第 1 章 函　　数

阅读与欣赏

函数发展简史

17 世纪，伽利略(G. Galileo，意大利，1564—1642 年)在《两门新科学》一书中，几乎从头到尾包含着函数或称为变量的关系这一概念，用文字和比例的语言表达函数的关系. 1673 年前后，笛卡尔(Descartes，法国，1596—1650 年)在他的解析几何中，已经注意到一个变量对于另一个变量的依赖关系，但由于当时尚未意识到需要提炼一般的函数概念，因此直到 17 世纪后期牛顿、莱布尼茨建立微积分的时候，数学家还没有明确函数的一般意义，绝大部分函数是被当作曲线来研究的.

最早提出函数(function)概念的，是 17 世纪德国数学家莱布尼茨. 最初莱布尼茨用"函数"一词表示幂. 后来，他又用函数表示在直角坐标系中曲线上一点的横坐标、纵坐标. 1718 年，莱布尼茨的学生约翰・贝努利(Bernoulli Johann，瑞士，1667—1748 年)在莱布尼茨函数概念的基础上，对函数概念进行了明确定义："由某个变量及任意的一个常数结合而成的数量."意思是凡变量 x 和常量构成的式子都叫作 x 的函数，他强调函数要用公式来表示.

1755 年，欧拉(L. Euler，瑞士，1707—1783 年)把函数定义为："如果某些变量，以某一种方式依赖于另一些变量，即当后面这些变量变化时，前面这些变量也随着变化，我们把前面的变量称为后面变量的函数."并给出了沿用至今的函数符号.

1821 年，柯西(Cauchy，法国，1789—1857 年)给出了类似现在中学课本中函数的定义："在某些变数间存在着一定的关系，当一经给定其中某一变数的值，其他变数的值可随着而确定时，则将最初的变数叫自变量，其他各变数叫作函数."在柯西的定义中，首次出现了自变量一词.

1822 年傅立叶(Fourier，法国，1768—1830 年)发现某些函数可用曲线表示，也可用一个式子表示，或用多个式子表示，从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论，把对函数的认识又推进了一个新的层次.

1837 年狄利克雷(Dirichlet，德国，1805—1859 年)认为怎样去建立 x 与 y 之间的关系无关紧要，他拓广了函数的概念，指出："对于在某区间上的每一个确定的 x 值，y 都有一个或多个确定的值，那么 y 叫作 x 的函数."狄利克雷的函数定义，出色地避免了以往函数定义中所有的关于依赖关系的描述，简明精确，以完全清晰的方式为所有数学家无条件地接受. 至此，我们已可以说，函数概念、函数的本质定义已经形成，这就是人们常说的经典函数定义.

等到康托尔(Cantor，德国，1845—1918 年)创立的集合论被大家接受后，用集合对应关系来定义函数概念就是现在高中课本里用的了.

中文数学书中使用的"函数"一词是转译词，是我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1895 年)一书时，把"function"译成"函数"的. 中国古代"函"字与"含"字通用，都有着"包含"的意思. 李善兰给出的定义是："凡式中含天，为天之函数."中国古代用天、地、人、物 4 个字来表示 4 个不同的未知数或变量. 这个定义的含义是："凡是公式中含有变量 x，则该式子叫作 x 的函数."所以，"函数"是指公式里含有变量的意思.

1.1 函数及其性质

在现实世界中，许多量之间有依赖关系，当一个量变化时，另一个量随之起变化. 函数正是研究各个量之间确定性依赖关系的数学模型.

1.1.1 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中，往往存在多个不断变化的量，即变量. 这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律的，函数就是用来描述这种联系的. 下面先讨论两个变量的情形.

例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，假定开始下落的时刻 $t=0$，则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定，其中 g 是重力加速度.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，数集 D 称为这个函数的**定义域**.

对每个 $x\in D$，按照对应法则 f，总有确定的值 y 与之对应，这个值称为函数在点 x 处的**函数值**，记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种依赖关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时，对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记为 M，即

$$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数. 例如，$f(x)=\sin^2x+\cos^2x$ 与 $g(x)=1$ 是相同的函数；而 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 不是相同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义确定. 若讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数(分母不能为零，开偶次方根时被开方数不小于零，零和负数没有对数，等等) 所构成的集合作为该函数的定义域.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为开区间$(-1,1)$.

再如，用长为 24 米的铁丝围成一个面积为 S 的长方形，则面积 S 与长 x 之间的函数关系为 $S=(12-x)x$，此函数的定义域为 $x\in(0,12)$.

对函数 $y=f(x)(x\in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y). 当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图像**(见图 1-1).

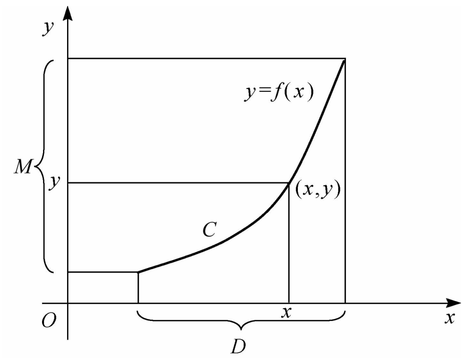

图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值,对应的函数值总是唯一的,这种函数称为**单值函数**,否则称为**多值函数**.

例如,方程 $x^2+y^2=a^2$ 在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x\in(-a,a)$,都有两个 y 值$(\pm\sqrt{a^2-x^2})$与之对应,因而 y 是多值函数.

注意　*若无特别声明,本书所指函数均指单值函数.*

函数的常用表示法有以下三种:

(1) **列表法**. 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**. 在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**. 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

例 1-1　绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=[0,+\infty)$,它的图像如图 1-2 所示.

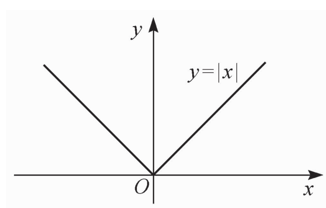

图 1-2

例 1-2　符号函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{-1,0,1\}$. 对任一实数 x,总有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$,它 的图像如图 1-3 所示.

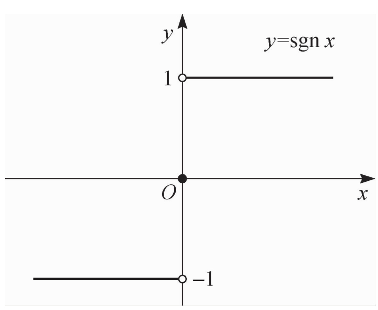

图 1-3

有些函数,对于自变量的不同取值范围,有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**,如例 1-1 和例 1-2 中的两个函数.

例 1-3 取整函数 $y=[x]$,表示不超过数 x 的最大整数. 例如,

$$[2.3]=2,[5]=5,[\pi]=3,[-6.7]=-7$$

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $M=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\}$,它的图像如图 1-4 所示.

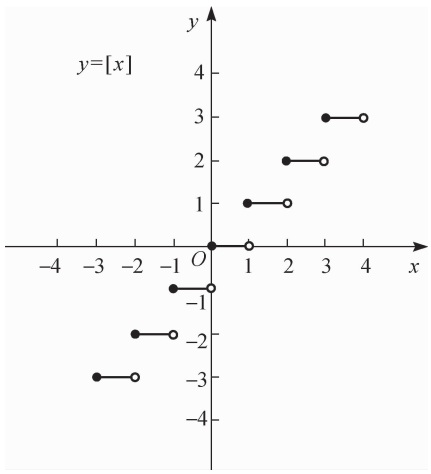

图 1-4

1.1.2 反函数

在函数中,自变量与因变量的地位是相对的,任意一个变量都可根据需要作为自变量.例如,在函数 $y=x+5$ 中,x 是自变量,y 是因变量,根据这个式子,可以解出 $x=y-5$,这里 y 是自变量,x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性,称它们互为**反函数**.

下面给出反函数的具体定义:

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于任意 $y\in M$,由函数关系式 $y=f(x)$ 恰好**唯一**确定出一个 $x\in D$ 与之对应,那么认为 x 是 y 的函数,记作 $x=g(y)$,我们称上述的 $y=f(x)$ 与 $x=g(y)$ 互为**反函数**,习惯上将 $x=g(y)$ 记作

$$x=f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$ 的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知,在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1-4 函数 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$,则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y, y\in[-1,1]$,故 $y=\sin x$, $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数是 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$.

若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一平面直角坐标系内,那么这两个图像关于 $y=x$ 对称.

例 1-5 函数 $y=x^3$ 和函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$ 的图像如图 1-5 所示.

一般地，要求 $y=f(x)$ 的反函数，只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，当该表达式也是一个函数时，再将其中的字母 x,y 进行交换即可.

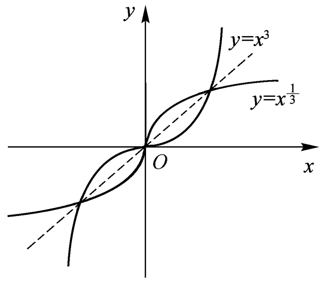

图 1-5

* **例 1-6**　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),x\in[1,+\infty)$ 的反函数.

解　由 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，解得

$$e^y=x+\sqrt{x^2-1}$$

及

$$e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$$

故

$$e^y+e^{-y}=2x$$

于是

$$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$$

故所求反函数为 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2},x\geqslant 0$.

判断函数的反函数是否存在，可以用以下定理.

定理 1.1　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的，则在 M 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**，且 $f^{-1}(x)$ 在 M 上也是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是，由于对于 y 的某些值，满足 $y=f(x)$ 的 x 有时不止一个，所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数. 但是，当我们对 x 的取值范围加以限制时，也有可能存在反函数. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不存在反函数，但在 $(-\infty,0)$ 及 $[0,+\infty)$ 内却分别存在反函数 $y=-\sqrt{x},0<x<+\infty$ 及 $y=\sqrt{x},0\leqslant x<+\infty$.

对于分段函数求其反函数，只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 1-7　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

1.1.3　函数的性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义[区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分]，则函数一般具有下列几种特性.

1. 有界性

如果存在正数 M，使对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上

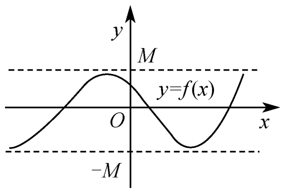

图 1-6

有界，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

从图像上看，有界函数的图像介于两条直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间(见图 1-6). 例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，而函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界，但在区间 $(1,2)$ 内有界.

2. 单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**(或**单调减少**). 区间 I 称为**单调增区间**(或**单调减区间**)；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

一般地，单调增加函数的图像为沿 x 轴正向单调上升的曲线，如图 1-7 所示；单调减少函数的图像为沿 x 轴正向单调下降的曲线，如图 1-8 所示.

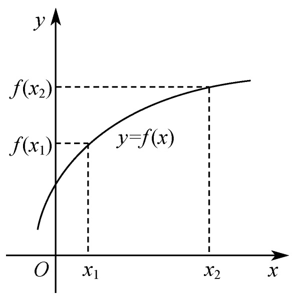

图 1-7

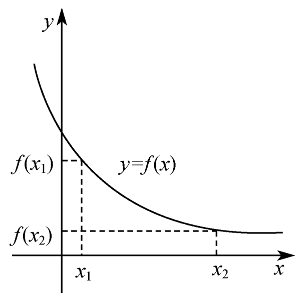

图 1-8

例如，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加函数；$y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 内单调减少，在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $y=x^2$ 不是单调函数.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**；若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**；若函数既不是奇函数也不是偶函数，则称为**非奇非偶函数**.

