(s) = K_a U_s(s)$$

$$U_a(s) = R_a I_a(s) + E_b(s)$$

$$M_m(s) = C_m I_a(s)$$

$$J s^2 \theta_m(s) = M_m(s) - M_L(s) - f s \theta_m(s)$$

$$E_b(s) = K_b(s) \theta_m(s)$$

$$\theta_c(s) = \frac{1}{i} \theta_m(s)$$

系统各元部件的方框图如图 1-30 所示。

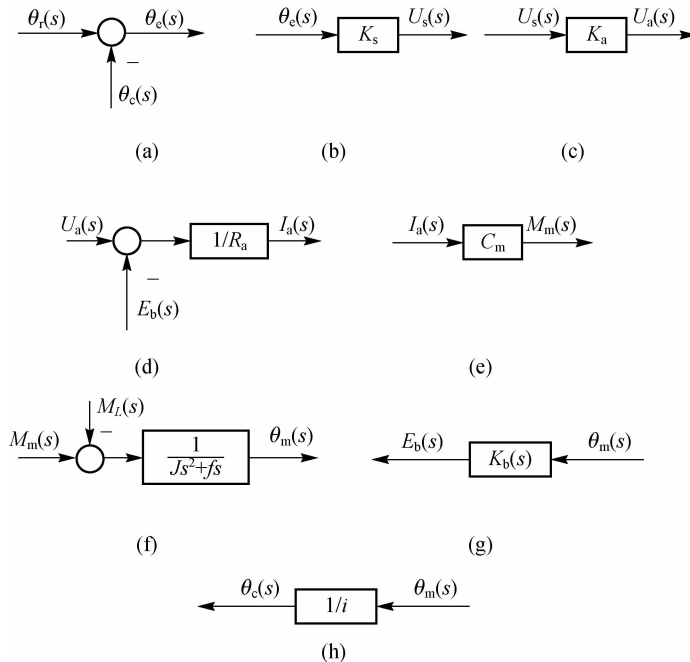


图 1-30 系统各元部件的方框图

将以上系统各元部件的方框图连接在一起,就构成了整个系统的方框图,如图 1-31 所示。

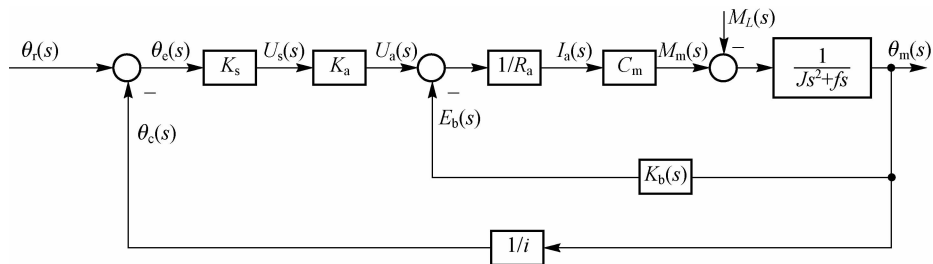


图 1-31 整个系统的方框图

### 1.6.4 系统方框图的等效变换

思路:在保证总体动态关系不变的条件下,设法将原结构进行逐步的归并和简化,最终变换为输入量对输出量的一个方框。

如前所述,方框图的连接方式有串联、并联和反馈连接三种,其等效变换如下:

#### 1. 串联结构的等效变换

设系统的串联结构图如图 1-32 所示。

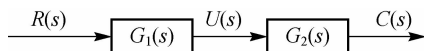


图 1-32 串联结构图

等效变换证明推导如下:

$$U(s) = G_1(s)R(s)$$

$$C(s) = G_2(s)U(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

两个串联的方框可以合并为一个方框,合并后方框的传递函数等于两个方框传递函数的乘积,如图 1-33 所示。

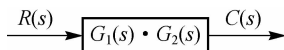


图 1-33 串联结构的等效变换

#### 2. 并联结构的等效变换

设系统的并联结构图如图 1-34 所示。

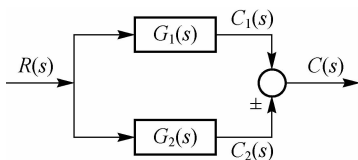


图 1-34 系统的并联结构图

等效变换证明推导如下：

$$C_1(s) = G_1(s)R(s) \quad C_2(s) = G_2(s)R(s)$$

$$C(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)]R(s)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s) \pm G_2(s)$$

两个并联的方框可以合并为一个方框，合并后方框的传递函数等于两个方框传递函数的代数和，如图 1-35 所示。

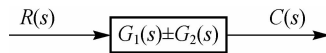


图 1-35 并联结构的等效变换

### 3. 反馈结构的等效变换

设系统的反馈结构图如图 1-36 所示。

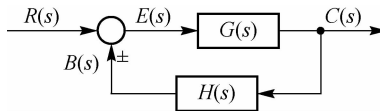


图 1-36 系统的反馈结构图

等效变换证明推导如下：

$$C(s) = G(s)E(s) \quad B(s) = C(s)H(s) \quad E(s) = R(s) \pm B(s)$$

消去中间变量  $E(s)$ 、 $B(s)$  得

$$C(s) = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)}R(s)$$

等效后的结构如图 1-37 所示。

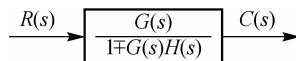


图 1-37 反馈结构的等效变换

### 4. 综合点的移动

综合点的移动可分为向前、向后及综合点之间的移动 3 种情况。

(1) 综合点后移。综合点后移系统方框图如图 1-38 所示。

证明推导过程如下：

移动前，有

$$C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s)$$

移动后，有

$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$$

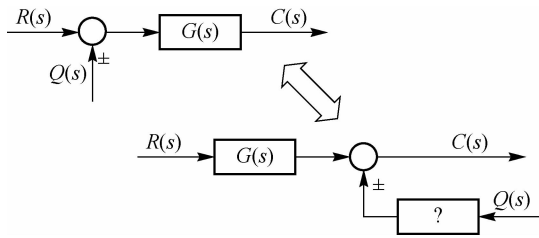


图 1-38 综合点后移系统方框图

故

$$C(s) = [R(s) \pm Q(s)]G(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s)$$

因此,推出综合点后移的等效关系图如图 1-39 所示。

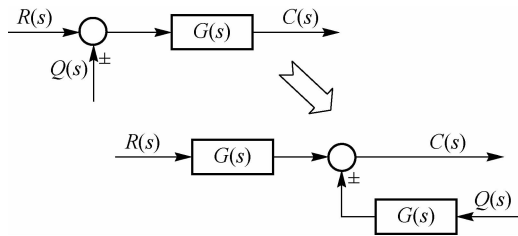


图 1-39 综合点后移的等效关系图

(2)综合点前移。综合点前移系统方框图如图 1-40 所示。

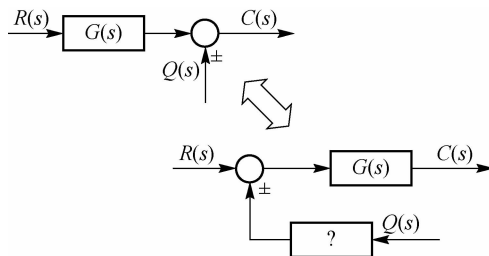


图 1-40 综合点前移系统方框图

证明推导步骤如下:

移动前,有

$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)$$

移动后,有

$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$$

故

$$C(s) = R(s)G(s) \pm Q(s)G(s) \frac{1}{G(s)} = R(s)G(s) \pm Q(s)$$

因此,推出综合点后移的等效关系图如图 1-41 所示。

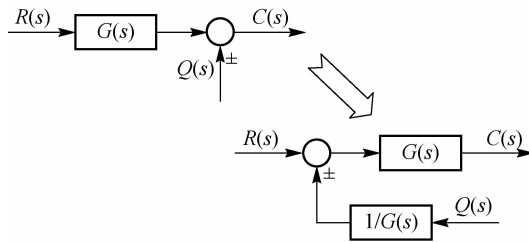


图 1-41 综合点后移的等效关系图

(3)综合点之间的移动。综合点之间移动的系统方框图如图 1-42 所示。

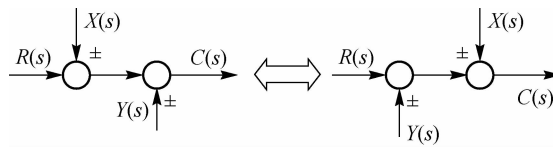


图 1-42 综合点之间移动的系统方框图

因为

$$C(s) = R(s) \pm X(s) \pm Y(s) = R(s) \pm Y(s) \pm X(s)$$

故结论为：多个相邻的综合点可以随意交换位置。

### 5. 引出点的移动

(1)引出点后移。引出点后移等效变换图如图 1-43 所示，证明从略。

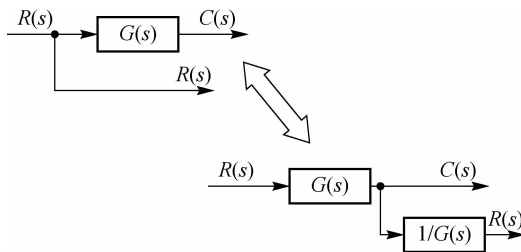


图 1-43 引出点后移等效变换图

(2)引出点前移。引出点前移等效变换图如图 1-44 所示，证明从略。

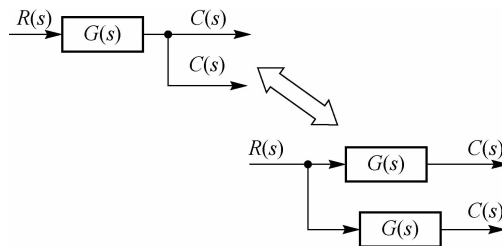


图 1-44 引出点前移等效变换图



(3)引出点之间的移动。引出点之间移动的等效变换图如图 1-45 所示,证明从略。

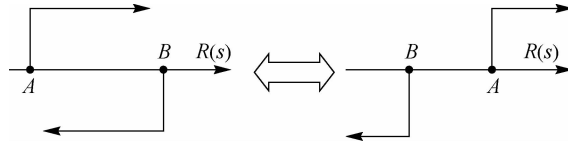


图 1-45 引出点之间移动的等效变换图

相邻引出点交换位置,不改变信号的性质。

**【例 1-15】** 利用方框图变换法,求图 1-46 所示位置随动系统的传递函数。

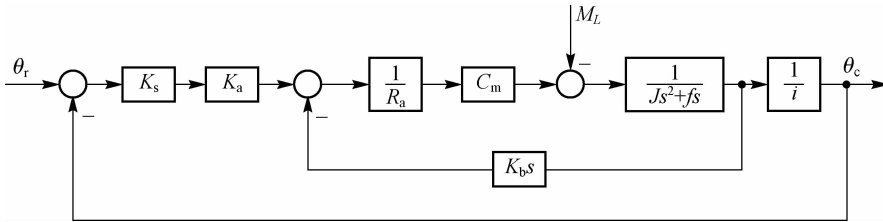


图 1-46 例 1-15 图

例题分析:由方框图可以看出该系统有两个输入,即  $\theta_r$  和  $M_L$  (干扰)。我们知道,传递函数只表示一个特定的输出、输入关系,因此,在求  $\theta_c$  对  $\theta_r$  的关系时,根据线性叠加原理,可取力矩  $M_L=0$ ,即认为  $M_L$  不存在。