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称(见图 1-9)；奇函数的图像关于原点对称(见图 1-10).

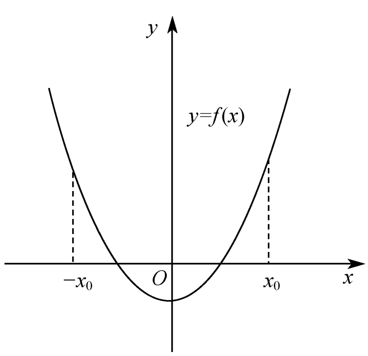

图 1-9

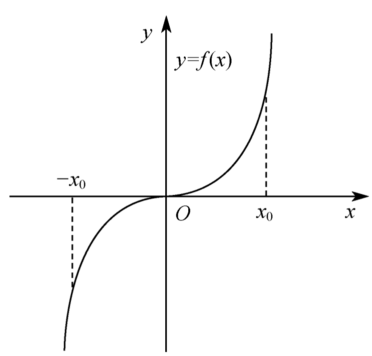

图 1-10

例如，$y=x^3+\sin x$ 为奇函数；$y=\cos x$ 为偶函数；而 $y=x^2+x$ 为非奇非偶函数.

4. 周期性

如果存在不为零的正实数 T，使得对于任意的 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打"√"或"×").

(1) 若两个函数的定义域与值域相同，则这两个函数是相同的函数.　(　　)

(2) 分段函数是由两个或两个以上函数组成的.　(　　)

(3) 偶函数的图像不一定过原点，奇函数的图像一定过原点.　(　　)

(4) 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，函数 $y=|f(x)|$ 与 $y=f(|x|)$ 的图像相同.　(　　)

2. 填空题.

(1) 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=f(x)$，则 $f(6)=$ ________.

(2) 函数 $f(x)=x^2-5x+4$ 在________单调递减，在________单调递增.

(3) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant 1\\ 1-x, x<1\end{cases}$，则 $f[f(-2)]=$ ________.

3. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{2x-3}+\dfrac{1}{x-3}$；　　(2) $f(x)=\sqrt{1-2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

4. 做出下列函数的图像.

(1) $y=|x-2|\cdot(x+1)$；　　(2) $y=\begin{cases}x+1, x\geqslant 3\\ x^2-5, x<3\end{cases}$.

1.2　初等函数

1.2.1　基本初等函数

中学学过的常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 这些函数中的多数函数我们比较熟悉，这里只做简要复习.

(1) 常量函数. $y=C$(C 为常数)，该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，图像为过点$(0,C)$且平行于 x 轴的直线.

(2) 幂函数. $y=x^a$(a 为实数)，该函数的定义域因 a 的取值不同而不同，但无论 a 为何值，它在区间$(0,+\infty)$内总有定义，且图像过点$(1,1)$，$a>0$ 和 $a<0$ 的图像分别如图 1-11、图 1-12 所示.

(3) 指数函数. $y = a^x$($a > 0$,且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$(0, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少,图像过点$(0,1)$,$y = a^x$ 的图像如图 1-13 所示. 在科学计数法中常用到以 e 为底的指数函数 $y = e^x$(e 为无理数,$e = 2.718\ 28\cdots$).

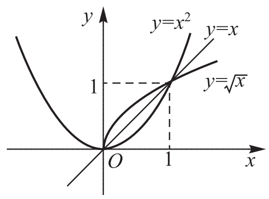

图 1-11

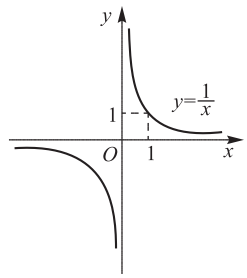

图 1-12

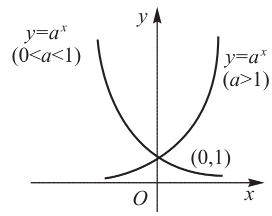

图 1-13

(4) 对数函数. $y = \log_a x$($a > 0$,且 $a \neq 1$,a 为常数),该函数的定义域为$(0, +\infty)$,值域为$(-\infty, +\infty)$,当 $a > 1$ 时,函数单调增加;当 $0 < a < 1$ 时,函数单调减少,图像过点$(1,0)$,具体图像如图 1-14 所示. 在科学计数法中常用到以 e 为底的对数函数,称为自然对数,记作$y = \ln x$.

(5) 三角函数. $y = \sin x$,$y = \cos x$,$y = \tan x$,$y = \cot x$,$y = \sec x$,$y = \csc x$ 统称为**三角函数.**

① 正弦函数. $y = \sin x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为$[-1,1]$,在$\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$上单调增加,在$\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$上单调减少,它是以 2π 为周期的周期函数,其中 $k \in Z$,如图 1-15 所示.

② 余弦函数. $y = \cos x$ 的定义域、值域和周期与正弦函数相同,在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上单调增加,在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$上单调减少,其中 $k \in Z$,如图 1-16 所示.

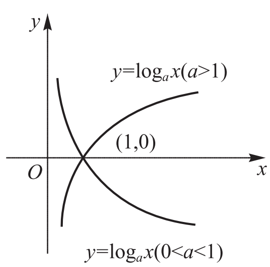

图 1-14

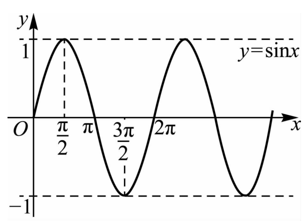

图 1-15

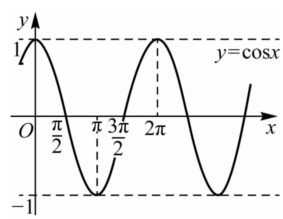

图 1-16

③ 正切函数. $y = \tan x$ 的定义域为$\left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$($k \in Z$),值域为$(-\infty, +\infty)$,是以 π 为周期的周期函数,在有定义的区间上单调增加,如图 1-17 所示.

④ 余切函数. $y = \cot x$ 的定义域为$(k\pi, (k+1)\pi)$($k \in Z$),值域为$(-\infty, +\infty)$,是以 π 为周期的周期函数,在有定义的区间上单调减少,如图 1-18 所示.

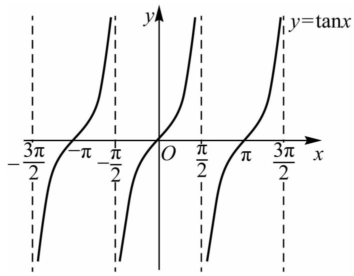

图 1-17

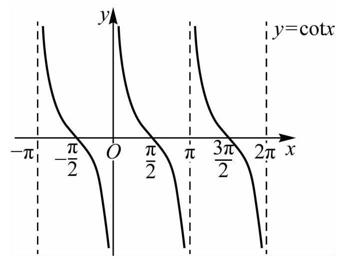

图 1-18

⑤ 正割函数和余割函数. $y=\sec x, y=\csc x$,其中 $\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, \csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

(6) 反三角函数. $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 统称为**反三角函数**.

① 反正弦函数. 正弦函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为**反正弦函数**,记作 $y=\arcsin x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,显然 $\sin(\arcsin x)=x$,如图 1-19 所示.

② 反余弦函数. 余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上的反函数称为**反余弦函数**,记作 $y=\arccos x$,定义域为 $[-1,1]$,值域为 $[0,\pi]$,显然 $\cos(\arccos x)=x$,如图 1-20 所示.

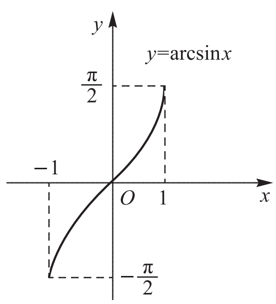

图 1-19

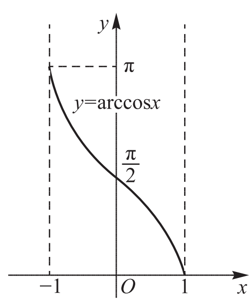

图 1-20

③ 反正切函数. 正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为**反正切函数**,记作 $y=\arctan x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,显然 $\tan(\arctan x)=x$,如图 1-21 所示.

④ 反余切函数. 余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 上的反函数叫反余切函数,记作 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为 $(0,\pi)$,显然 $\cot(\operatorname{arccot} x)=x$,如图 1-22 所示.

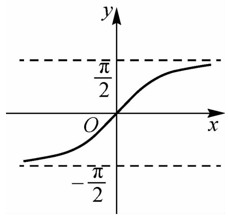

图 1-21

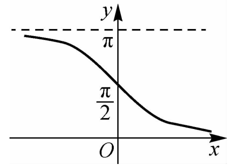

图 1-22

思考　你会用“五点法”作正弦型函数与余弦型函数的图像吗?

1.2.2　复合函数和初等函数

1. 复合函数

定义 1.3　设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数$y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明:

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\arcsin u$ 和 $u=x^2+5$ 就不能构成复合函数. 因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$u=x^2+5\geqslant 5$,此时 $y=\arcsin u$ 无定义.

例 1-8　指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1)$y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$;　　　　(2)$y=3^{\tan^2 x}$.

解　(1)$y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看作由 $y=u^{\frac{2}{3}}$,$u=1+2x$ 复合而成.

(2)$y=3^{\tan^2 x}$ 可以看作由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=\tan x$ 复合而成.

注意　能否正确分析复合函数的构成直接决定了能否熟练掌握微积分的方法和技巧.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的,并且可以用一个解析式表示的函数,称为**初等函数**. 例如,$f(x)=x\sin x$,$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,$f(x)=e^{5x+1}\sin x$ 等都是初等函数;但分段函数一般不是初等函数,如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$不能用一个解析式表示,故不是初等函数.

习题 1.2

1. 指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1)$y=\sin(x^2+1)$;　　　　(2)$y=\ln[\sin(x+5)]$;

(3)$y=e^{\cos 2x}$;　　　　(4)$y=\arctan(\ln x)$.

2. 设 $f(x)=3^x$，$g(x)=\sqrt{x}$，求

(1) $f[g(x)]$；　　　(2) $g[f(x)]$.

1.3　应用示例——椅子能否在不平的地面放稳

1.3.1　问题提出

当把一张椅子放在不平的地面上时，通常只有三只椅脚着地，然而只需稍微转动一定的角度，就可以使四只椅脚同时着地，即放稳了．怎样用数学模型来描述和证明这个实际问题呢？

1.3.2　模型假设

为了能用数学语言进行描述，需要对椅子和地面做一些必要的假设.

假设 1　对椅子的假设.

椅子的四条腿一样长，将椅脚与地面的接触处视为一个点，则四只脚的连线呈正方形.

假设 2　对地面的假设.

地面的高度是连续变化的，可视为数学上的连续曲面.

假设 3　对椅子和地面关系的假设.

地面是较为平坦的，使得椅子在任何时候都有三只脚同时着地.

1.3.3　模型建立

1. 引入函数

如图 1-23 所示，以正方形 $ABCD$ 的中心 O 为原点建立坐标系，用 θ 表示椅子转动的角度，从而确定椅子的位置．椅脚着地，即椅脚与地面的距离为零，这就是椅子与地面的数量关系．因此，可以用 θ 的函数表示椅脚与地面的距离，因为图形具有对称性，故不必用 4 个函数，而只用 2 个函数[设 $f(\theta)$ 表示椅脚 A 和 C 到地面的距离之和，设 $g(\theta)$ 表示椅脚 B 和 D 到地面的距离之和]即可.

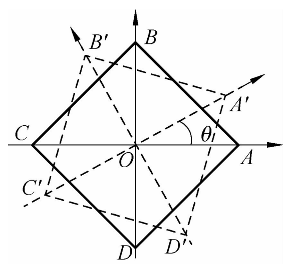

图 1-23　建立模型

2. 函数的性质

(1) 由假设 2 可知，函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

(2) 由假设 3 可知，对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，$f(\theta)g(\theta)=0$，不妨设 $f(\theta)>0$，$g(\theta)=0$.

(3) 当把椅子转动 $\frac{\pi}{2}$ 时，AC 与 BD 互换了位置，由假设 1 可知

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=g(0)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)$$

3. 把问题转化为数学命题

椅子的四只椅脚同时着地等价于存在一点 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$. 因此，原问题等价于以下命题：

命题 已知函数 $f(\theta)$ 与 $g(\theta)$ 是 θ 的非负连续函数，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，且满足：

(1) $f(\theta)>0, g(\theta)=0$；

(2) 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$，$f(\theta)g(\theta)=0$；

(3) $f(\pi/2)=g(0), g(\pi/2)=f(0)$.

则必存在一点 $\theta_0\in[0,2\pi]$，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

1.3.4 模型求证

(1) 求证：因为 $f(\theta)>0, g(\theta)=0$，所以 $f(\pi/2)=g(0)=0, g(\pi/2)=f(0)>0$.

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则在 $[0,\pi/2]$ 上连续且 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)>0, h(\pi/2)=f(\pi/2)-g(\pi/2)<0$. 由连续函数中值定理可知，必存在一点 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$，使 $h(\theta_0)=0$，即 $h(\theta_0)=g(\theta_0)$.

因为 $f(\theta_0)$ 与 $g(\theta_0)$ 至少有一个为零，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$.

(2) 模型的解的意义：在满足三点假设的前提下，证明了通过转动椅子，必定可使其在地面上放稳，而且转动(顺时针或逆时针)的角度不会超过 $90°$.

1.4 数学实验一：使用 MATLAB 作基本运算与绘制函数图像

1.4.1 实验任务

(1) 熟悉数学软件 MATLAB 的界面、基本功能和基本操作.

(2) 学习利用数学软件 MATLAB 作基本运算.

(3) 学习利用数学软件 MATLAB 绘制函数图像.

1.4.2 实验过程

1. 数学软件 MATLAB 简介

数学软件 MATLAB 是美国 MathWorks 公司开发的一款商业数学软件，具有强大的功能，主要用于算法开发、数据可视化、数据分析以及数值计算中，将人们从原先烦琐的手工计算中彻底解放出来. 下面主要介绍 MATLAB 的基本操作(以 MATLAB R2013b 版本为例进行介绍).

1) 软件的启动与运行

安装完 MATLAB 软件并激活后，该软件会在“开始”菜单中创建快捷方式. 单击“开始”→“所有程序”→MATLAB→R2013b→MATLAB R2013b 命令，运行 MATLAB 软件，并进入其主界面，如图 1-24 所示.

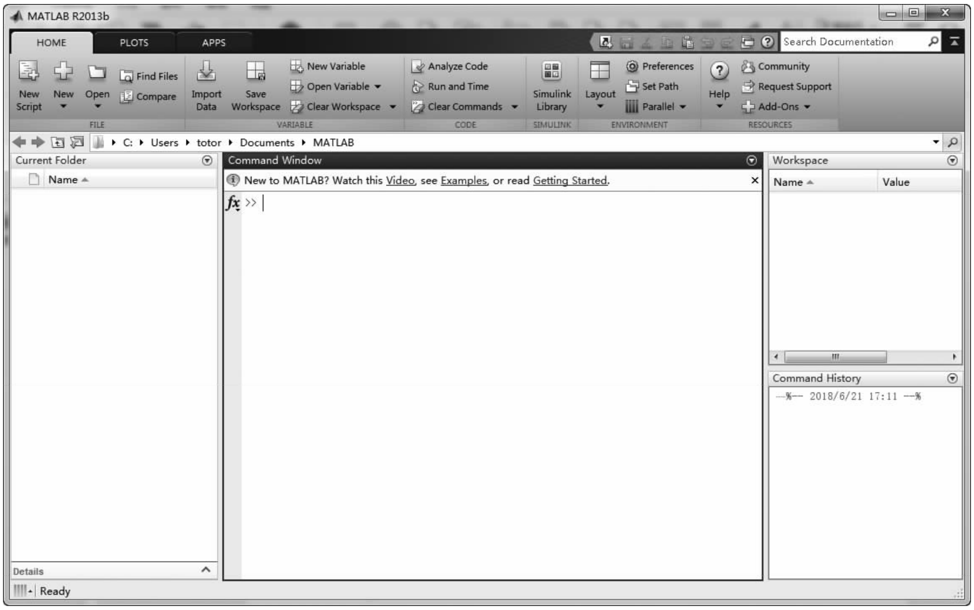

图 1-24

如图 1-24 所示，该界面主要由标题栏、选项卡、功能区、工具栏、导航窗格(Current Folder)、命令窗口(Command Window)、工作空间(Workspace)、命令历史(Command History)、状态栏等组成.

(1) 标题栏. 标题栏位于窗口的最上方，主要显示软件的名称以及“最小化”按钮、“最大化 / 还原”按钮、“关闭”按钮等.

(2) 选项卡. 包括 3 个选项卡，分别是主页(HOME)、绘制(PLOTS) 和应用(APPS)，每个选项卡下面包含功能区，是 MATLAB 软件众多功能的“集散地”.

(3) 功能区. 功能区分散在各个选项卡下，是众多命令的集合，用于实现不同的功能操作.

(4) 工具栏. MATLAB窗口中的工具栏分别位于两个位置，与选项卡同行显示的是快速工具栏，其上包括一些比较常用的按钮，如“保存”按钮、“剪切”按钮、“复制”按钮、“撤销”按钮等；位于功能区下方的是常规工具栏，主要包括“前进”(Forward) 按钮、“后退”(Back) 按钮、“上一级”(Up One Level) 按钮、“浏览”(Browse for folder) 按钮、地址栏等.

(5) 导航窗格(Current Folder). 该窗格中显示的是目录层级.

(6) 命令窗口(Command Window). 该窗口是工作主窗口，用于程序的输入和执行结果的显示.

(7) 工作空间(Workspace). 该窗口存放着图片的数组信息.

(8) 命令历史(Command History). 该窗格中显示了所有命令的输入和执行历史记录.

2) 输入与输出

启动 MATLAB 软件后，可以通过键盘在命令窗口(Command Window) 中输入对应的程序和命令，然后按 Enter 键，系统自动运算并输出结果. 例如，我们利用 MATLAB 计算“2＋3”的结果，可以直接在命令窗口中输入“2＋3”，然后按 Enter 键，即可得到计算结果，如图 1-25 所示.

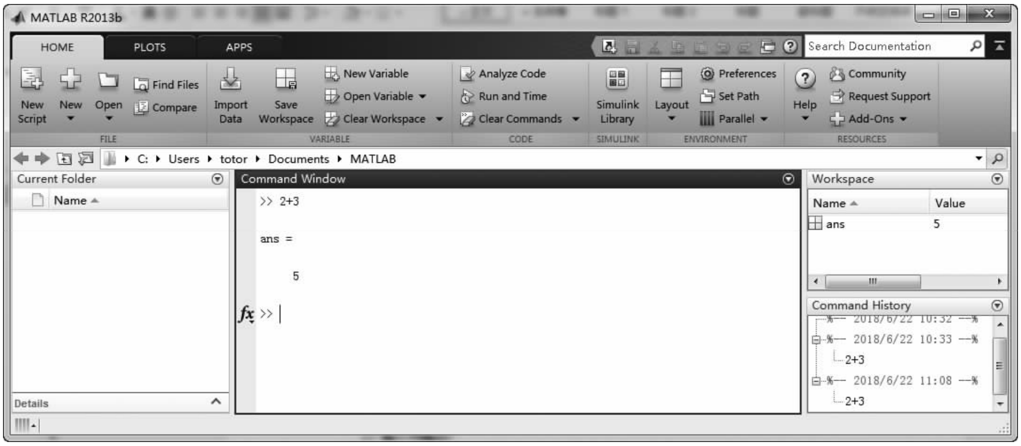

图 1-25

2. 基本运算

在 MATLAB 中,和、差、积、商、乘方运算分别用 +、-、*、/、^ 来表示,其运算顺序与一般运算的规则一致,即先乘方,后乘除,最后是加减,要改变次序可以使用小括号“()”.

操作实例 1 计算 $[4+2\times(5-1)]\div 2^2$.

在命令窗口中输入:

```
>> (4 + 2 * (5 - 1))/2^2
```

按 Enter 键,得到如下计算结果:

```
ans  =
      3
```

3. 绘制函数图像

1) 相关命令

在 MATLAB 中绘制二维曲线函数图形的命令,最基本的是 plot 和 fplot,其命令说明如表 1-1 所示.

表 1-1

命　　令	说　　明
plot(x,y)	绘制函数 $y=f(x)$ 的图像
fplot('fun',[a,b])	在区间 $[a,b]$ 上绘制函数 fun(函数表达式) 的图像

注意 fplot 命令必须已知函数解析式才能作图,而 plot 命令则可以对任何数据 (x,y) 作图.

2) 操作实例

操作实例 2 在同一个坐标系下画出两条曲线 $y=\sin(x+1)$ 和 $y=\cos x+1$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的图像.

解法 1

运行 MATLAB,在命令行窗口中输入:

```
>> fplot('[sin(x + 1),(cos(x) + 1)]',[0,2 * pi])    % 同一坐标系下,在[0,2π]上
                                                    绘制曲线 y = sin(x + 1) 和
                                                    y = cosx + 1 的图形
```

按 Enter 键,弹出如图 1-26 所示的图像窗口.

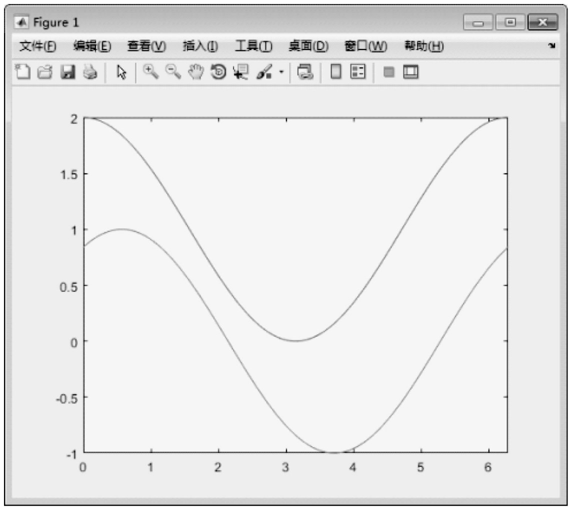

图 1-26

解法 2

在命令行窗口中输入:

```
x = 0:0.01:2 * pi;                    % 在 x 轴的区间[0,2π]上每隔 0.01 间隔取 x 点
>> plot(x,sin(x + 1),'g',x,(cos(x) + 1),'b')
                                      % 用绿色绘制 y = sin(x + 1) 图形,用蓝色绘制
                                        y = cosx + 1 图形(默认颜色为红色和蓝色)
```

按 Enter 键后,弹出如图 1-27 所示的图像窗口.