结构变换的规律是由内向外逐步进行。

(1)合并串联环节,如图 1-47 所示。

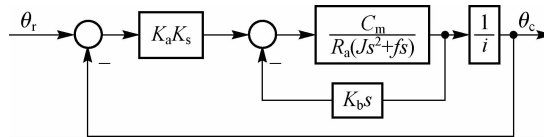


图 1-47 合并串联环节

(2)内反馈环节等效变换,如图 1-48 所示。

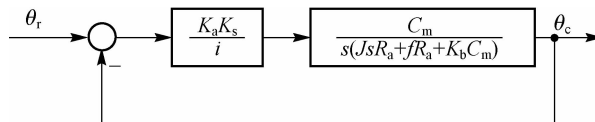


图 1-48 内反馈环节等效变换

(3)合并串联环节,如图 1-49 所示。

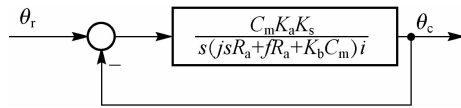


图 1-49 合并串联环节

(4) 反馈环节等效变换, 如图 1-50 所示。

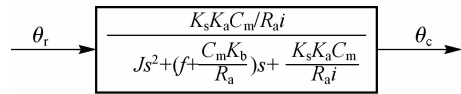


图 1-50 反馈环节等效变换

(5) 得出传递函数为

$$G(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K_s K_a C_m / R_a i}{J s^2 + (f + \frac{C_m K_b}{R_a}) s + \frac{K_s K_a C_m}{R_a i}}$$

【例 1-16】 系统方框图如图 1-51 所示, 试求系统传递函数。

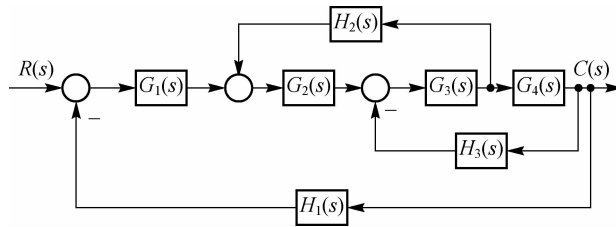


图 1-51 例 1-16 图

例题分析:

本题特点: 具有引出点、综合交叉点的多回路结构。

解题思路: 消除交叉连接, 由内向外逐步化简。

解题方法一:

(1) 将综合点 2 后移, 然后与综合点 3 交换, 如图 1-52 所示。

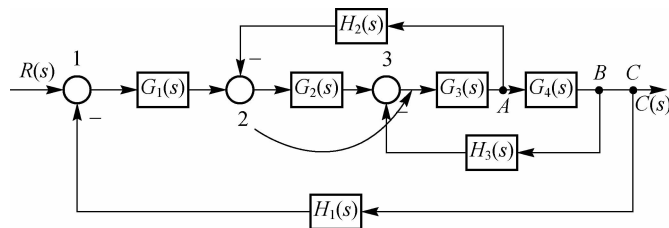


图 1-52 综合点 2 后移, 与综合点 3 交换

(2) 进行内反馈环节等效变换, 如图 1-53 所示。

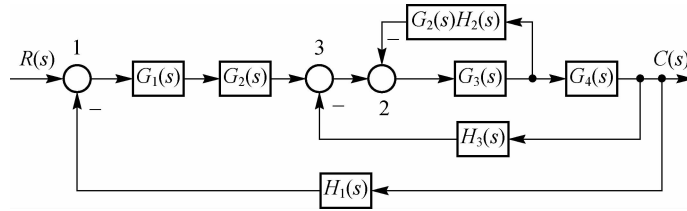


图 1-53 进行内反馈环节等效变换

(3) 内反馈环节等效变换结果如图 1-54 所示。

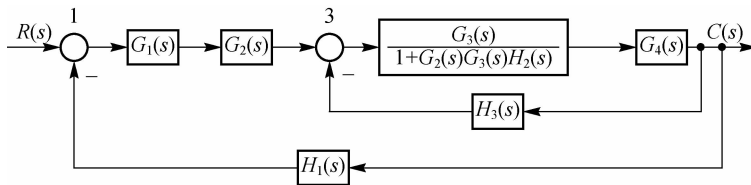


图 1-54 内反馈环节等效变换结果

(4) 串联环节等效变换结果如图 1-55 所示。

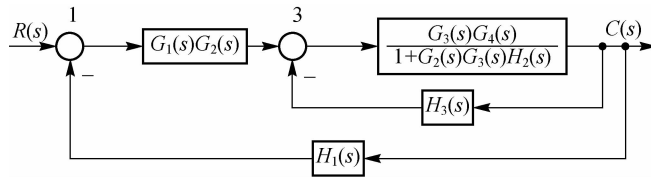


图 1-55 串联环节等效变换结果

(5) 反馈环节等效变换结果如图 1-56 所示。

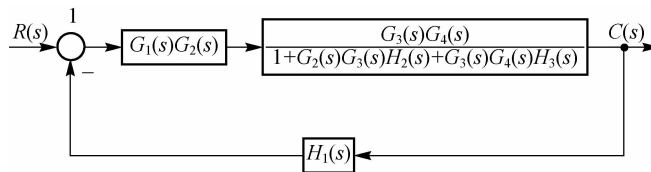


图 1-56 反馈环节等效变换结果

(6) 等效变换化简结果如图 1-57 所示。

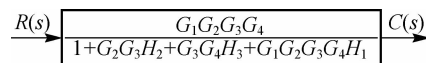


图 1-57 等效变换化简结果

解题方法二: 将综合点 3 前移, 然后与综合点 2 交换, 如图 1-58 所示。

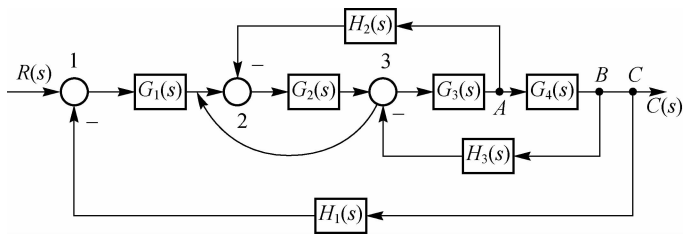


图 1-58 解题方法二

解题方法三:引出点 A 后移,如图 1-59 所示。

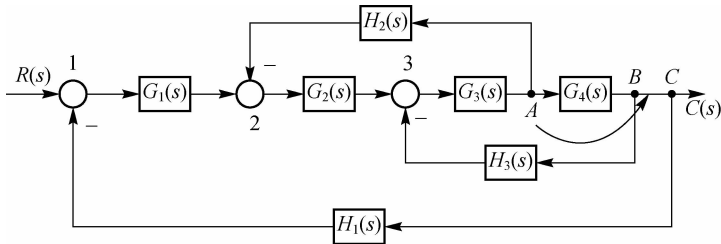


图 1-59 引出点 A 后移

解题方法四:引出点 B 前移,如图 1-60 所示。

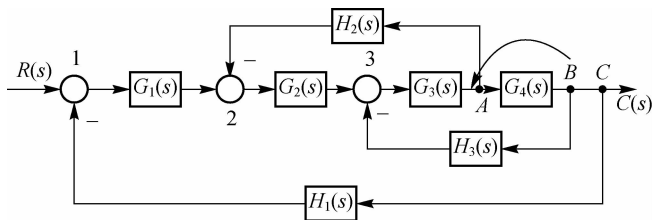


图 1-60 引出点 B 前移

结构图化简步骤归纳如下:

(1) 确定输入量与输出量。如果作用在系统上的输入量有多个,则必须分别对每个输入量逐个进行结构图化简,求得各自的传递函数。

(2) 若结构图中有交叉联系,应运用移动规则,首先将交叉消除,化为无交叉的多回路结构。

(3) 对多回路结构,可由里向外进行变换,直至变换为一个等效的方框,即得到所求的传递函数。

结构图化简的注意事项如下:

(1) 有效输入信号所对应的综合点尽量不要移动。

(2) 尽量避免综合点和引出点之间的移动。

## 1.7 信号流图

控制系统的信号流图与方框图一样,都是描述系统各元部件之间信号传递关系的数学图形。对于结构比较复杂的系统,方框图的变换和化简过程往往显得过于烦琐。与方框图相比,信号流图符号简单,更便于绘制和应用,而且可以利用梅森公式直接求出任意两个变量之间的传递函数。只是信号流图只适用于线性系统,而方框图不仅适用于线性系统,还可用于非线性系统。

## 1.7.1 信号流图的基本概念

信号流图起源于梅森利用图示法来描述一个或一组线性代数方程式,它是由节点和支路组成的一种信号传递网络。图中的节点代表方程式中的变量,以小圆圈表示;支路是连接两个节点的定向线段,用支路增益表示方程式中两个变量的因果关系,因此支路相当于乘法器。

例如,已知一个简单系统,它的方程为  $x_2 = ax_1$ ,  $x_1$  为输入信号,  $x_2$  为输出信号,  $a$  为两个变量之间的增益,则该方程式的信号流图如图 1-61(a)所示。又如,一描述系统的方程组为

$$\begin{cases} x_2 = ax_1 + bx_3 + gx_5 \\ x_3 = cx_2 \\ x_4 = dx_1 + ex_3 + fx_4 \\ x_5 = hx_4 \end{cases}$$

则该系统的信号流图如图 1-61(b)所示。

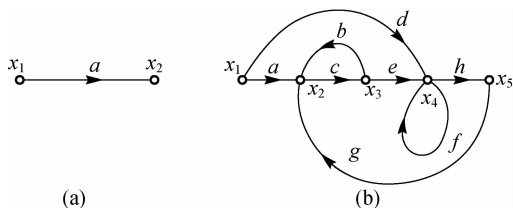


图 1-61 系统信号流图

在信号流图中,常使用以下名词术语:

(1)源点。只有输出支路的节点称为源点,又称输入节点,如图 1-61(a)中的  $x_1$ 。它一般表示系统的输入量。

(2)汇点。只有输入支路的节点称为汇点,又称输出节点,如图 1-61(a)中的  $x_2$ 。它一般表示系统的输出量。

(3)混合节点。既有输入支路又有输出支路的节点称为混合节点,如图 1-61(b)中的  $x_2$ 、 $x_3$ 、 $x_4$ 。它一般表示系统的中间变量。

(4)前向通路。信号从输入节点到输出节点传递时,每个节点只通过一次的通路,称为前向通路。前向通路上各支路增益的乘积称为前向通路总增益,一般用  $p_k$  表示。在图 1-61(b)中,从源点到汇点共有两条前向通路,一条是  $x_1-x_2-x_3-x_4-x_5$ ,其前向通

路总增益为  $p_1 = aceh$ ; 另一条是  $x_1 - x_4 - x_5$ , 其前向通路总增益为  $p_2 = dh$ 。

(5) 回路。起点和终点在同一节点, 且信号通过每一个节点不多于一次的闭合通路称为单独回路, 简称回路。如果从一个节点开始, 只经过一个支路又回到该节点的, 称为自回路。回路中所有支路增益的乘积称为回路增益, 用  $L_a$  表示。在图 1-61(b)中共有 3 个回路, 一个是起始于节点  $x_2$ , 经过节点  $x_3$  最后回到节点  $x_2$  的回路, 其回路增益为  $L_1 = bc$ ; 第二个是起始于节点  $x_2$ , 经过节点  $x_3, x_4, x_5$  最后又回到节点  $x_2$  的回路, 其回路增益为  $L_2 = cegh$ ; 第三个是起始于节点  $x_4$  并回到节点  $x_4$  的自回路, 其回路增益为  $L_3 = f$ 。

(6) 不接触回路。如果一个信号流图有多个回路, 而回路之间没有公共节点, 这种回路称为不接触回路。在信号流图中可以有两个或两个以上不接触回路。在图 1-61(b)中, 有一对不接触回路, 即回路  $x_2 - x_3 - x_2$  和回路  $x_4 - x_4$ 。

### 1.7.2 方框图与信号流图的对应关系

信号流图中节点的含义如下:

- (1) 节点所表示的变量等于流入该节点的信号之和。
- (2) 从节点流出的每一支路信号都等于该节点所表示的变量。

方框图与信号流图的对应关系和注意问题如下:

- (1) 方框图中的相加点和分支点对应于信号流图中的混合节点。
- (2) 方框图中的输入信号和输出信号对应于信号流图中的源节点和汇节点。
- (3) 方框图中的方框对应于信号流图中的支路, 框中的传递函数对应于支路传输增益。
- (4) 方框图中的负反馈符号“ $-$ ”必须计入相应的支路中(传递函数)。
- (5) 方框图中遇到相邻的相加点和分支点时, 对应到信号流图中时, 必须将相邻的相加点和分支点视为 2 个节点, 这 2 个节点之间通过传递函数为 1 的支路连接。

(6) 在进行方框图与信号流图的对应过程中, 无须对原方框图先进行化简后再对应到相应的信号流图, 而应该采用“直译”的方法。

### 1.7.3 梅森公式

当系统信号流图已知时, 可以用公式直接求出系统的传递函数, 这个公式就是梅森公式。由于信号流图和结构图存在着相应的关系, 因此梅森公式同样适用于结构图。

梅森公式给出了系统信号流图中任意输入节点与输出节点之间的增益, 即传递函数。其公式为

$$P = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k \quad (1-78)$$

式中,  $n$  为从输入节点到输出节点的前向通路的总条数;  $P_k$  为从输入节点到输出节点的第  $k$  条前向通路的总增益;  $\Delta$  为特征式, 由系统信号流图中的各回路增益确定:

$$\Delta = 1 - \sum L_a + \sum L_b L_c - \sum L_d L_e L_f + \dots$$

式中,  $\sum L_a$  为所有单独回路的增益之和;  $\sum L_b L_c$  为所有存在的 2 个互不接触的单回路增益的乘积之和;  $\sum L_d L_e L_f$  为所有存在的 3 个互不接触的单回路增益乘积之和;

$\Delta_k$  为第  $k$  条前向通路特征式的余因子式,即在信号流图中,除去与第  $k$  条前向通路接触的回路后的  $\Delta$  值的剩余部分。

上述公式中的接触回路是指具有共同节点的回路,反之称为不接触回路。与第  $k$  条前向通路具有共同节点的回路称为与第  $k$  条前向通路接触的回路。由梅森公式可以看出,总增益  $P$  实际上就是系统某两点之间的传递函数,特征式  $\Delta$  实际上就是闭环系统的特征多项式。

根据梅森公式计算系统的传递函数,首要问题是正确识别所有回路并区分它们是否相互接触,正确识别所规定的输入与输出节点之间的所有前向通路及与其相接触的回路。现举例说明。

**【例 1-17】** 试求图 1-62 所示系统的传递函数。

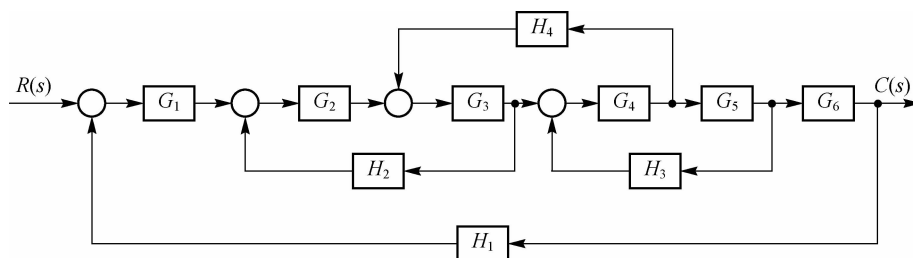


图 1-62 例 1-17 图

(1) 找出前向通路数  $n$ 。

前向通路数  $n=1$ , 其总增益为

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$$

(2) 确定系统中的反馈回路及其增益。

$$L_1 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1$$

$$L_2 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_3 = -G_4 G_5 H_3$$

$$L_4 = -G_3 G_4 H_4$$

(3) 利用梅森公式求传递函数。

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^4 L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots$$

$$\sum_{i=1}^4 L_i = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = -G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_4 G_5 H_3 - G_3 G_4 H_4$$

$$\sum L_i L_j = L_2 L_3 = (-G_2 G_3 H_2)(-G_4 G_5 H_3) = G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3$$

$\sum L_i L_j L_k$  不存在。

$$\Delta = 1 - \sum_{i=1}^4 L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots$$

$$= 1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta}$$

$$= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6}{1 + G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 G_5 H_3 + G_3 G_4 H_4 + G_2 G_3 G_4 G_5 H_2 H_3}$$

【例 1-18】 用梅森公式求图 1-63 所示系统的传递函数。

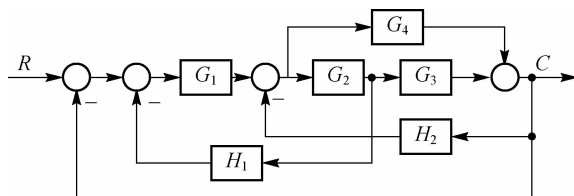


图 1-63 例 1-18 图

(1) 确定反馈回路。

$$L_1 = -G_1 G_2 G_3$$

$$L_2 = -G_1 G_2 H_1$$

$$L_3 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_4 = -G_1 G_4$$

$$L_5 = -G_4 H_2$$

(2) 确定前向通路。

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_1 G_4 \quad \Delta_2 = 1$$

(3) 求总传递函数。

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_4 + G_4 H_2}$$

【例 1-19】 对例 1-18 做简单修改后, 求图 1-64 所示系统的传递函数。

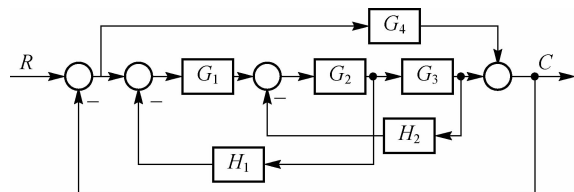


图 1-64 例 1-19 图

(1) 确定反馈回路。

$$L_1 = -G_1 G_2 G_3$$

$$L_2 = -G_1 G_2 H_1$$

$$L_3 = -G_2 G_3 H_2$$

$$L_4 = -G_4$$

(2) 确定两两互不相关的回路。



$$L_2 L_4 = (-G_4)(-G_1 G_2 H_1)$$

$$L_3 L_4 = (-G_4)(-G_2 G_3 H_2)$$

(3) 求前向通路。

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 \quad \Delta_1 = 1$$

$$P_2 = G_4 \quad \Delta_2 = 1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2$$

(4) 求系统总传递函数。

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_2 L_4 + L_3 L_4} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 + G_4 + G_1 G_2 G_4 H_1 + G_2 G_3 G_4 H_2}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_4 + G_1 G_2 G_4 H_1 + G_2 G_3 G_4 H_2} \end{aligned}$$

【例 1-20】 求图 1-65 所示系统的传递函数。

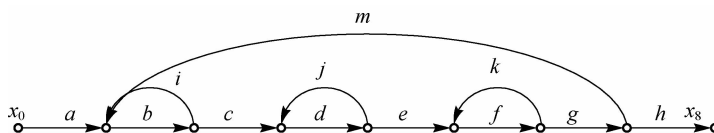


图 1-65 例 1-20 图

$$\Delta = 1 - (bi + dj + fk + bcdefgm) + (bidj + bifik + djfk) - (bidjfk)$$

$$P_1 = abcdefgh, \Delta_1 = 1$$

$$\frac{x_8}{x_0} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{abcdefgh}{1 - (bi + dj + fk + bcdefgm) + (bidj + bifik + djfk) - (bidjfk)}$$

【例 1-21】 求图 1-66 所示系统的传递函数。

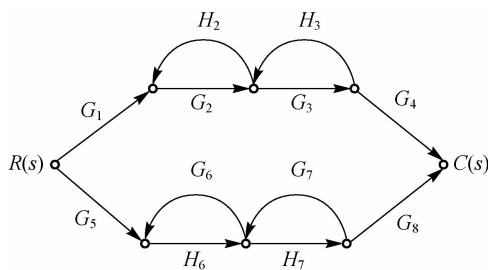


图 1-66 例 1-21 图

$$\Delta = 1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_6 H_6 + G_7 H_7) + (G_2 H_2 G_6 H_6 + G_2 H_2 G_7 H_7 + G_3 H_3 G_6 H_6 + G_3 H_3 G_7 H_7)$$

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad \Delta_1 = 1 - (G_6 H_6 + G_7 H_7)$$

$$P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8 \quad \Delta_2 = 1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{\Delta} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 [1 - (G_6 H_6 + G_7 H_7)] + G_5 G_6 G_7 G_8 [1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3)]}{1 - (G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_6 H_6 + G_7 H_7) + (G_2 H_2 G_6 H_6 + G_2 H_2 G_7 H_7 + G_3 H_3 G_6 H_6 + G_3 H_3 G_7 H_7)} \end{aligned}$$

## 1.8 闭环控制系统的传递函数

闭环控制系统的典型结构如图 1-67 所示,其中, $r(t)$ 为输入信号, $n(t)$ 为扰动(或干扰), $c(t)$ 为输出信号(被控量)。

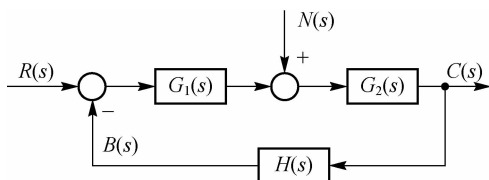


图 1-67 闭环控制系统的典型结构

### 1. 系统的开环传递函数

断开主反馈通道,系统的开环传递函数为前向通路传递函数与反馈通路传递函数的乘积。

$$\frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s) \quad (1-79)$$

**注意:**开环传递函数并不是开环系统的传递函数,而是指闭环系统在开环时的传递函数。

### 2. $r(t)$ 作用下系统的闭环传递函数

令  $n(t) = 0$ ,这时图 1-67 简化为图 1-68。输入  $R(s)$  与输出  $C_1(s)$  之间的传递函数为

$$G_r(s) = \frac{C_1(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (1-80)$$

称  $G_r(s)$  为输入  $r(t)$  作用下系统的闭环传递函数。而此时输出的拉氏变换式为

$$C_1(s) = G_r(s)R(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) \quad (1-81)$$

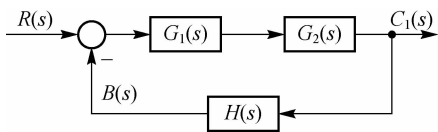


图 1-68  $r(t)$  作用下的闭环控制系统

### 3. $n(t)$ 作用下系统的闭环传递函数

为研究干扰对系统的影响,需要求出以  $N(s)$  作为输入,与输出  $C_2(s)$  之间的传递函数。这时,令  $r(t) = 0$ ,图 1-67 简化为图 1-69。可得

$$\frac{C_2(s)}{N(s)} = G_n(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (1-82)$$

称  $G_n(s)$  为干扰  $n(t)$  作用下系统的闭环传递函数。而系统在扰动作用下所引起的

输出为

$$C_2(s) = G_n(s)N(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \quad (1-83)$$