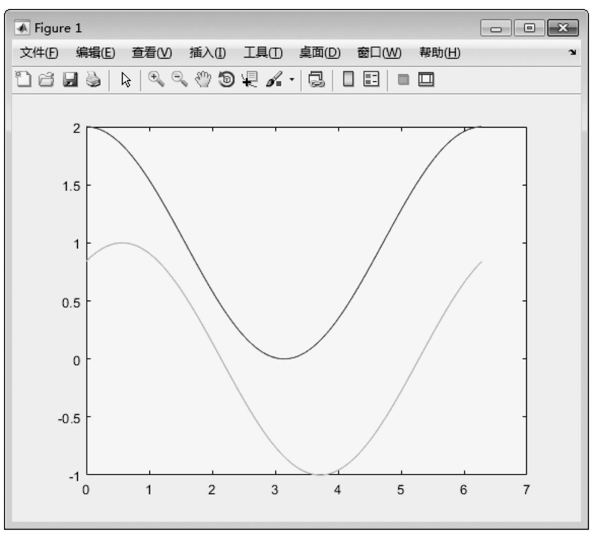

图 1-27

从图 1-26 和图 1-27 我们可以看出,图像上并没有显示出图例,我们既可以在弹出的图像窗口中通过相应菜单进行设置,也可以通过 legend 命令实现. 在命令行窗口中继续输入:

```
>> legend('y = sin(x + 1)','y = cos(x) + 1')
```

按 Enter 键,则可发现图像窗口中增加了相应的图例,如图 1-28 所示.

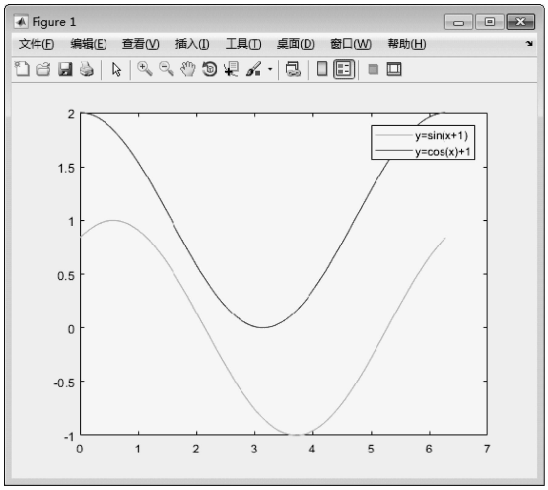

图 1-28

操作实例 3 　将屏幕窗口分成 4 个,用 subplot(m,n,k) 命令画 4 个子图,分别如下:

①$y=5x^4-3x^2+2x-7, x\in[-5,5]$.

②$y=|x^2-4x+2|, x\in[-1,5]$.

③$y=\ln(1+\sqrt{1+x^2}), x\in[-3,3]$.

④$y=x^2\cdot e^{-2x^2}, x\in[-3,3]$.

解

运行 MATLAB,在命令行窗口中输入:

```
>> subplot(2,2,1),fplot('5*x^4-3*x^2+2*x-7',[-5,5])
>> subplot(2,2,2),fplot('abs(x^2-4*x+2)',[-1,5])
>> subplot(2,2,3),fplot('log(1+sqrt(1+x^2))',[-3,3])
>> subplot(2,2,4),fplot('x^2*exp(-2*x^2)',[-3,3])
```

按 Enter 键,弹出如图 1-29 所示的窗口.

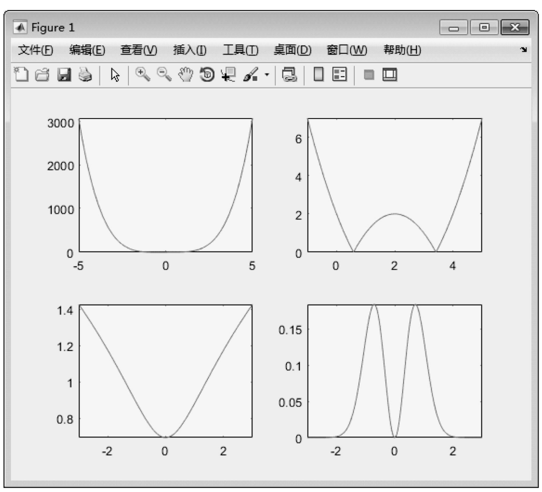

图 1-29

注意　默认情况下，窗口中的四个图像并不显示图像的标题，如果需要显示，可以自行在图像窗口中通过相应菜单添加. 另外，需要注意的是，subplot(m,n,k) 命令表示将屏幕窗口分成 $m\times n$ 个窗口的第 k 个窗口，窗口顺序为：由左至右，由上到下.

1.4.3　实验作业

1. 完成下列表达式的运算：

(1) $(2+3\sin\frac{\pi}{6})\div 3.25^2$；　　(2) $\log_5 2$.

2. 做出下列函数的图像：

(1) $f(x)=2x^3-3x+1, x\in[-1,2]$；　　(2) $g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

复 习 题 一

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则(　　).

A. $m>\dfrac{1}{2}$　　B. $m<\dfrac{1}{2}$　　C. $m>-\dfrac{1}{2}$　　D. $m<-\dfrac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$，则 $f(-1)$ 等于(　　).

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 填空题.

(1) 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是________.

(2) 已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，则 $f(x)=$________.

(3) 函数 $f(x)=4-2\cos\dfrac{1}{3}x$ 的最小值是______；$f(x)$ 取得最小值时，x 的值为______.

(4) 若 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$，则 $f(3)=$______.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求 $f(2)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-\frac{1}{2})$.

4. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？

(1) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$，　$g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；

(2) $f(x)=\sqrt{(1-x)^2}$，　$g(x)=1-x$；

(3) $f(x)=x$，　　$g(x)=\ln e^x$.

5. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=\sqrt{x-1}$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\log_4 x$；　　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

8. 已知 $f(x-1)=x^2+x+1$，求 $f(\dfrac{1}{x-1})$.

9. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且对于任意 x,y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 证明 $f(x)$ 为偶函数.

10. 某单位有汽车一辆，一年中的税款、保险费及司机工资等支出共为 a，另外，行驶单位路程需油费 b，试写出一年中平均每公里费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

11. 一物件由静止开始做直线运动，前 10 s 内做匀加速运动，加速度为 2 cm/s^2，10 s 后做匀速运动，运动开始时路程为零. 试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.

第 2 章　极限与连续

阅读与欣赏

中国早期的极限思想

在中国古代数学史上，朴素的极限思想占有非常重要的地位. 许多的哲学思想中都渗透着“极限思想”的光辉.

早在春秋战国时期(公元前770—前221年)，我国道家学派的代表人物庄子，在他的《庄子》“天下篇”中是这样记载的：一尺长的木棍，第一天取掉它的一半，还剩下它的二分之一尺，第二天在这剩余的二分之一尺中再取掉一半，还剩下它的四分之一尺…… 按照这样的方法一直取下去，木棍的长度会越来越小，但是无论剩余的木棍多小，永远也分不完，以至于到最后木棍长度几乎接近于零，但又永远不会等于零. 这就出现了我国早期的极限思想.

当然，在道家学派思想出现以前也曾出现过一些与道家学派不同的关于极限思想的观点. 如墨家观点就与庄子的观点不同，墨家提出一个“非半”的命题. 这个命题是这样得出的：将一线段按一半一半地无限分割下去，必将出现一个不能再分割的“非半”. 这个“非半”就是点. 墨家由此提出了有无限分割最后会达到一个“不可分”的思想. 这也是早期中国极限思想的火花.

公元3世纪，我国魏晋著名数学家刘徽创立了有名的“割圆术”，当他在注释《九章算术》时，他将极限思想创造性地应用到了数学领域. 下面就割圆术的具体方法做介绍：将一个圆周不断地进行分割，圆周分割得越细，圆内接多边形的边数越多，它的内接正多边形的周长就越接近该圆周. 按照这种思路不断地分割下去，一直到该圆周无法再分割为止，当分割到了圆内接正多边形的边数无限多的时候. 该圆的周长就与该圆周几乎重合了. 通过这种分割方法，刘徽得到了圆内接正3 027边形的面积. 通过这个过程，他求出了我国最早的圆周率，该圆周率为3.1416，这个数值是当时世界上最早也是最准确的圆周率数据. 后来刘徽把这种思想方法推广到了更多的有关圆的计算中. 刘徽的“割圆术”在人类历史上首次将极限和无穷小分割引入数学证明，成为人类文明史中不朽的篇章. 后来我国数学家祖冲之再次用这个方法把圆周率的值计算到小数点后七位. 这种对于某个值无限接近的思想，就为后来建立极限概念打好了基础.

在中国数学的发展史上，庄子、墨子、惠施、刘徽等天才数学家的数学研究和成就远远比不上与他们同时期的西方数学家(如：阿基米德、欧几里得等数学家). 原因在于我国古代经济的困顿使得只有很少人来学习文化知识，自然学数学的人也就更少了，数学理论研究并没有受到相应的重视. 农业社会的经济特点限制了古代人们对自然的探索与对理论的求索，从而也阻止了数学向理性发展的可能.

中国几千年的文化，成就了许多思想家、军事家和文人，其中也不乏能工巧匠，唯独缺乏用符号与算式演绎事物内在规律和关系的数学家. 由于中国古代的数学家们看重实用，因而古代数学只用于计算、测量等方面，并没有上升到理论的高度，因而也没有形成系统的理论体系. 中国古代很多思想止于数学大门之外，令人非常惋惜.

2.1　数列的极限

极限的概念是由求实际问题的精确解答而产生的. 我国古代数学家刘徽于公元 263 年创立了“割圆术”,它是借助于圆的一串内接正多边形的面积去逼近圆的面积,这就是极限思想最早在几何上的应用. 同时这也使得我们认识到极限方法是在解决实际问题中逐渐形成的,它已成为高等数学中的一种基本方法,有必要做进一步的阐明.

2.1.1　数列极限的定义

在中学,我们已经学过数列的概念. 按一定顺序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为无穷数列,简称数列,简记为 $\{x_n\}$. 其中的每个数称为数列的项,x_n 称为数列的通项(或一般项),n 称为数列的项数.

现在我们来考察当项数 n 无限增大时(即 $n\to\infty$ 时),对应的一般项 x_n 的变化趋势. 首先我们来看几个数列:

(1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$

(2) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \cdots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \cdots$

(3) $1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

(4) $2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots$

为便于观察,我们在平面直角坐标系中做出以上 4 个数列的图形,分别如图 2-1 ～ 图 2-4 所示(为了便于展示效果,图形中横纵坐标轴取值比例特意采取不同标准).