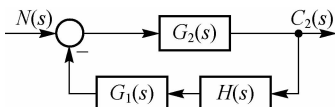


图 1-69  $n(t)$  作用下的闭环控制系统

干扰  $n(t)$  与输入  $r(t)$  进入系统的位置不一定相同, 故  $G_r(s)$  与  $G_n(s)$  一般是不相同的。

#### 4. 系统的总输出

根据线性系统的叠加原理, 系统的总输出应为  $R(s)$  和  $N(s)$  各外作用引起的输出的总和。

$$C(s) = C_1(s) + C_2(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \quad (1-84)$$

#### 5. 闭环系统的特征方程

令闭环传递函数的分母

$$D(s) = 1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0 \quad (1-85)$$

即得闭环系统的特征方程。

## 习 题

1-1 求下列函数的拉氏变换。

(1)  $f(t) = \sin 4t + \cos 4t$ ;

(2)  $f(t) = t^3 + e^{4t}$ ;

(3)  $f(t) = 1 - te^{-t}$ ;

(4)  $f(t) = e^{-t} \cos 3t$ 。

1-2 求下列函数的拉氏反变换。

(1)  $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$ ;

(2)  $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+4)}$ ;

(3)  $F(s) = \frac{s}{s^2 - 2s + 5}$ ;

(4)  $F(s) = \frac{2s+12}{s^2 + 2s + 5}$ ;

(5)  $G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2(s-3)}$ ;

$$(6) G(s) = \frac{(s+d)}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

$$(7) G(s) = \frac{2s+12}{s^2+2s+15}$$

1-3 解微分方程  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 1$ , 初始条件为  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 。

1-4 试证明图 1-70 所示电气系统与机械系统具有相同的传递函数。

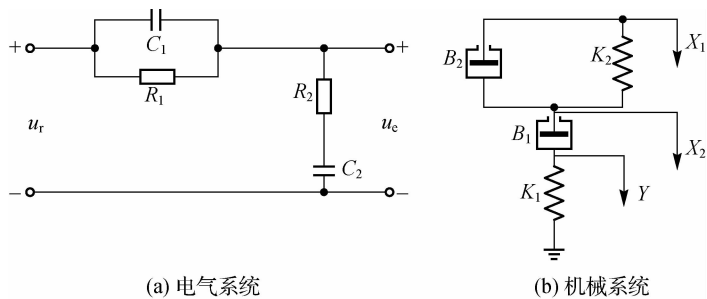


图 1-70 题 1-4 图

1-5 试分别写出图 1-71 中各有源网络的传递函数。

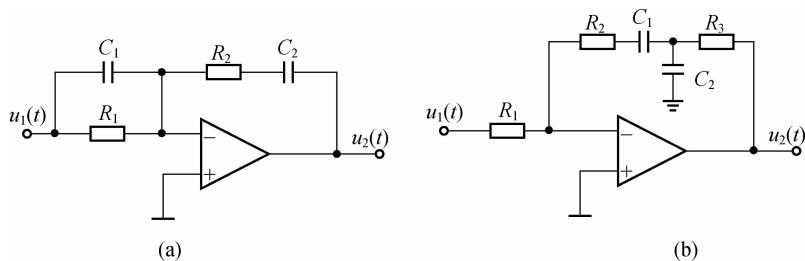


图 1-71 题 1-5 图

1-6 系统的方框图如图 1-72 所示, 试求该系统的输入、输出传递函数。

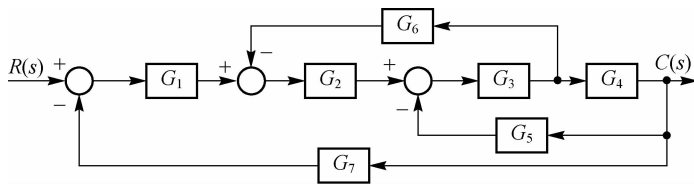


图 1-72 题 1-6 图

1-7 系统的方框图如图 1-73 所示, 试用梅森公式求传递函数。

1-8 已知系统结构如图 1-74 所示。

(1) 求传递函数  $C(s)/R(s)$  和  $C(s)/N(s)$ 。

(2) 若要消除干扰对输出的影响(即  $C(s)/N(s) = 0$ ), 求  $G_0(s)$ 。

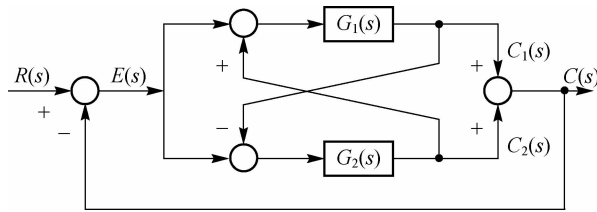


图 1-73 题 1-7 图

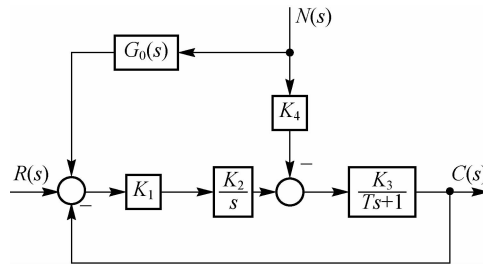


图 1-74 题 1-8 图

1-9 什么是线性系统? 其主要特性有哪些?

1-10 试建立图 1-75 所示各系统的微分方程, 其中电压  $u_i(t)$  和位移  $x_r(t)$  为输入量; 电压  $u_o(t)$  和位移  $x_c(t)$  为输出量;  $k$  为弹簧弹性系数;  $f$  为阻尼系数。

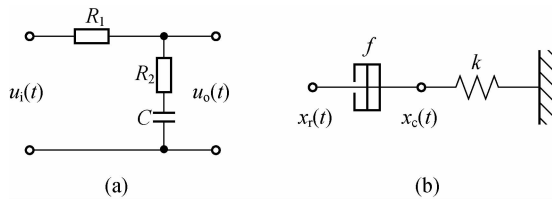


图 1-75 题 1-10 图

1-11 工业上常用孔板和差压变送器测量流体的流量, 通过孔板的流量  $Q$  与孔板前后的差压  $P$  的平方根成正比, 即  $Q=k\sqrt{P}$ ,  $k$  为常数。设系统在流量值  $Q_0$  附近做微小变化, 试将流量方程线性化。

1-12 求图 1-76 所示机械系统的微分方程式和传递函数, 图中位移  $x_i$  为输入量, 位移  $x_o$  为输出量,  $k$  为弹簧的弹性系数,  $f$  为黏滞阻尼系数, 图 1-76(a) 中物块的重力忽略不计。

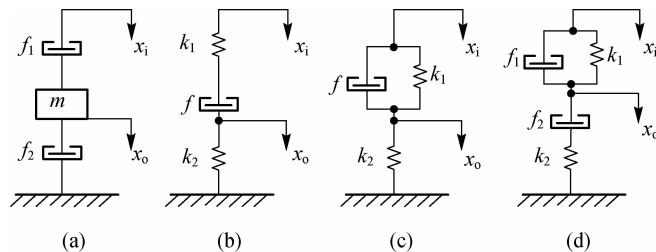


图 1-76 题 1-12 图

1-13 求图 1-77 所示机械系统的微分方程。图中  $M$  为输入转矩,  $C_m$  为圆周阻尼,  $J$  为转动惯量。

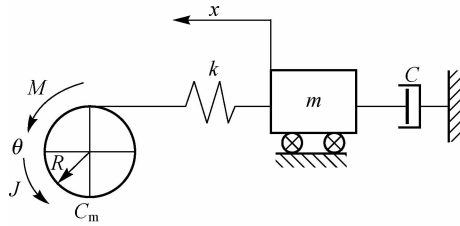


图 1-77 题 1-13 题

1-14 已知系统方框图如图 1-78 所示, 试分别求如下传递函数。

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} \quad \frac{C_2(s)}{R_1(s)} \quad \frac{C_1(s)}{R_2(s)} \quad \frac{C_2(s)}{R_2(s)}$$

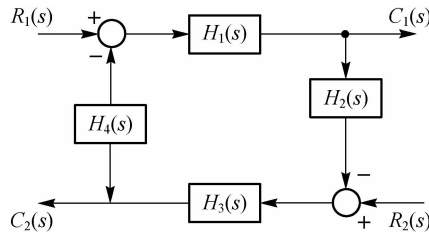


图 1-78 题 1-14 题

1-15 系统的微分方程组为

$$\begin{cases} x_1(t) = r(t) - c(t) \\ T_1 \frac{dx_2(t)}{dt} = k_1 x_1(t) - x_2(t) \\ x_3(t) = x_2(t) - k_3 c(t) \\ T_2 \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = k_2 x_3(t) \end{cases}$$

式中,  $T_1, T_2, k_1, k_2, k_3$  均为正常数, 系统的输入为  $r(t)$ , 输出为  $c(t)$ 。试画出动态结构

图, 并求出传递函数  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)}$ 。

1-16 系统方框图如图 1-79 所示, 试简化方框图, 并求出它们的传递函数  $\frac{C(s)}{R(s)}$ 。

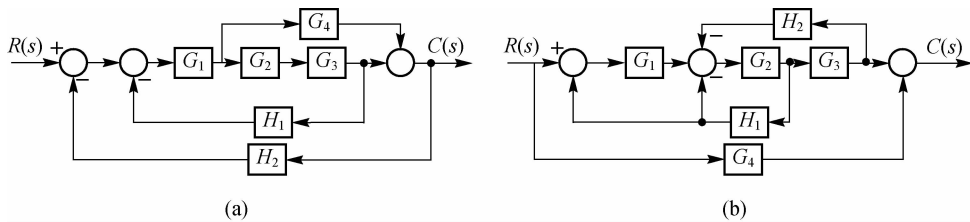


图 1-79 题 1-16 图

1-17 已知系统方框图如图 1-80 所示。

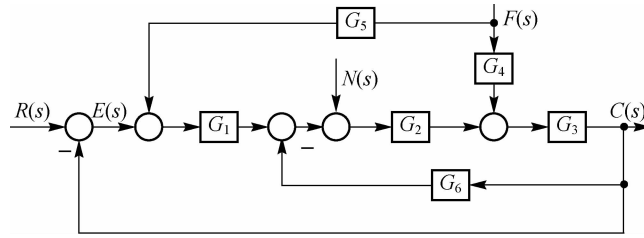


图 1-80 题 1-17 图

试分别求取各典型传递函数： $\frac{C(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{R(s)}$ 、 $\frac{C(s)}{N(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{N(s)}$ 、 $\frac{C(s)}{F(s)}$ 、 $\frac{E(s)}{F(s)}$ 。

1-18 若系统的方框图如图 1-81 所示，求：

- (1) 以  $R(s)$  为输入，而分别以  $C(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $B(s)$ 、 $\epsilon(s)$  为输出的闭环传递函数。
- (2) 以  $F(s)$  为输入，而分别以  $C(s)$ 、 $Y(s)$ 、 $B(s)$ 、 $\epsilon(s)$  为输出的闭环传递函数。

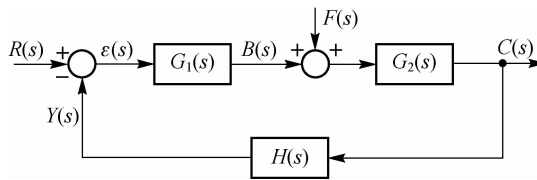


图 1-81 题 1-18 图

## 第 2 章

# 控制系统的时域分析

分析控制系统的第一步是建立系统的数学模型,数学模型一旦建立,第二步就是分析控制性能,在分析控制系统的性能时,可采用不同的方法。在经典控制理论中,常用的方法有时域分析法、频域分析法、根轨迹法等。控制系统的实际运行都是在时域内进行的。给系统输入时间信号,系统的输出即为系统的时间响应。时域法是一种直接在时间域中对系统进行分析校正的方法,具有直观、准确的优点,并且可以提供系统时间响应的全部信息。

所谓时域分析法,就是在时域内通过拉氏变换求解系统的微分方程,得到系统的时间响应,根据相应表达式和相应曲线分析系统的稳定性、稳态误差等指标。

本章主要介绍时域响应及典型的输入信号;一阶、二阶系统的时间响应;高阶系统的时间响应及主导极点、偶极子及高阶系统的降阶方法;稳态误差的概念和计算方法,以及提高系统稳态精度的方法。

### 2.1 典型输入信号

控制系统的动态性能可以通过系统对输入信号的响应过程来评价,而系统的响应过程不仅取决于系统本身的特性,还与输入信号的形式有关。

系统在实际工作过程中会接收不同的输入信号,有时具有随机性。需要有比较的基准才能判断不同系统性能的优劣。经验表明,一般通过考查典型输入信号作用下系统的响应规律来评价系统性能的优劣。

典型输入信号应满足的条件如下:

(1)在典型输入信号作用下,系统的性能应反映出系统在实际工作条件下的性能,考虑系统的极限工作情况。

(2)典型输入信号的数学表达式要简单,便于数学分析和理论计算。

(3)在控制现场或实验室中容易产生,便于实验分析和检验。

在控制工程中通常采用下列 5 种典型输入信号。



### 2.1.1 阶跃信号

阶跃信号的表达式为

$$r(t) = \begin{cases} A & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

当  $A=1$  时,称为单位阶跃信号。

阶跃信号的拉普拉斯变换为

$$R(s) = \frac{A}{s}$$

阶跃信号如图 2-1(a)所示。

### 2.1.2 速度信号

速度信号又称斜坡信号,其表达式为

$$r(t) = \begin{cases} At & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

当  $A=1$  时,称为单位速度信号。

速度信号的拉普拉斯变换为

$$R(s) = \frac{A}{s^2}$$

速度信号如图 2-1(b)所示。

### 2.1.3 加速度信号

加速度信号的表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}At^2 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

当  $A=1$  时,称为单位加速度信号。

加速度信号的拉普拉斯变换为

$$R(s) = \frac{A}{s^3}$$

加速度信号如图 2-1(c)所示。

### 2.1.4 脉冲信号

脉冲信号的表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & (0 \leq t < \epsilon) \\ 0 & (t < 0, t \geq \epsilon) \end{cases}$$

当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,称为单位脉冲信号。

脉冲信号的拉普拉斯变换为

$$R(s)=1$$

脉冲信号如图 2-1(d)所示。

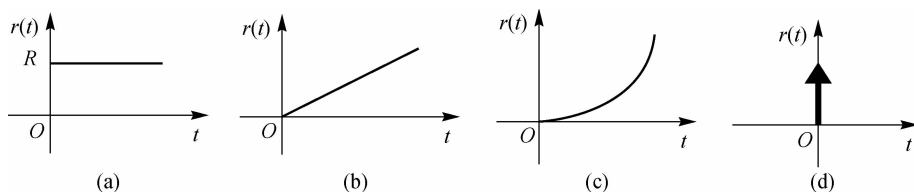


图 2-1 典型输入信号

### 2.1.5 正弦信号

正弦信号的表达式为

$$r(t)=\begin{cases} A\sin \omega t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

其拉普拉斯变换为

$$R(s)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}$$

系统分析、设计与实验时,应根据系统正常工作条件下的实际输入信号情况来确定。例如,控制系统的输入量是随时间逐渐变化的函数,如数控机床、温度控制等,可以选择斜坡函数;如果控制系统的输入量是冲击量,如导弹发射,可以选择脉冲函数;如果控制系统的输入量是随时间变化的往复运动,如机床振动,可以选择正弦输入信号;如果控制系统的输入量是突然变化的,如突然断电、突变干扰,可以选择阶跃输入信号。对控制系统进行时域分析时,往往选择阶跃函数作为输入来定义。

## 2.2 线性系统的时域性能指标

为了评价线性系统的时间响应的性能,需要研究其在典型输入信号作用下的时间响应过程。在典型输入信号的作用下,控制系统的时间响应分为动态过程和稳态过程两部分。

动态过程又称为过渡过程或瞬态过程,是指系统在典型输入信号作用下,其输出量从初始状态到最终状态的响应过程。根据系统结构和参数的选择情况,动态过程表现为衰减、发散或等幅振荡的形式。显然,一个实际运行的系统其动态过程必须是衰减的,也就是说,系统必须是稳定的。动态过程除提供系统稳定的信息外,还可以提供其相应速度和阻尼情况等信息,这些特性用动态性能指标描述。

稳态过程又称稳态响应,指系统在典型输入信号作用下,时间  $t$  趋于无穷时系统的输

出状态。表征系统输出量最终复现输入量的程度,提供系统有关稳态误差的信息,用系统的稳态性能描述。在实际应用中,认为当系统的输出对其输入的复现进入允许的误差范围后,系统即进入稳定。

典型输入信号中的阶跃信号,在0时刻具有从无到有的变化,难以复现。一般认为在典型输入信号中,如果系统在单位阶跃输入作用下的性能指标能满足要求,那么系统在其他形式的典型输入信号作用下的性能指标也能满足要求,而且阶跃信号作用的时间长,便于人们观察。因此,常常通过阶跃信号作用下的系统响应来评价系统控制性能的好坏,从而定义系统的时域性能指标。即在零初始条件下,控制系统的输入为单位阶跃信号时,系统响应随时间变化的动态性能指标——单位阶跃响应性能指标。

控制系统的单位阶跃响应常用  $h(t)$  表示,单位阶跃响应曲线及时域性能指标如图 2-2 所示。

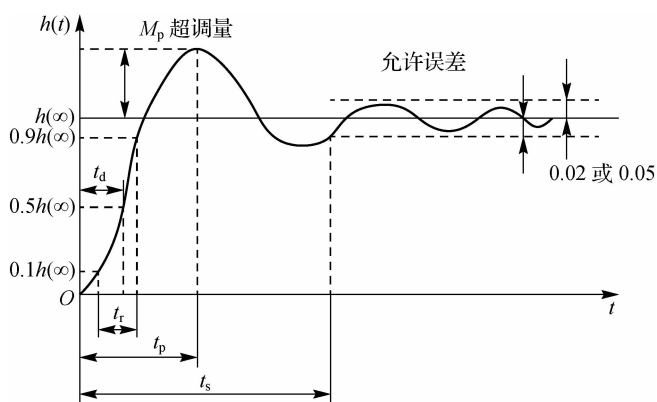


图 2-2 单位阶跃响应曲线及时域性能指标

### 1. 动态性能指标

(1) 延迟时间  $t_d$ 。响应曲线第一次达到稳态值的一半所需的时间称为延迟时间。

(2) 上升时间  $t_r$ 。上升时间是响应曲线从稳态值的 10% 上升到 90% 所需的时间; 或从 0 上升到 100% 所需的时间。对于欠阻尼二阶系统, 通常采用 0~100% 的上升时间; 对于过阻尼系统, 通常采用 10%~90% 的上升时间。上升时间越短, 响应速度越快。

(3) 峰值时间  $t_p$ 。响应曲线达到超调量的第一个峰值所需要的时间称为峰值时间。

(4) 调节时间  $t_s$ 。调节时间是在响应曲线的稳态线上, 用稳态值的百分数(通常  $\Delta$  取 5% 或 2%) 做一个允许误差范围, 响应曲线达到并永远保持在这一允许误差范围内所需的时间。

(5) 最大超调量  $M_p$ 。最大超调量指响应的最大偏离量  $h(t_p)$  与终值  $h(\infty)$  之差的百分比, 用  $\sigma\%$  表示:

$$\sigma\% = \frac{h(t_p) - h(\infty)}{h(\infty)} \times 100\% \quad (2-1)$$

动态性能指标中,  $t_d$ 、 $t_r$  和  $t_p$  评价系统的响应速度,  $t_s$  同时反映响应速度和阻尼程度,  $\sigma\%$  评价系统的阻尼程度。

## 2. 稳态性能指标

当系统的响应时间大于调整时间时, 系统就进入稳态过程。稳态误差  $e_{ss}$  是稳态过程的性能指标, 指当时间  $t \rightarrow \infty$  时, 系统输出响应的期望值与实际值之差, 即

$$e_{ss} = \lim [x_i(t) - x_o(t)] \quad (2-2)$$

稳态误差是控制系统精度和抗干扰能力的一种度量, 反映控制系统复现或跟踪输入信号的能力。稳态误差越小, 系统的控制精度越高。

## 2.3 一阶系统的时间响应

用一阶微分方程描述的控制系统的称为一阶系统。图 2-3(a) 为一阶系统的方框图, 图 2-3(b) 为其等效方框图。

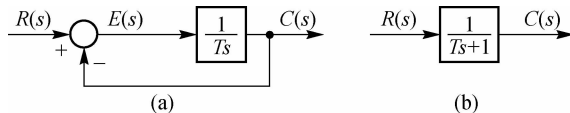


图 2-3 一阶系统方框图

当初始条件为零时, 一阶系统的传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (2-3)$$

式中,  $T$  为惯性时间常数。这种系统实际上是一个非周期性的惯性环节。

下面分别就不同的典型输入信号, 分析该系统的时域响应。

### 2.3.1 一阶系统的单位阶跃响应

因为单位阶跃函数的拉氏变换为  $R(s) = \frac{1}{s}$ , 则系统的输出由式(2-3)可知为

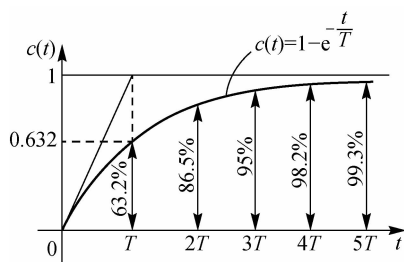
$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \quad (2-4)$$

对式(2-4)取拉氏反变换, 得

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0) \quad (2-5)$$

一阶系统的单位阶跃响应曲线如图 2-4 所示, 它是一条由零开始按指数规律上升的曲线, 最后趋于稳态值 1。其特点是单调上升而无振荡现象, 故也称为非周期响应。

响应曲线在  $t \geq 0$  时的斜率为  $\frac{1}{T}$ , 如果系统输出响应的速度恒为  $\frac{1}{T}$ , 则只要当  $t = T$  时, 输出  $c(t)$  就能达到其终值, 如图 2-4 所示。



2-4 一阶系统的单位阶跃响应曲线

对于一阶系统的单位阶跃响应,根据动态性能指标的定义,可以求得

$$t_d = 0.69T$$

$$t_r = 2.20T$$

$$t_s = 3T (\Delta = 0.05)$$

$$t_s = 4T (\Delta = 0.02)$$

而峰值时间  $t_p$  和超调量  $\sigma\%$  不存在。由时间常数  $T$  反映系统的惯性。一阶系统的惯性越小,其响应过程越快;反之,惯性越大,响应过程越慢。