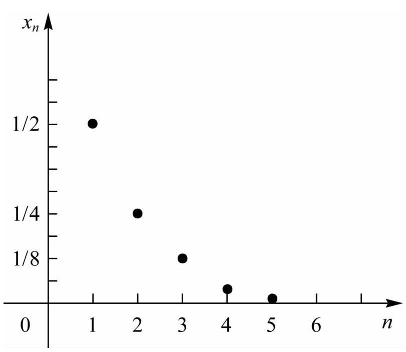

图 2-1

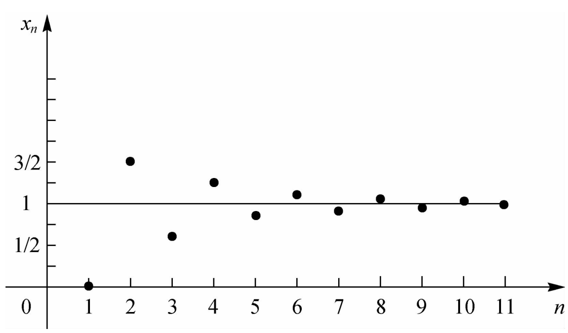

图 2-2

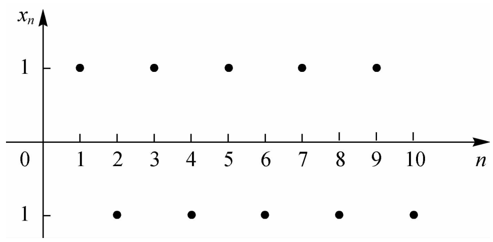

图 2-3

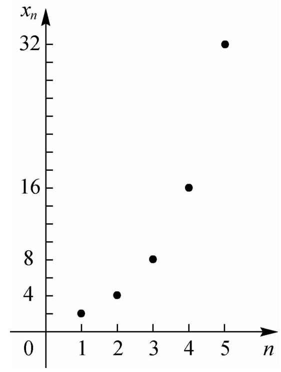

图 2-4

从图 2-1 中可以看出,当 n 无限增大时,数列通项 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 的值无限趋于 0.

从图 2-2 中可以看出,当 n 无限增大时,数列通项 $x_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 的值无限趋于 1.

从图 2-3 中可以看出,当 n 无限增大时,数列通项 $x_n=(-1)^{n+1}$ 的值在 1 与 −1 之间振荡.

从图 2-4 中可以看出,当 n 无限增大时,数列通项 $x_n=2^n$ 的值趋于 $+\infty$.

将数列的上述变化趋势用数学语言表示,就得到了数列极限的定义.

定义 2.1　对于数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时,通项 x_n 无限接近于某个确定的常数 A,则称 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty)$$

若数列 $\{x_n\}$ 没有极限,则称该数列发散.

由上面的定义可知,数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ 的极限为 0,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$;数列 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right\}$ 的极限为 1,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$;数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 与 $\{2^n\}$ 都不趋于某个确定的常数,因此都是发散的,且数列 $\{(-1)^{n+1}\}$ 的**变化趋势**无法用极限形式给出,而数列 $\{2^n\}$ 的变化趋势可表示为 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n=+\infty$.

例 2-1　观察下列数列当 $n\to\infty$ 时的极限.

(1) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$;

(3) $x_n=2n+1$;　　(4) $x_n=(-1)^n$.

解　对于每一个数列,我们先将数列列出来,再根据极限的定义,观察各个数列在 $n\to\infty$ 时变化趋势,可得

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;

(2) $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3^2},\dfrac{1}{3^3},\cdots,\dfrac{1}{3^n},\cdots$　　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$;

(3) $3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots$　　$\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)$ 不存在;

(4) $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$　　$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

应当注意,在一个变量前加上记号“lim”,表示对这个变量进行取极限运算,若变量的极限存在,则其所反映的就不再是这个变量本身而是它的极限,即变量无限接近的那个数. 例如,设 A 表示圆面积,S_n 表示圆内接正 n 边形面积,则知当 n 较大以后,总有 $S_n \approx A$,但 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 就不再是 S_n,而是它的极限 —— 圆面积 A,所以它的表达式 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不含任何近似成分.

2.1.2　收敛数列的性质

定理 2.1(极限的唯一性)　收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限是唯一的.

定理 2.2(收敛数列的有界性)　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界.

推论 2.1　有界数列未必收敛,无界数列必定发散.

例如,数列 $\{(-1)^n\}$ 是有界数列,但它是发散的;数列 $\{2^n\}$ 是无界数列,且它必定是发散的.

习题 2.1

1. 当数列项数无限增加时,观察下列各数列的变化趋势.

(1)$1,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{4}},\dfrac{1}{\sqrt{5}},\cdots$;

(2)$-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},-\dfrac{1}{32},\cdots$;

(3)$\cos\dfrac{\pi}{2},\cos\pi,\cos\dfrac{3}{2}\pi,\cos2\pi,\cos\dfrac{5}{2}\pi,\cdots$;

(4)$7+\dfrac{5}{10},7+\dfrac{5}{10^2},7+\dfrac{5}{10^3},7+\dfrac{5}{10^4},7+\dfrac{5}{10^5},\cdots$;

(5)$\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{3},\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{5},\sqrt[3]{6},\cdots$.

2. 作出下面各数列在数轴上的点,并说出哪些数列有极限,哪些没有.

(1)$x_n=\dfrac{1}{3^n}$;　(2)$x_n=\dfrac{n}{n+2}$;　(3)$x_n=(-1)^n n$;

(4)$x_n=-\dfrac{1}{n}$;　(5)$x_n=n-(-1)^n$;　(6)$x_n=\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

3. 根据数列极限的定义,判断下列无穷数列的极限.

(1)-1 是不是数列 $x_n=-1$ 的极限?

(2)2 是不是数列 $x_n=\dfrac{8n+11}{4n+5}$ 的极限?

(3)-3 是不是数列 $x_n=\dfrac{2-3n}{n+1}$ 的极限?

(4)5 是不是数列 $x_n=\dfrac{5\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$ 的极限?

2.2　函数的极限

在上一节中,我们研究了数列的极限,在本节中,我们将研究一般函数的极限问题.

2.2.1 函数极限的定义

数列是定义在正整数集上的函数,数列极限研究的是当自变量 $n\to\infty$ 时,一般项 $x_n=f(n)$ 的极限值. 而对于定义在区间上函数 $f(x)$ 的极限,我们主要研究当自变量 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 两种变化趋势下,函数 $f(x)$ 的极限.

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时的变化趋势. 由图 2-5 可以看出,当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于零.

定义 2.2 一般地,如果当自变量 x 的绝对值无限增大(即 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty)$$

注意 $x\to\infty$ 表示"$|x|$ 无限增大",指 x 既可以取正值而无限增大(记为 $x\to+\infty$),同时也可以取负值而绝对值无限增大(记为 $x\to-\infty$).

定义 2.3 类似地,如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty)\right]$$

同理观察图 2-5,可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

不难证明,$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且相等,即

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A$$

例 2-2 讨论当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=2^x$ 的极限.

解 做出函数 $y=2^x$ 的图像(见图 2-6),可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}2^x=0$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$ 不存在.

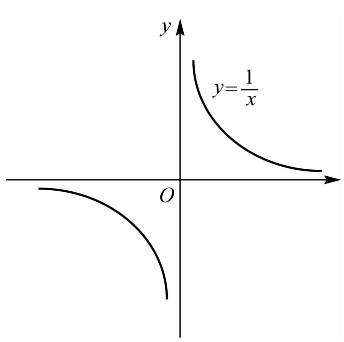

图 2-5

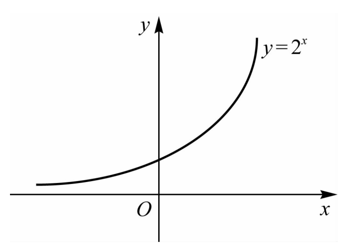

图 2-6

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

微课

$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

先从图像上考察两个函数 $f(x) = x + 2$ 与 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$，如图 2-7 所示.

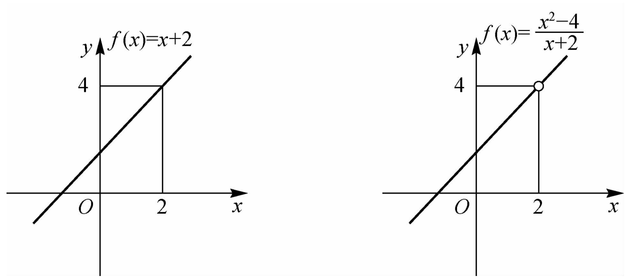

图 2-7

从图 2-7 中不难看出，当 x 无限接近于 2 时，$f(x) = x + 2$ 无限趋近于 4，$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ 也无限趋近于 4. 但函数 $f(x) = x + 2$ 和 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ 是两个不同的函数，$f(x) = x + 2$ 在 $x = 2$ 处有定义，而 $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ 在 $x = 2$ 处无定义. 这就是说，极限是否存在与其在 $x = 2$ 处是否有定义无关.

一般地，我们有以下定义：

定义 2.4　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0)$$

在上述 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限中，x 既是从 x_0 的左侧趋于 x_0 的，又是从 x_0 的右侧趋于 x_0 的. 但有时只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋于 x_0（记作 $x \to x_0^-$）的情形，或 x 仅从 x_0 的右侧趋于 x_0（记作 $x \to x_0^+$）的情形. 于是，就引进了左右极限的概念.

（1）当自变量 x 小于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 - 0) = A$$

（2）类似地，当自变量 x 大于 x_0 而无限趋近于 x_0 时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0 + 0) = A$$

不难证明，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A$$

注意　当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 都存在，但不相等，或当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 中至少一个不存在时，$f(x)$ 在 x_0 处的极限不存在.

例 2-3　设函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + x^2, x \geqslant 1 \\ 1 + 2x, x < 1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$，并由此判断 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是

否存在.

解　$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(2+x^2) = 2+1^2 = 3$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(1+2x) = 1+2\times1 = 3$

即 $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 3$.

由函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处极限存在的充要条件可知，$\lim\limits_{x\to1} f(x) = 3$.

例 2-4　设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2+1, x>0 \\ 0, \quad x=0 \\ x-1, x<0 \end{cases}$. 证明：当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

证明　$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1) = 0+1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x-1) = 0-1 = -1$

因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to0^-} f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ 不存在.

2.2.2　极限的四则运算法则

定理 2.3(极限四则运算法则)　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot \lim g(x)$；

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

微课
利用极限的四则运算求简单的极限

法则(1) 和法则(2) 均可推广到有限个函数的情形，并有如下推论.

推论 2.2　$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x)$　(C 为常数).

推论 2.3　$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$　(n 为正整数).

注意　"lim"是自变量变化过程中的简记形式，它可以是数列 $\{x_n\}$ 中的 $n\to\infty$，也可以是函数 $f(x)$ 中的 $x\to x_0$(包括 $x\to x_0^+$ 或 $x\to x_0^-$)，$x\to\infty$(包括 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$) 等.

例 2-5　求极限 $\lim\limits_{x\to2}(x^2+3x-2)$.

解　$\lim\limits_{x\to2}(x^2+3x-2) = \lim\limits_{x\to2}x^2 + \lim\limits_{x\to2}3x - \lim\limits_{x\to2}2 = (\lim\limits_{x\to2}x)^2 + 3\lim\limits_{x\to2}x - 2$

$= 2^2 + 3\times2 - 2 = 8.$

一般地，若 $f(x)$ 为多项式函数，则对任意 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，都有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

例 2-6　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2}{x^2-9}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-5x+6}$.