根据稳态性能指标的定义,由于  $c(t)$  的终值为 1,因而系统阶跃输入时的稳态误差为零,即该系统以零稳态误差跟踪单位阶跃输入。

### 2.3.2 一阶系统的单位速度响应

单位速度函数的拉氏变换为  $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ,则系统的输出由式(2-3)可知为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \frac{1}{T_s + 1} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{1 + T_s} \quad (2-6)$$

对式(2-6)求拉氏反变换,得

$$c(t) = t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (2-7)$$

式中,  $(t - T)$  为稳态分量;  $Te^{-\frac{t}{T}}$  为瞬态分量。

式(2-7)表明,单位速度响应的稳态分量是一个与输入速度函数斜率相同、时间滞后  $T$  的速度函数,因此存在稳态跟踪误差,其值等于时间常数  $T$ ,如图 2-5 所示;也可以由误差响应说明,系统的跟踪误差为

$$e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (2-8)$$

所以一阶系统跟踪单位速度信号的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = T$$

由此可见,图 2-5 所示的一阶系统将以稳态误差  $T$  跟踪单位速度输入,系统的时间常数  $T$  越小,跟踪的准确度越高。

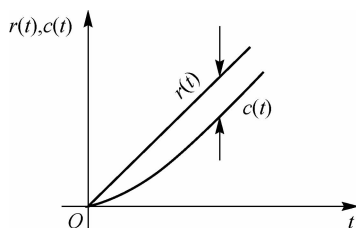


图 2-5 一阶系统的单位速度响应

### 2.3.3 一阶系统的单位加速度响应

单位加速度函数的拉氏变换为  $R(s) = \frac{1}{s^3}$ , 则系统的输出由式(2-3)可知为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \left(\frac{1}{Ts+1}\right)\frac{1}{s^3} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{s + \frac{1}{T}} = \frac{1}{s^3} - \frac{T}{s^2} + \frac{T^2}{s} - \frac{T}{s + \frac{1}{T}} \quad (2-9)$$

对式(2-9)求拉氏反变换, 得

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{1}{T}t}) \quad (t \geq 0) \quad (2-10)$$

系统的跟踪误差为

$$e(t) = r(t) - c(t) = Tt - T^2(1 - e^{-\frac{1}{T}t})$$

上式表明, 跟踪误差随时间推移而增大, 直至无限大。因此, 一阶系统不能实现对加速度输入函数的跟踪。

### 2.3.4 一阶系统的单位脉冲响应

当输入信号为理想单位脉冲函数时,  $R(s) = 1$ , 输入量的拉氏变换与系统的传递函数相同, 即

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

进行拉氏反变换, 得

$$c(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t} \quad (t \geq 0) \quad (2-11)$$

根据式(2-11)可得出一阶系统的单位脉冲响应曲线如图 2-6 所示。

由图 2-6 可见, 一阶系统的脉冲响应为一单调下降的指数曲线, 若定义该指数曲线衰减到其初始值的 5% 所需的时间为脉冲响应调节时间, 则仍有  $t_s = 3T$ 。故系统的惯性越小, 响应过程的快速性越好。

一阶系统对典型输入信号的时间响应如表 2-1 所示。

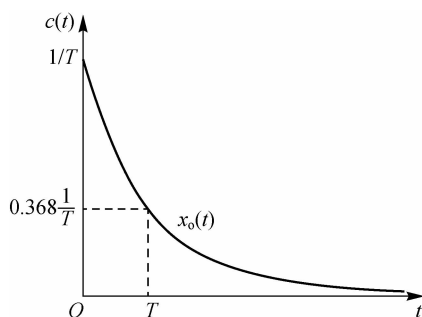


图 2-6 一阶系统的单位脉冲响应曲线

表 2-1 一阶系统对典型输入信号的时间响应

输入信号	拉氏变换	输出响应
单位脉冲 $\delta(t)$	1	$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
单位速度 $t$	$\frac{1}{s^2}$	$t - T + Te^{-\frac{t}{T}} \quad (t \geq 0)$
单位加速度 $\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (t \geq 0)$

由表 2-1 可得出,单位脉冲、单位阶跃、单位速度和单位加速度 4 种典型输入信号之间存在着微分和积分的关系,且一阶惯性环节的单位脉冲响应、单位阶跃响应、单位速度响应和单位加速度响应之间也存在着同样的微分和积分关系。因此,系统对输入信号的导数的响应,可以通过系统对该输入信号响应的导数来求解;而系统对输入信号积分的响应,可以通过系统对该输入信号响应的积分来求得,其积分常数由初始条件确定。这是线性定常系统时间响应的一个重要性质,即若系统的输入信号存在微分和积分关系,则系统的时间响应也存在对应的微分和积分关系。

## 2.4 二阶系统的时间响应

凡是能够用二阶微分方程描述的系统称为二阶系统。从物理上讲,二阶系统总包含两个独立的储能元件,能量在两个元件之间交换,使系统具有往复振荡的趋势。当阻尼不够充分大时,系统呈现出振荡的特性,所以二阶系统也称为二阶振荡环节。二阶系统对控制工程来说是非常重要的,因为许多实际控制系统都是二阶系统,而且许多高阶系统在一定条件下也可以简化为二阶系统来近似求解。因此,分析二阶系统的时间响应及其特性具有重要的实际意义。

图 2-7 为典型的二阶系统的动态结构图,二阶系统的典型传递函数可表示为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

式中,  $\zeta$  为阻尼比;  $\omega_n$  为无阻尼固有频率。令二阶系统闭环传递函数的分母等于零所得的方程称为系统的特征方程。典型二阶系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

它的两个特征根是  $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$

- (1) 当  $0 < \zeta < 1$  时,称为欠阻尼状态。特征方程有一对实部为负的共轭复数根。
- (2) 当  $\zeta = 1$  时,称为临界阻尼状态。特征方程有两个相等的负实根。
- (3) 当  $\zeta > 1$  时,称为过阻尼状态。特征方程有两个不相等的负实根。
- (4) 当  $\zeta = 0$  时,称为无阻尼或零阻尼状态。特征方程有一对纯虚根。
- (5) 当  $\zeta < 0$  时,称为负阻尼状态,此时系统不稳定。

$\zeta$  和  $\omega_n$  是二阶系统的两个重要参数,系统的响应特性完全由这两个参数来描述。

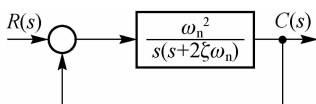


图 2-7 典型的二阶系统的动态结构图

### 2.4.1 二阶系统的单位阶跃响应

在单位阶跃信号作用下,二阶系统输出的拉氏变换为

$$C(s) = \Phi(s)R(s) = \Phi(s) \frac{1}{s}$$

求  $C(s)$  的拉氏反变换,可得典型二阶系统的单位阶跃响应。由于特征根与系统阻尼比有关,当阻尼比  $\zeta$  为不同值时,单位阶跃响应有不同的形式,下面分几种情况分析二阶系统的单位阶跃响应。

#### 1. 欠阻尼状态

在欠阻尼状态下,二阶系统传递函数的特征方程有一对共轭复数根,即系统具有一对共轭复数极点。特征方程的一对共轭复数根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

当输入信号为单位阶跃函数时,二阶系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换可展开成部分分式,系统输出量的拉氏变换为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

式中,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。对上式进行拉氏反变换,则欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应为



$$\begin{aligned}
 c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi) \quad (2-12) \\
 \sin \varphi &= \sqrt{1-\zeta^2}, \cos \varphi = \zeta \\
 \varphi &= \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arccos \zeta
 \end{aligned}$$

由式(2-12)知欠阻尼二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成,第一项为稳态分量,第二项为瞬态分量,其特点如下:

(1)瞬态分量为振幅等于  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}$  的阻尼正弦振荡,其振幅衰减的快慢由  $\zeta$  和  $\omega_n$  决定。 $\omega_d$  称为有阻尼振荡频率, $\varphi$  称为阻尼角。

(2)  $c(\infty) = 1$ , 无稳态误差。

(3) 振荡幅值随  $\zeta$  减小而加大。

图 2-8 给出了欠阻尼二阶系统不同  $\zeta$  值时的单位阶跃响应曲线。

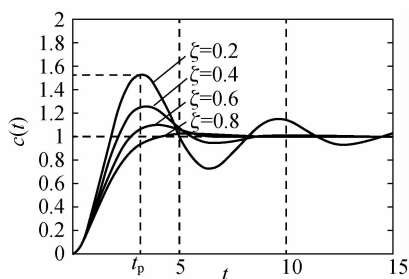


图 2-8 欠阻尼二阶系统不同  $\zeta$  值时的单位阶跃响应曲线

## 2. 临界阻尼状态

在临界阻尼状态下,二阶系统传递函数的特征方程的根是二重负实根,即系统具有两个相等的实数极点。特征方程两个相等的负实根为

$$s_{1,2} = -\omega_n = -\frac{1}{\tau}$$

当输入信号为单位阶跃函数时,二阶系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换可展开成部分分式,系统输出量的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

将上式进行拉氏反变换,得出二阶系统在临界阻尼状态时的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t) \quad (2-13)$$

从二阶临界阻尼状态传递函数的极点来看,它相当于是由两个时间常数  $\tau$  的惯性环节串联而成。二阶系统临界阻尼单位阶跃响应曲线如图 2-9 所示。

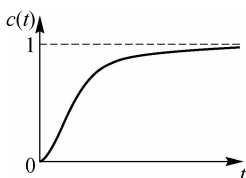


图 2-9 二阶系统临界阻尼单位阶跃响应曲线

该响应曲线的特点如下：

(1) 临界阻尼二阶系统单位阶跃响应是稳态值为 1, 无振荡、无超调的单调上升曲线。该特点与一阶系统相同, 是一个稳定的无差系统。

(2) 一阶系统单位阶跃响应曲线斜率在  $t=0$  处最大, 并逐渐递减为零; 而二阶系统响应曲线的斜率为  $\frac{dc(t)}{dt} = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$ , 当  $t = \frac{1}{\omega_n}$  时, 响应曲线斜率最大。由此可知, 二阶系统临界阻尼响应曲线的斜率由零逐渐增大到  $\omega_n e^{-1}$ , 然后再逐渐减小到零, 曲线形状为 S 形。

(3) 二阶系统临界阻尼单位阶跃响应的调整时间比一阶系统长。

### 3. 过阻尼状态

在过阻尼状态下, 二阶系统传递函数的特征方程的根是两个不相等的负实根, 即系统具有两个不相等的负实数极点。特征方程有两个不相等的负实根, 即

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

当输入信号为单位阶跃函数时, 二阶系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换可展开成部分分式, 系统输出量的拉氏变换为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \frac{1}{s} \\ &= \frac{\omega_n^2}{[s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})][s + \omega_n\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}]s} \\ &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})} + \frac{A_3}{s + \omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})} \end{aligned}$$

式中,  $A_1 = 1$ ;  $A_2 = \frac{-1}{s + \omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}$ ;  $A_3 = \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})}$ 。

将上式进行拉式反变换, 得出二阶系统在过阻尼状态时的单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left[ \frac{e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} - \frac{e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}} \right] \quad (t \geq 0) \quad (2-14)$$