解　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to2}(x^2-9) = -5\neq0$，所以

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3+2}{x^2-9} = \frac{\lim\limits_{x\to2}(x^3+2)}{\lim\limits_{x\to2}(x^2-9)} = \frac{2^3+2}{2^2-9} = -2$$

(2) 当 $x\to3$ 时分子和分母的极限均为零，但可约去公因子 $x-3\neq0$，即

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x-2}=1$$

一般地，设 $P(x),Q(x)$ 都是多项式函数，则称$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理分式函数. 有如下结论：

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}, & \text{当 } Q(x_0)\neq 0 \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } P(x_0)\neq 0,Q(x_0)=0 \text{ 时}\\ \text{约去公因式}(x-x_0), & \text{当 } P(x_0)=0,Q(x_0)=0 \text{ 时}\end{cases}$$

例 2-7 求下列函数的极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-8x^2+1}{4x^5+x}$； (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}$； (3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}$.

解 (1) 当 $x\to\infty$ 时，分子分母的极限均不存在，为无穷大，不能直接应用运算法则. 将分子分母同除以 x 的最高次幂 x^5，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2+1}{4x^5+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}}{4+\dfrac{2}{x^4}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

(2) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^3，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-1}{7x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{7+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{7}=0$$

(3) 分子分母同除以 x 的最高次幂 x^4，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}}$$

由于分子极限为 1，分母极限为 0，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x+1}{5x^2-1}=\infty$$

一般地，当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m,n$ 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时}\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}\end{cases}$$

注意 (1) 运用极限法则时，必须注意只有各项极限都存在（对商，还要求分母的极限不为零）才能使用极限的四则运算法则.

(2) 若所求极限呈现“$\dfrac{0}{0}$”“$\dfrac{\infty}{\infty}$”“$\infty-\infty$”等形式不能直接应用极限法则，必须先对原式进行恒等变形（约分、通分、有理化、变量代换、分子与分母同除以分子与分母的最高次幂），然后再利用极限法则求极限.

2.2.3　无穷小量与无穷大量

微课
无穷小与无穷大

1. 无穷小

1）无穷小的定义

考察函数 $f(x)=2x-4$ 当 $x\to 2$ 时，$f(x)$ 趋近于零，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 趋近于零.

定义 2.5　若在 x 的某一变化趋势下，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 x 的这种变化趋势下的**无穷小量**，简称**无穷小**.

注意　（1）无穷小是一个以零为极限的变量. 它表达的是量的变化状态，而不是量的大小，一个量无论多么小都不是无穷小，零是唯一可看成无穷小的常数.

（2）无穷小与自变量的变化趋势有关. 称一个函数是无穷小，必须明确指出自变量的变化趋势，因为对于同一个函数，在自变量的不同变化趋势下，其极限值不同.

例如，当 $x\to 0$ 时，函数 $\sin x$ 是无穷小；但当 $x\to 1$ 时，函数 $\sin x$ 不是无穷小.

2）无穷小的性质

性质 2.1　有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

性质 2.2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2.4　常数与无穷小的乘积也是无穷小.

推论 2.5　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

例 2-8　求 $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\sin\dfrac{1}{x}$.

解　因为 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，又 $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cdot\sin\dfrac{1}{x}=0$.

例 2-9　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}=\dfrac{1}{2}$.

此例说明无穷多个无穷小之和不一定是无穷小.

3）无穷小量阶的比较

无穷小量虽然都是趋近于零的变量，但不同的无穷小趋近于零的速度却不一定相同，有时可能相差很大. 观察两个无穷小比值的极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\infty,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

在 $x\to 0$ 的过程中，$x^2\to 0$ 比 $x\to 0$“快些”，而 $\sin x\to 0$ 与 $x\to 0$“快慢相仿”. 由此，我们定义如下：

设 α、β 是同一变化过程中的无穷小量，则：

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$；

如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$，就说 β 是和 α 同阶的无穷小；

如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=1$,就说 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha \sim \beta$.

例 2-10 当 $x \to 0$ 时,对无穷小 x^2 与 x 进行比较.

解 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$,所以当 $x\to 0$ 时,x^2 是比 x 高阶的无穷小,即 $x^2=o(x)\ (x\to 0)$.

定理 2.4 设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

定理 2.4 表明,求两个无穷小之比的极限时,分子及分母都可用等价无穷小来代替. 因此,如果用来代替的无穷小选取适当,则可使计算简化.

例 2-11 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3+3x}$.

解 当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}$$

注意 在求极限的过程中,一个无穷小量可以用与其等价的无穷小量代替,但只能代替乘积中的项,不能代替和差中的项.

2. 无穷大

1) 无穷大的定义

定义 2.6 在 x 的某一变化趋势下,若函数 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称函数 $f(x)$ 为在 x 的这种变化趋势下的无穷大量,简称**无穷大**. $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 的无穷大,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$.

例如,当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{1}{x-1}$ 的绝对值无限增大,故$\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷大,即 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$;当 $x\to 0^+$ 时,$\ln x$ 取负值但其绝对值无限增大,故 $\ln x$ 为$x\to 0^+$ 时的负无穷大,即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

注意 无穷大是一个绝对值无限增大的变量,而不是绝对值很大的常量.

2) 无穷大与无穷小的关系

定理 2.5 在自变量的同一变化过程中有以下两种情况:

(1) 如果函数 $f(x)$是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

(2) 如果函数 $f(x)$是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小.

例 2-12 讨论极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x^2)=+\infty$ 是无穷大. 由定理 2.5 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$$

习题 2.2

1. 作出下列函数的图像，并判断其极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$；　(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$；　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$.

2. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小或无穷大？

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{x}$；　(3) $y=\tan x$；　(3) $y=\ln x$.

3. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to2}(-2)$；　(2) $\lim\limits_{x\to1}(x^3-x^2+x-1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-16}{x-4}$；　(4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$；

(5) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3})$；　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$；

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4+3x^2-10}{3x^4+x^3-x^2+1}$；　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+5}{100x^2+15}$.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x-1, x\leqslant0\\2x+b, x>0\end{cases}$. 要使极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，则 b 应取何值？

5. 已知$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-ax+b}{2-x}=1$，试求 a 与 b 的值.

微课
两个重要函数极限

2.3　两个重要极限

2.3.1　第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

当 x 取一系列趋于零的数值时，得到 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一系列对应数值，如表 2-1 及图 2-8 所示.

表 2-1

x/rad	-1.0	-0.7	-0.3	-0.01	$\cdots\to0\leftarrow\cdots$	0.01	0.3	0.7	1.0
$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 47	0.920 31	0.985 07	0.999 98	$\cdots\to1\leftarrow\cdots$	0.999 98	0.985 07	0.920 31	0.841 47

从表 2-1 及图 2-8 可以看出，当 x 无限趋于零时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的值无限趋于 1. 这说明了当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 的极限存在且等于 1，即$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

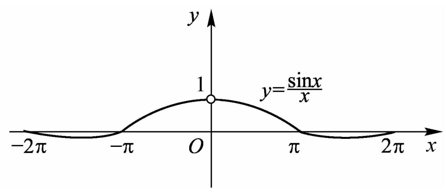

图 2-8

该极限的基本特征是：分子、分母的极限值均为零，即 $\frac{0}{0}$ 型，且分母中的变量与分子正弦函数中的变量相同.

根据它的基本特征，可写出它的推广形式如下：

若 $\varphi(x)\neq 0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\frac{\sin[\varphi(x)]}{\varphi(x)}=1$，其中 x_0 可以为 0、常数或无穷大.

下面给出利用第一个重要极限来求极限的几个例子.

例 2-13 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$

例 2-14 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{2}{3}.$

例 2-15 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$

思考 能用第一个重要极限计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 吗？为什么？

2.3.2 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

先观察当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势，见表 2-2.

表 2-2

x	$-\infty\leftarrow\cdots$	$-1\ 000\ 000$	$-10\ 000$	-10	1	10	10 000	1 000 000	$\cdots\to+\infty$
$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.718 28	2.718 40	2.867 97	2	2.593 74	2.718 15	2.718 28	…

从上表可以看出，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋于 2.718 28…

($\mathrm{e}=2.718\ 281\ 828\cdots$). 这说明了当 $x\to\infty$ 时，函数$(1+\frac{1}{x})^x$ 的极限存在且等于 e. 即

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$$

在上式中，设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$，有$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$.

该极限的基本特征是：底数的极限值为 1，指数的极限是无穷大，即 1^∞ 型，且指数与底数中第二项[记为 $\varphi(x)$] 互为倒数，底数为 $1+\varphi(x)$.

根据它的基本特征可以把它推广为下面的形式：

若 $\varphi(x)\neq 0$，而$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，则$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$. 其中，$x_0$ 可以为 0、常数或无穷大.

下面给出利用第二个重要极限来求极限的几个例子.

例 2-16　求$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]^3=\mathrm{e}^3$.

例 2-17　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$.

例 2-18　求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}]^3=\mathrm{e}^3$.

习题 2.3

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$；

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$；

(8) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\frac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{3t}}$.

2.4　函数的连续性

自然界中许多现象的变化过程都是连续不断的，如气温的变化、生物的生长等都是随着时间的变化连续变化的，这种现象反映在数学上就是函数的连续性. 这一节我们讨论如何把这种连续变化的现象用数学的方法描述出来.

2.4.1　函数连续性的概念

微课
函数在一点的连续性

函数的连续性是与函数的极限密切相关的重要概念，我们可以用极限来给出函数连续性的定义. 下面先引入增量的概念，然后再引出函数连续性的定义.

1. 增量的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义. 当自变量 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值 y 相应地从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0+\Delta x)$（见图 2-9），因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

其中，Δx 称为自变量的增量，Δy 称为函数值的增量.

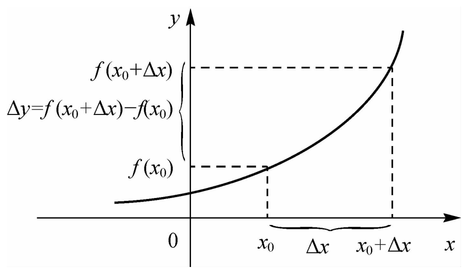

图 2-9

注意　增量 Δx、Δy 可以是正，也可以是负.

2. 连续的定义

从自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 与函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的关系出发，我们给出函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义.

定义 2.7　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

如果设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$$

所以 $\Delta y\to 0$ 就相当于 $f(x)\to f(x_0)$. 于是我们可得出下面的等价定义：

定义 2.8　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在，且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

由定义 2.8 可知，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 有意义.

(2) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

由定义 2.8 可以看出，求连续函数在某点的极限，只需求出函数在该点的函数值即可.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，是因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

3. 左连续、右连续的概念

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

显然，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

如果函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，或者说函数 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 内的连续函数. 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点连续，并且在左端点 $x = a$ 处右连续，在右端点 $x = b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，闭区间 $[a,b]$ 称为函数 $f(x)$ 的连续区间.

连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线.

例 2-19　判定函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ 2x + 1, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处的连续性.

解　因为 $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1$，$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2x + 1) = 1$，于是

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处左连续且右连续，从而 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

例 2-20　证明函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

证明　设 x 为区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点，则有

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为当 $\Delta x \to 0$ 时，Δy 是无穷小与有界函数的乘积，所以 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

这就证明了函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点 x 处都是连续的.

同理可证，函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

由函数在一点 x_0 处连续的定义及 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$，有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

也就是说，对于连续函数，极限符号与函数符号可以互换.

例如，求 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x$，因为 $y = \sin x$ 是连续函数，所以 $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

2.4.2　函数的间断点

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处间断，称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

(1) 在 $x = x_0$ 处没有定义；

(2) 虽在 $x = x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) 虽在 $x = x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处为不连续，而称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

下面我们通过例子说明函数间断点的类型.

例 2-21 函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处没有定义，所以点 $x=1$ 是函数的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$，如果补充定义 $f(1)=2$，则所给函数在 $x=1$ 处连续. 我们称 $x=1$ 为该函数的可去间断点. 做出其图像如图 2-10 所示.

例 2-22 设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, x\neq1\\ \dfrac{1}{2}, x=1\end{cases}$，因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点. 做出其图像如图 2-11 所示.

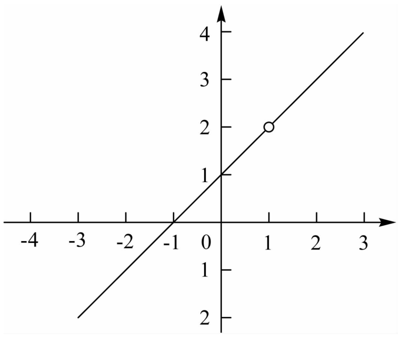

图 2-10

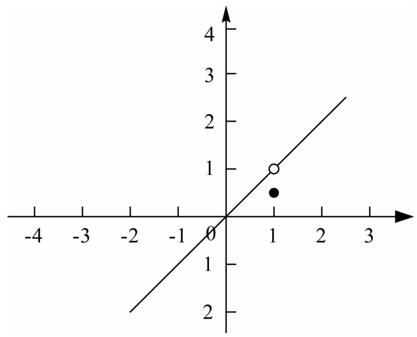

图 2-11

如果改变函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的定义，令 $f(1)=1$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，我们也称 $x=1$ 为该函数的可去间断点.

例 2-23 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x\geqslant0\\ x-2, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+2)=2=f(0)$，所以 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处右连续但不左连续，故 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续. 因为 $y=f(x)$ 的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象，所以我们称 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 2-24 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，所以点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $\tan x$ 的间断点. 因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故称 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

例 2-25 函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，所以点 $x=0$ 是函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ 的间断点.

当 $x\to0$ 时，函数值在 -1 与 1 之间变动无限多次，所以我们称点 $x=0$ 为函数 $\sin\dfrac{1}{x}$ **的振荡间断点.**

就一般情况而言，通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0-0)$ 及右极限 $f(x_0+0)$ 都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**. 不是第一类

间断点的任何间断点,称为**第二类间断点**. 在第一类间断点中,左、右极限相等者称为可去间断点,不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

2.4.3　闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数,在理论和应用中有很多十分重要的性质. 下面对这些性质进行简单介绍.

1. 最值性质

对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,如果有 $x_0 \in I$,使得对于任一 $x \in I$,都有

$$f(x) \leqslant f(x_0)[f(x) \geqslant f(x_0)]$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(**最小值**).

例如,函数 $f(x)=1+\cos x$ 在区间$[0,2\pi]$上有最大值 2 和最小值 0. 又如,函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$ 内有最大值 1 和最小值 -1. 在开区间$(0,+\infty)$ 内,$\operatorname{sgn}x$ 的最大值和最小值都是 1. 但函数 $f(x)=x$ 在开区间(a,b) 内既无最大值又无最小值.

定理 2.6(最大值和最小值定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上必有最大值和最小值.

注意　*如果函数在开区间内连续,或函数在闭区间上有间断点,那么函数在该区间上就不一定有最大值或最小值.*

例如,函数 $y=x$ 在开区间$(1,2)$ 内没有最大值和最小值.

又如,分段函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0 \leqslant x<1 \\ 1, & x=1 \\ -x+3, & 1<x \leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间$[0,2]$ 上无最大值和最小值.

定理 2.7(有界性定理)　在闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

2. 介值性质

如果 x_0 使 $f(x_0)=0$,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**零点**.

定理 2.8(零点定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号[即 $f(a)\cdot f(b)<0$],那 么在开区间(a,b) 内至少有一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$.

定理 2.9(介值定理)　设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续,且在该区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间(a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

定理 2.9 的几何意义:连续曲线弧 $y=f(x)$,$x\in[a,b]$ 与水平直线 $y=C$[C 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间] 至少交于一点.

推论 2.6　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

例 2-26　证明方程 $e^x\cos x=0$ 在$[0,\pi]$ 上至少有一个实数根.

证明　令 $f(x)=e^x\cos x$,显然 $f(x)$ 在$[0,\pi]$ 上连续.

$\because$　$f(0)=e^0\cos 0=1>0$,$f(\pi)=e^\pi\cos\pi=-e^\pi<0$

$\therefore$　由零点定理知,在开区间$(0,\pi)$ 上至少有一点 ξ,使得

$$f(\xi)=e^{\xi}\cos\xi=0$$

故方程 $e^x\cos x=0$ 在$[0,\pi]$至少有一个实数根.

习题 2.4

1. 求函数 $y=x^2-\frac{1}{2}x$，当 $x=1,\Delta x=0.5$ 时的改变量.

2. 根据定义，证明下列函数在 $x=1$ 处连续.

(1) $f(x)=x+1$；　(2) $f(x)=|x|$；　(3) $f(x)=\begin{cases}2x^2-1, & x\geqslant 1\\ x, & x<1\end{cases}$.

3. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x}}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\sin x$；

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 1}[\sqrt{1+\ln x}+(x-1)^{\frac{3}{2}}]$.

4. 求下列函数的间断点，并说明它是第一类间断点，还是第二类间断点.

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

5. 求证 $x^5-3x=1$ 至少有一个实根介于 1 与 2 之间.

2.5　应用示例——城市垃圾的处理问题

2.5.1　问题提出

根据某城市某一年年末的统计资料显示，到该年年末，该城市已堆积垃圾达到 100 万吨. 根据预测，从该年起该城市还将以每年 5 万吨的速度产生新的垃圾. 如果从第二年起该城市每年处理上一年堆积垃圾的 20%，那么长此以往，该城市的垃圾能否被全部处理完成？

2.5.2　解答过程

设该年以后的每年的垃圾数量分别为 a_1、a_2、a_3、……，根据题意，有：

$$a_1=100(1-20\%)+5=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^1+5$$

$$a_2=a_1\times 80\%+5=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^2+5\times\frac{4}{5}+5$$

$$a_3=a_2\times 80\%+5=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^3+5\times\left(\frac{4}{5}\right)^2+5\times\frac{4}{5}+5$$

以此类推，$n(n\to\infty)$ 年后的垃圾数量为：

$$a_n=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+5\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}+\cdots+5\times\frac{4}{5}+5$$

根据数列求和即极限知识可知：

$$a_n=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+5\times\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}=100\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+25\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=25$(万吨).

随着时间的推移,按照这种方法并不能将所有的垃圾处理完,剩余的垃圾将会维持在某一个固定的水平.

2.6　数学实验二:使用 MATLAB 求极限

2.6.1　实验任务

学习利用数学软件 MATLAB 求极限.

2.6.2　实验过程

1. 相关命令

MATLAB 中有关求函数极限的命令如表 2-3 所示.

表 2-3

命　　令	说　　明
limit(fun,x,−inf)	求函数 fun 在 $x\to-\infty$ 时的极限
limit(fun,x,inf)	求函数 fun 在 $x\to+\infty$ 时的极限
limit(fun,x,a)	求函数 fun 在 $x\to a$ 时的极限
limit(fun,x,a,'right')	求函数 fun 在 a 处的右极限
limit(fun,x,a,'left')	求函数 fun 在 a 处的左极限

2. 操作实例

操作实例 1　利用 MATLAB 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$.

解

(1) 运行 MATLAB,在命令行窗口中输入:

```
>> syms x                        % 定义符号变量
>> limit(atan(x)/x,x,0)          % 求函数在 x→0 时的极限
```

按 Enter 键，即可计算出如下结果：

```
ans =
1
```

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1$.

(2) 在命令行窗口中输入：

```
>> syms x                              % 定义符号变量
>> limit(((x + 1)/(x - 1))^x,x,inf)    % 求函数在 x → ∞ 时的极限
```

按 Enter 键，即可计算出如下结果：

```
ans =
exp(2)
```

即$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x=e^2$

(3) 在命令行窗口中输入：

```
>> syms x                              % 定义符号变量
>> limit((exp(x) - 1)/x,x,0)           % 求函数在 x → 0 时的极限
```

按 Enter 键，即可计算出如下结果：

```
ans =
1
```

即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

操作实例 2　利用 MATLAB 判断下列函数的极限是否存在：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$.

解

(1) 运行 MATLAB，在命令行窗口中输入：

```
>> syms x                              % 定义符号变量
>> limit((x^3 - 1)/(x - 1),x,1)        % 求函数在 x → 1 时的极限
```

按 Enter 键，即可计算出如下结果：

```
ans =
3
```

即$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$.

(2) 在命令行窗口中输入：

```
>> syms x                              % 定义符号变量
>> f1 = limit(exp(1/x),x,0,'left')     % 求函数在 x = 0 处的左极限 f1
```

按 Enter 键，即可计算出左极限的结果：

```
f1 =
0
```

即 $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0.$

继续在命令行窗口中输入：

```
>> f2 = limit(exp(1/x),x,0,'right')
```

按 Enter 键，即可计算出右极限的结果：

```
f2 =
Inf
```

即 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 也不存在.

2.6.3　实验作业

求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

复 习 题 二

1. 选择题

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$（$A$ 为有限值），则下列哪个关系非恒成立？(　　)

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=2A$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A^2$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时，若 $f(x)$(　　).

A. 不是无穷大，则必为有界　　B. 极限不存在，则必为无界

C. 是无界的，则必为无穷大　　D. 存在极限，则必有界

(3) 当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $\sin(2x^2+x)$ 是 x 的(　　)无穷小.

A. 高阶　　B. 低阶

C. 同阶但非等价　　D. 等价

2. 填空题

(1) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 a 等于________.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{k}{x}}=e^2$，则 k 等于________.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$________________.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^2+3}=$________________.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+5}{x^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^2+1}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$.

4. 已知$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a 和 b 的值.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

6. 确定常数 k 的值，使函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ k, & x=2\end{cases}$ 在 $x=2$ 处连续.

7. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 是否连续，若不连续，指出其间断点，并说明间断点的类型.

8. 证明：方程 $x^3+2x=6$ 在 1 和 3 之间至少有一根.

第 3 章　导数与微分

阅读与欣赏

数学大师 —— 卡尔·魏尔斯特拉斯

魏尔斯特拉斯(Weierstrass)是德国数学家,1815 年 10 月 31 日生于威斯特法伦州的奥斯滕费尔德,1897 年 2 月 19 日卒于柏林.