二阶系统在过阻尼状态下的单位阶跃响应曲线如图 2-10 所示, 仍是一条无振荡、无超调的单调上升曲线, 且过渡过程时间较长。

响应曲线与临界阻尼状态下的单位阶跃响应曲线相似, 起始速度小, 然后上升速度逐渐增大, 到达某一值后又减小。

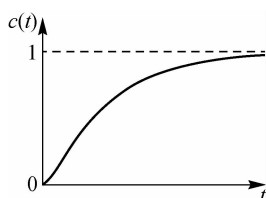


图 2-10 二阶系统在过阻尼状态下的单位阶跃响应曲线

#### 4. 无阻尼状态

在无阻尼状态下,二阶系统传递函数的特征方程的根是一对共轭虚根,即系统具有一对共轭虚数极点。特征方程的一对共轭虚根为

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

当输入信号为单位阶跃函数时,二阶系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换可展开成部分分式,系统输出量的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

将上式进行拉式反变换,得出二阶系统在无阻尼状态时的单位阶跃响应为

$$y(t) = 1 - \cos \omega_n t \quad (t \geq 0) \quad (2-15)$$

二阶系统在无阻尼状态下的单位阶跃响应曲线如图 2-11 所示,它是一条无阻尼等幅振荡曲线。其振荡频率为  $\omega_n$ ,属于不稳定系统。

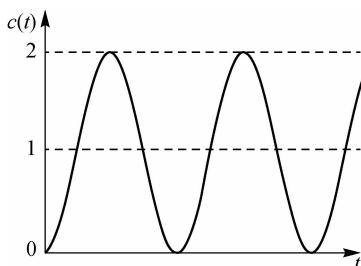


图 2-11 二阶系统在无阻尼状态下的单位阶跃响应曲线

#### 5. 负阻尼状态

在负阻尼状态下,当  $-1 < \zeta < 0$  时,输出表达式与欠阻尼状态相同;当  $\zeta < -1$  时,输出表达式与过阻尼状态相同。其响应曲线如图 2-12 所示。

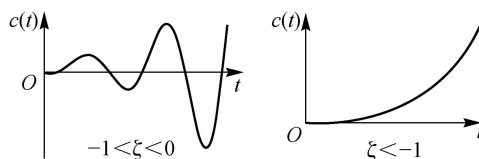


图 2-12 二阶系统在负阻尼状态下的单位阶跃响应曲线

负阻尼二阶系统的输出无法达到与输入形式一致的稳定状态,所以负阻尼二阶系统不能正常工作,称为不稳定的系统。

综上所述,在不同阻尼比  $\zeta$  的情况下,二阶系统的闭环极点和瞬态响应有很大区别。图 2-8~图 2-12 分别表示了二阶系统在不同  $\zeta$  值时特征根的位置。阻尼比  $\zeta$  为二阶系统的重要特征参量。当  $\zeta=0$  时,出现等幅振荡,系统不能正常工作;而当  $\zeta \geq 1$  时,无振荡,无超调,过渡过程长;当  $\zeta < 0$  时,阶跃响应发散,系统不稳定;当  $0 < \zeta < 1$  时,有振荡, $\zeta$  越小,振荡越严重,但响应越快。工程中除了一些不允许产生振荡的应用,如指示和记录仪表示系统等,通常采用欠阻尼系统,且阻尼比通常选择在  $0.4 \sim 0.8$ ,以保证系统的快速性,同时又不至于产生过大的振荡。

### 2.4.2 二阶系统的动态性能指标

对于实际工程的控制系统,为提高响应速度,常将一阶系统作为预期模型;而对于那些允许在调节过程中有适度振荡、希望有较快响应速度的控制系统,则将欠阻尼状态的二阶系统作为期望模型,或者按与欠阻尼二阶系统具有相似特性的高阶系统设计。因此,下面只讨论欠阻尼状态下的动态性能指标。

#### 1. 上升时间 $t_r$

根据定义,当  $t=t_r$  时,  $c(t_r)=1$ 。由式(2-12)得

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 1$$

则

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \varphi) = 0$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \neq 0$$

所以有

$$\omega_d t_r + \varphi = \pi$$

于是上升时间为

$$t_r = (\pi - \varphi) / \omega_d \quad (2-16)$$

由式(2-16)可见,当  $\omega_n$  一定时,阻尼比  $\zeta$  越小,则上升时间越短,系统响应速度越快;阻尼比  $\zeta$  一定时,  $\omega_n$  越大,则上升时间也越短。

#### 2. 峰值时间 $t_p$

将式(2-12)对时间  $t$  求导,并令其为零,可求得峰值时间  $t_p$ ,即

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_p} = -\sqrt{\frac{1}{1-\zeta^2}} [-\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t_p} \sin(\omega_d t_p + \varphi) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t_p} \cos(\omega_d t_p + \varphi)] = 0$$

从而得

$$\tan(\omega_d t_p + \varphi) = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

因为

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

所以

$$\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

按峰值时间定义,它对应最大超调量,即  $y(t)$  第一次出现峰值所对应的时间  $t_p$ ,所以

应取

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} \quad (t \geq 0) \quad (2-17)$$

由式(2-17)可见,当 $\zeta$ 一定时, $\omega_n$ 增大, $t_p$ 就减小;当 $\omega_n$ 一定时, $\zeta$ 增大, $t_p$ 就增大。 $t_p$ 与 $t_r$ 随 $\omega_n$ 和 $\zeta$ 的变化规律相同。

### 3. 最大超调量 $\sigma\%$

当 $t=t_p$ 时, $c(t)$ 有最大值 $c(t)_{\max}$ ,即 $c(t)_{\max}=c(t_p)$ 。对于单位阶跃输入,系统的稳态值 $c(\infty)=1$ ,将峰值时间表达式(2-17)代入式(2-12),得最大输出为

$$c(t)_{\max}=c(t_p)=1-\frac{e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\pi+\varphi)$$

$$\text{因为} \quad \sin(\pi+\varphi)=-\sin\varphi=-\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\text{所以} \quad c(t_p)=1+e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

$$\text{则超调量为} \quad \sigma\%=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}\times 100\% \quad (2-18)$$

可见,最大超调量只与系统的阻尼比 $\zeta$ 有关,而与固有频率 $\omega_n$ 无关,所以 $\sigma\%$ 是系统阻尼特性的描述。因此,当二阶系统的阻尼比 $\zeta$ 确定后,就可以求出相应的最大超调量 $\sigma\%$ ;反之,若给定系统所要求的最大超调量 $\sigma\%$ ,则可以由它来确定相应的阻尼比 $\zeta$ 。二阶系统 $\sigma\%$ 和 $\zeta$ 的关系如图2-13所示。

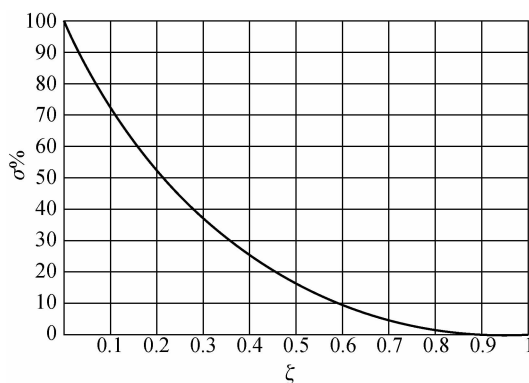


图 2-13 二阶系统 $\sigma\%$ 和 $\zeta$ 的关系

### 4. 调节时间 $t_s$

根据调节时间的定义, $t_s$ 应由下式求出:

$$\Delta c = c(\infty) - c(t) = \left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t_s + \varphi) \right| \leq \Delta$$

求解上式十分困难。在欠阻尼状态下,二阶系统的单位阶跃响应是幅值随时间按指数衰减的振荡过程,响应曲线的幅值包络线为 $1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ ,整个响应曲线总是包容在这一对包络线之内,同时,这两条包络线对称于响应特性的稳态值,如图2-14所示。响应曲

线的调整时间  $t_s$  可以近似地认为是响应曲线的幅值包络线进入允许误差范围  $\pm\Delta$  之内的时间, 因此有

$$1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t_s}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1 \pm \Delta$$

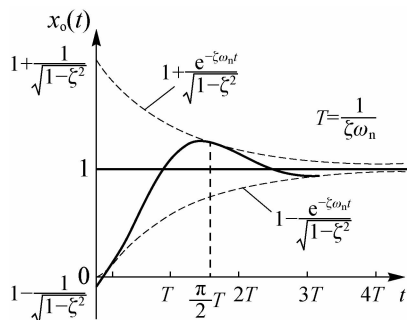


图 2-14 欠阻尼二阶系统单位阶跃响应曲线的幅值包络线

求解得

$$t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(\Delta \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (2-19)$$

由此求得

$$t_s(5\%) = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 3 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right] \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (2-20)$$

$$t_s(2\%) = \frac{1}{\zeta\omega_n} \left[ 4 - \frac{1}{2} \ln(1-\zeta^2) \right] \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2-21)$$

由式(2-20)和式(2-21)可知,  $\zeta\omega_n$  越大,  $t_s$  越小; 当  $\omega_n$  一定时,  $t_s$  与  $\zeta$  成反比。这与  $t_p$ 、 $t_r$  和  $\zeta$  的关系正好相反。通常  $\zeta$  值是根据允许最大超调量  $\sigma\%$  来确定的, 所以调整时间  $t_s$  可以根据无阻尼固有频率  $\omega_n$  来确定。这样, 在不改变最大超调量的情况下, 通过调整无阻尼固有频率  $\omega_n$ , 可以改变瞬态响应的的时间。

综上所述, 可将二阶系统的特征参量  $\zeta$ 、 $\omega_n$  与瞬态响应各项指标间的关系归纳如下:

(1) 二阶系统的动态性能由  $\omega_n$  和  $\zeta$  共同决定, 欲使二阶系统具有满意的瞬态响应指标, 必须综合考虑  $\omega_n$  和  $\zeta$  的影响。

(2) 增加  $\zeta$  可以降低振荡, 减小超调量  $\sigma\%$ , 但系统快速性降低,  $t_r$ 、 $t_p$  均增加。当  $\zeta < 0.7$  时, 随着  $\zeta$  的增大,  $t_s$  减小; 当  $\zeta > 0.7$  时, 随着  $\zeta$  的增大,  $t_r$ 、 $t_s$  均增大。

(3)  $\zeta$  一定,  $\omega_n$  越大, 系统响应快速性越好,  $t_r$ 、 $t_p$ 、 $t_s$  越小。

(4) 通常根据允许的最大超调量来确定  $\zeta$ 。 $\zeta$  一般选择在 0.4~0.8, 然后再调整  $\omega_n$  以获得合适的瞬态响应时间。当  $\zeta=0.707$  时, 超调量( $\sigma\%=4.3\%$ )和调节时间均较小, 故称  $\zeta=0.707$  为最佳阻尼比。

**【例 2-1】** 图 2-15 所示是由质量块  $m$ 、阻尼器(阻尼系数为  $c$ )、弹簧(刚度系数为  $k$ ) 和外力  $f(t)$  组成的机械系统。图 2-15(a)中  $x_o(t)$  是输出位移, 单位为 m。当外力  $f(t)$  施加 3 N 阶跃力后, 记录仪上记录质量为  $m$  的物体的时间响应曲线如图 2-15(b) 所示。

试求系统的质量块质量  $m$ 、阻尼器阻尼系数  $c$  和弹簧刚度系数  $k$ ，以及上升时间  $t_s$  和调整时间  $t_r$ 。

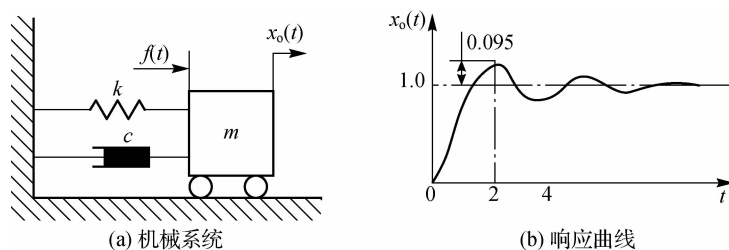


图 2-15 例 2-1 图

解 根据牛顿第二定律列出系统微分方程：

$$m\ddot{x}_o(t) + c\dot{x}_o(t) + kx_o(t) = f(t)$$

在零初始条件下进行拉氏变换，整理后可得系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1}{k} \frac{\frac{k}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

此系统为比例环节与二阶振荡环节的串联，其中

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2, \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n$$

已知系统的输入为阶跃力，其拉氏变换为

$$F(s) = \frac{3}{s}$$

又已知系统的稳态响应为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_o(t) = 1$$

根据第 1 章数学模型中的拉氏变换的终值定理，有

$$\begin{aligned} x_o(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x_o(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX_o(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{ms^2 + cs + k} \frac{3}{s} \\ &= \frac{3}{k} \end{aligned}$$

可解得

$$k = 3 \text{ N/m}$$

已知系统的最大超调量，由  $\sigma\% = \frac{x_o(t_p) - x_o(\infty)}{x_o(\infty)} \times 100\%$  得

$$\sigma\% = \frac{0.095}{1.0} \times 100\% = 9.5\%$$

又由式  $\sigma\% = e^{-\zeta\pi} / \sqrt{1-\zeta^2} \times 100\%$  求得

$$\zeta = 0.6$$

将  $t_p = 2, \zeta = 0.6$  代入式(2-18)中,得

$$\omega_n = 1.96 \text{ rad/s}$$

再由  $k/m = \omega_n^2$ , 求得

$$m = 0.78 \text{ kg}$$

由  $2\zeta\omega_n = c/m$ , 求得

$$c = 1.83 \text{ N} \cdot \text{s/m}$$

$$t_s = \frac{3}{\zeta\omega_n} = 2.55 \text{ s} \quad (\Delta = 0.05)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 3.40 \text{ s} \quad (\Delta = 0.02)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = 0.91$$

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} = 2.323 \text{ s}$$

**【例 2-2】** 已知系统的传递函数为  $G(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+1}$ , 试求系统的单位阶跃响应和单位脉冲响应。

**解** (1) 当单位阶跃信号输入时,  $x_i(t) = 1, X_i(s) = \frac{1}{s}$ , 则系统在单位阶跃信号作用下输出的拉氏变换为

$$X_o(s) = G(s)X_i(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+1} \frac{1}{s} = \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}$$

对上式进行拉氏反变换, 得出系统的单位阶跃响应为

$$x_o(t) = L^{-1}[X_o(s)] = 2 + te^{-t} - 2e^{-t}$$

(2) 当单位脉冲信号输入时,  $x_i(t) = \delta(t)$ , 由典型输入信号之间关系知  $\delta(t) = \frac{d}{dt}[1(t)]$ , 根据线性定常系统时间响应的性质, 如果系统的输入信号存在微分关系, 则系统的时间响应也存在对应的微分关系, 因此系统的单位脉冲响应为

$$x_o(t) = \frac{d}{dt}(2 + te^{-t} - 2e^{-t}) = 3e^{-t} - te^{-t}$$

## 2.5 高阶系统的时间响应

在工程应用中, 实际系统往往是一个高阶系统, 而对高阶系统的分析和研究一般是比较复杂的, 这就要求在分析高阶系统时抓住主要矛盾, 忽略次要因素, 使问题简化。

对于单输入单输出的线性定常高阶系统, 其闭环传递函数可表示为



$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (n \geq m) \quad (2-22)$$

设闭环传递函数的零点为 $-z_1, -z_2, \dots, -z_m$ , 极点为 $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ , 则闭环传递函数可表示为

$$\Phi(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (n \geq m)$$

当输入信号为单位阶跃信号时, 输出信号为

$$C(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s+p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2)}$$

式中,  $q$  为闭环实极点的个数;  $r$  为闭环共轭复数极点的对数;  $n=q+2r$ ,  $n$  为闭环极点的个数。

如果其极点互不相同, 则上式用部分分式展开得

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k(s+\zeta_k \omega_{nk}) + C_k \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_{nk} s + \omega_{nk}^2}$$

对上式取拉氏反变换, 得

$$c(t) = A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \cos \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2} t + \sum_{k=1}^r C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin \omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2} t \quad (t \geq 0) \quad (2-23)$$

由式(2-23)分析可知, 高阶系统的瞬态响应是一阶惯性环节和二阶振荡响应分量的合成。系统的响应不仅和 $\zeta_k, \omega_{nk}$ 有关, 还和闭环零点及系数 $A_j, B_k, C_k$ 的大小有关。这些系数的大小和闭环系统的所有极点与零点有关, 所以单位阶跃响应取决于高阶系统闭环零极点的分布情况。下面分析高阶系统单位阶跃响应的特点。

(1) 高阶系统瞬态响应各分量衰减的快慢由 $-p_j, \zeta_k$ 和 $\omega_{nk}$ 决定, 即由闭环极点在 $s$ 平面左半边离虚轴的距离决定。闭环极点离虚轴越远, 相应地指数分量衰减得越快, 对系统暂态分量的影响越小; 反之, 闭环极点离虚轴越近, 相应地指数分量衰减得越慢, 系统暂态分量的影响越大。

(2) 高阶系统暂态响应各分量的系数不仅和极点在 $s$ 平面的位置有关, 还与零点的位置有关。如果某一极点 $-P_j$ 靠近一个闭环零点, 又远离原点及其他极点, 则相应项的系数 $A_j$ 比较小, 该暂态分量的影响也就越小。如果极点和零点靠得很近, 则该零点和极点对瞬态响应几乎没有影响。通常如果闭环零点和极点的距离比其模值小一个数量级, 则该极点和零点构成一对偶极子, 可以对消。

(3) 如果所有闭环极点都具有负实部, 由式(2-23)可知, 随着时间的推移, 系统的暂态分量不断衰减, 最后只剩下由极点所决定的稳态分量。此时的系统称为稳定系统。稳定性是系统正常工作的首要条件, 下一节将详细探讨系统的稳定性。

(4) 假如高阶系统中距虚轴最近的极点的实部绝对值仅为其他极点的 $1/5$ 或更小,

并且附近又没有闭环零点,则可以认为系统的响应主要由该极点(或共轭复数极点)来决定。这种对高阶系统起主导作用的极点,称为系统的主导极点。因为在通常情况下,总是希望高阶系统的暂态响应能获得衰减振荡的过程,所以主导极点常常是共轭复数极点。找到一对共轭复数主导极点后,高阶系统就可近似为二阶系统来分析,相应的瞬态响应性能指标可以根据二阶系统的计算公式进行近似估算。

**【例 2-3】** 已知系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{0.59s+1}{(0.67s+1)(0.05s+1)(0.01s^2+0.08s+1)}$$

求系统的近似单位阶跃响应。

**解** 系统闭环传递函数的零极点形式为

$$\Phi(s) = \frac{1.76 \times 10^3 (s+1.7)}{(s+1.5)(s+20)(s+4+j9.2)(s+4-j9.2)}$$

其零点、极点如图 2-16 所示。

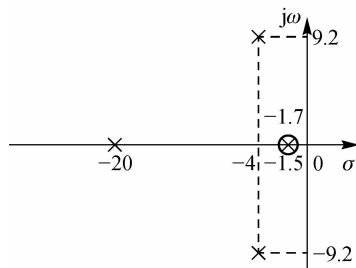


图 2-16 例 2-3 图

由系统零极点分布图可见,零点  $z_1 = -1.7$  和极点  $p_1 = -1.5$  构成一对偶极子,可以消去,共轭复数极点  $p_{3,4} = -4 \pm j9.2$  与极点  $p_2 = -20$  相距很远,  $p_{3,4}$  为系统的主导极点,  $p_2$  对响应的影响可以忽略,从而系统简化为

$$\begin{aligned} \Phi(s) &\approx \frac{1.76 \times 10^3}{20(s+4+j9.2)(s+4-j9.2)} \\ &= \frac{89}{(s^2+8s+100)} \end{aligned}$$

简化后是一个二阶系统,可用前面所学的二阶系统的单位阶跃响应去分析该四阶系统的时域性能指标。

## 2.6 系统的稳态误差

控制系统在输入信号作用下,其输出信号中将含有两个分量。其中一个分量是瞬态分量,它反映控制系统的动态性能,是控制系统的重要特性之一。对于稳定的系统,瞬态分量随着时间的增长而逐渐消失,最终将趋于零。另一个分量称为稳态分量,它反映控制系统跟踪输入信号或抑制扰动信号的能力和准确度,它是控制系统的另一个重要

特性。

一个稳定的系统在典型外作用下经过一段时间后会进入稳态,控制系统的稳态精度是其重要的技术指标。稳态误差必须在允许范围之内,控制系统才有使用价值。例如,工业加热炉的炉温误差超过限度就会影响产品质量,轧钢机的辊距误差超过限度就轧不出合格的钢材,导弹的跟踪误差若超过允许的限度就不能用于实战,等等。

控制系统的稳态误差是系统控制精度的一种度量,是系统的稳态性能指标。由于系统自身的结构参数、外作用的类型(控制量或扰动量)及外作用的形式(阶跃、斜坡或加速度等)不同,控制系统的稳态输出不可能在任意情况下都与输入量(希望的输出)一致,因而会产生原理性稳态误差。此外,系统中存在的不灵敏区、间隙、零漂等非线性因素也会造成附加的稳态误差。控制系统设计的任务之一,就是尽量减小系统的稳态误差。本节着重建立有关稳态误差的概念。

## 2.6.1 系统的误差与偏差

### 1. 误差与偏差的定义

(1)系统的误差。如图 2-17 所示,设  $c_r(t)$  是控制系统的希望输出,  $c(t)$  是其实际输出,则误差  $e(t)$  的定义式为:  $e(t) = c_r(t) - c(t)$ 。其拉氏变换记为  $E(s)$ ,  $E(s) = C_r(s) - C(s)$ 。

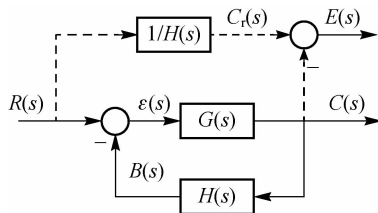


图 2-17 闭环系统的误差

系统的误差是从系统的输出端来定义的,它在性能指标提法中经常使用,但在实际系统中有时无法测量,因而一般只有数学意义。

(2)系统的偏差。系统的偏差  $\epsilon(t)$  为输入信号与反馈信号的差值,它在系统中是可以测量的,因而具有实用性。系统的偏差是从系统的输入端来定义的。系统偏差的拉氏变换记为  $\epsilon(s)$ ,  $\epsilon(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s)H(s)$ 。

### 2. 误差与偏差的关系

输出为希望值,即  $C(s) = C_r(s)$  时,应该有  $\epsilon(s) = 0$  [ $\epsilon(s)$  不起调节作用],即

$$\epsilon(s) = R(s) - C(s)H(s) = R(s) - C_r(s)H(s) = 0$$

从而有 
$$R(s) = C_r(s)H(s) \Rightarrow C_r(s) = \frac{R(s)}{H(s)} \quad (2-24)$$

输出偏离希望值时(一般情况),有

$$\begin{aligned} \epsilon(s) &= R(s) - C(s)H(s) \\ &= R(s) - [C_r(s) - E(s)]H(s) \end{aligned}$$