魏尔斯特拉斯是一位海关官员之子,在青年时代已显示出对语言和数学的才华.但是1834 其父却把他送到波恩大学学习法律与财政学.由于事与愿违,他精神萎靡,把时间消磨在击剑和饮酒之中,4 年后未获得学位返家.1839 年为取得中学教师资格而进入明斯特学院,并在数学家古德蔓指导下自修数学.1841 年通过考试获得中学教师的职务,先后在蒙斯特、达赤克郎、布伦斯堡等中小城镇的中学任教达 15 年之久.

魏尔斯特拉斯酷爱数学,但白天有繁重的教学任务,只好利用晚上刻苦钻研数学.虽然他废寝忘食地研究数学,写出过不少数学论文,但由于只是一位中学教师而未受到科学界的重视,直到 1854 年他发表了《关于阿贝尔函数理论》的论文,成功地解决了椭圆积分的逆转问题,才轰动了数学界.柯尼斯堡大学也因此立即授予他名誉博士学位.1856 年 10 月他被聘为柏林大学助理教授,1864 年成为该校教授,这一职位一直保持到 1897 年他去世.此外,他还被选为法国科学院和柏林科学院院士.

魏尔斯特拉斯是一位优秀教师.他对花费在初等数学上的岁月从不感到遗憾,他的杰出教学才能不仅表现在中学教学上,而且也表现在高等数学的教学上.他尽管已经成名,但仍保留着早年的生活情趣 —— 喜欢喝啤酒,经常跟他的学生在一起聚会,无论是有才气的学生还是一般的学生,他都乐于给他们以帮助和指导.他德高望重,晚年备受人们的推崇.

魏尔斯特拉斯的主要贡献在函数论和分析学方面.在 1854 年发表的《关于阿贝尔函数理论》的论文中,解决了椭圆积分的逆转问题,引起数学界的重视.1856 年发表的《阿贝尔函数理论》进一步解决了椭圆积分的雅可比逆转问题.他还建立了椭圆函数新结构的定理,一致收敛的解析函数项级数的和函数的解析性的定理,圆环上解析函数的级数展开定理(又称洛朗定理),等等.他把严格的论证引进分析学,建立了实数理论,引进了现今分析学上通用的极限的 ε-δ 定义,为分析学的算术化做出了重要贡献.在变分法中,他给出了带有参数的函数的变分结构,研究了变分问题的间断解.在微分几何中,研究了测地线和最小曲面;在线性代数中,建立了初等因子理论,并用来简化矩阵.魏尔斯特拉斯一生中培养了很多有成就的学生,其中著名的有 C. B. 柯瓦列夫斯卡娅、H. A. 施瓦兹、I. L. 富克斯、G. 米塔 - 列夫勒等.

3.1 导数的概念

在生产实际和科学实验中，常常需要从数量上研究函数相对于自变量的变化快慢程度，如变速直线运动物体的速度问题、曲线的切线斜率问题等. 而有关速度和切线的斜率等这一类问题，都可归结为函数的变化率问题，在数学上称为导数.

3.1.1 变化率问题

1. 变速直线运动的瞬时速度

设做变速直线运动的质点在 t 时刻所经过的路程为 s，即路程 s 是时间 t 的函数

$$s=f(t)$$

则当时间由 t_0 改变到 t 时，动点在 $\Delta t=t-t_0$ 这段时间内经过的路程为 $\Delta s=f(t)-f(t_0)$. 动点在 $\Delta t=t-t_0$ 这段时间内的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

如果当时间间隔 Δt 很小时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 可以近似地等于动点在时刻 t_0 的速度，且当 Δt 越小，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 就越接近于动点在时刻 t_0 的速度. 但对于动点在时刻 t_0 的速度的精确概念来说，需要用到极限的思想.

于是，当 $t\to t_0$ 时，若极限 $\lim\limits_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ 存在，则此极限就是动点在时刻 t_0 的瞬时速度，记作 $v(t_0)$，即

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

例 3-1 求自由落体在 t_0 时刻的瞬时速度.

解 自由落体运动中路程与时间的关系为

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

于是在 $[t_0,t]$ 内，落体经过的路程为

$$\Delta s=s(t)-s(t_0)=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2$$

所以落体在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$v(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{1}{2}g(t+t_0)=gt_0$$

2. 平面曲线的切线斜率

设有平面曲线 C（见图 3-1），点 $M(x_0,y_0)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的一定点，点 $N(x,y)$ 为曲线 $y=f(x)$ 上的一动点，设割线 MN 的倾斜角（即与 x 轴的夹角）为 φ，则割线 MN 的斜

率为

$$\tan\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

当 $x \to x_0$ 时，动点 N 就沿曲线 $y = f(x)$ 趋于定点 M，割线 MN 就随之绕定点 M 旋转而趋于极限位置 MT，这时称割线 MN 的极限位置 MT 为曲线在定点 M 处的切线.

于是，当 $x \to x_0$ 时，若极限

$$\lim_{x \to x_0} \tan\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则此极限就是切线的斜率，记作 k，即

$$k = \tan\alpha = \lim_{x \to x_0} \tan\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

其中 α 是切线 MT 的倾斜角.

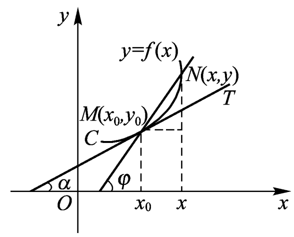

图 3-1

3.1.2　导数的概念

上述两个问题，一个是物理问题，一个是几何问题，它们的实际意义完全不同，但从数量关系来分析却是相同的，都是研究函数增量与自变量增量比值的极限问题. 在自然科学和工程技术领域中许多有关变化率的问题，如非恒稳的电流强度、化学反应速度等都可归结为这类极限. 因此把它们抽象成导数的概念.

1. 导数的定义

定义 3.1　设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地，函数有增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 如果极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可导**，并称此极限值为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记为

$$f'(x_0),\ y'\Big|_{x=x_0},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} \text{或} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$$

微课
导数的定义

即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3-1}$$

如果上述极限不存在，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

根据导数的定义，变速直线运动的质点在 t_0 时刻的瞬时速度 $v(t_0)$ 为路程函数 $s = s(t)$ 在点 t_0 处的导数，即 $v(t_0) = s'(t_0)$；曲线 L 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率就是曲线方程 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即 $k_{切} = \tan\alpha = f'(x_0)$.

为了方便起见，导数的定义式还可以写成以下两种形式：令 $\Delta x = h$，则式(3-1) 变成

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

若令 $x_0 + \Delta x = x$，当 $\Delta x \to 0$ 时，有 $x \to x_0$，则式(3-1) 变成

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

定义 3.2　若函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都可导，则称函数 $y = f(x)$ 在区

间(a,b)内可导. 若函数$y=f(x)$在区间(a,b)内可导,并且在区间的左、右端点处$f'_+(a)$与$f'_-(b)$都存在,则称函数$y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导. 若函数$y=f(x)$在某区间内可导,则对于该区间内的每一个x,都有唯一确定的导数值$f'(x)$与之对应,这样就确定了一个新的函数,称之为函数$y=f(x)$的**导函数**,简称**导数**,记作$f'(x),y',\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$或$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

由导数的定义,若$y=f(x)$在某区间I上可导,则$y=f(x)$在I上的导函数为

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \text{ 或 } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

显然,函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$就是导函数$f'(x)$在点x_0处的函数值,即

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$$

例 3-2　求常量函数$y=c$(c为常数)的导数.

解　由题意知,任取$x\in(-\infty,+\infty)$,因为

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=c-c=0,\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$$

所以$c'=0$.

例 3-3　求函数$y=x^2$的导数.

解

$$\begin{aligned}(x^2)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\\&=2x\end{aligned}$$

即$(x^2)'=2x$. 一般地,有$(x^n)'=nx^{n-1}$.

2. 单侧导数

利用单侧极限给出函数在一点处的单侧导数的定义.

定义 3.3　如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

与

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称它们分别为函数$y=f(x)$在点x_0处的**左导数**和**右导数**,分别记作$f'_-(x_0)$和$f'_+(x_0)$.

显然,函数$y=f(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是$y=f(x)$在点x_0处的左导数和右导数都存在且相等,即$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

3.1.3　导数的几何意义

由前面的讨论可知,函数$y=f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$M[x_0,f(x_0)]$处的切线的斜率,即

$$f'(x_0)=\tan\alpha$$

其中 α 是切线的倾斜角.

根据导数的几何意义,可知曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\quad f'(x_0)\neq 0$$

例 3-4　求曲线 $y=\cos x$ 在点$\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$处的切线和法线方程.

解　因为$(\cos x)'=-\sin x$,所以

$$(\cos x)'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

故所求切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

思考　导数的几何意义是什么?如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,那么曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 处一定有切线吗?反之呢?

3.1.4　函数可导性与连续性的关系

定理 3.1　如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导,则函数在该点必连续.

由定理 3.1 知函数可导必连续,但是连续却不一定可导. 如

例 3-5　讨论 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

习题 3.1

1. 用导数定义求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x^2-5x$;　　(2) $f(x)=\ln x$;

(3) $f(x)=\frac{1}{x}$;　　(4) $f(x)=\sqrt{x}$.

2. 假设 $f'(x_0)$ 存在,求下列各式的极限值.

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;　　(2) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

3. 求曲线 $f(x)=x^3+2x$ 在点(1,3)处的切线和法线方程.

4. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

(1) $f(x)=x\,|x|$；　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0\\ xe^x, x<0\end{cases}$.

3.2　求导法则

导数的定义不仅阐明了导数的实质，而且也给出了计算导数的方法，但是，对于比较复杂的函数，直接根据定义来求导是十分困难的，甚至是不可能的. 为了简化求导过程，这里引入一些基本的求导公式和求导法则.

3.2.1　导数的四则运算法则

定理 3.2　设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 处具有导数，且有以下法则：

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$；

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}[v(x)\neq 0]$.

上述三个法则的证明思路类似，下面只证法则(2).

证明　$[u(x)v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

其中，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$，由于 $v'(x)$ 存在，由可导必连续可知 $v(x)$ 在点 x 处连续，由连续函数的极限值等于函数值知 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x+0)=v(x)$.

对于上述公式，我们有如下推论：

推论 3.1　$[Cu(x)]'=Cu'(x)$（C 为常数）.

推论 3.2　$\left[\dfrac{1}{u(x)}\right]'=-\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$.

推论 3.3　$[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

例 3-6　求 $y=2x-\sqrt[3]{x}+3\sin x-\cos\dfrac{\pi}{3}$ 的导数.

解　$y'=\left(2x-\sqrt[3]{x}+3\sin x-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)'$

$$= (2x)' - (\sqrt[3]{x})' + (3\sin x)' - \left(\cos\frac{\pi}{3}\right)'$$

$$= 2 - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3\cos x.$$

例 3-7　求 $y = \sec x$ 的导数.

解　$y' = (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$

用类似的方法可得 $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

例 3-8　求 $y = \tan x$ 的导数.

解　$y = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

用类似的方法可得 $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

3.2.2　反函数的求导法则

定理 3.3　设 $y = f(x)$ 单调、可导且 $f'(x) \neq 0$，则它的反函数 $x = \varphi(y)$ 也可导，且有 $\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}$，即 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

例 3-9　求 $y = \arcsin x$ 的导数.

解　因为 $y = \arcsin x$ 是 $x = \sin y$ 的反函数，$x = \sin y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\frac{dx}{dy} = \cos y \neq 0$，所以

$$y' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

即
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

同理可得
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

例 3-10　求 $y = \arctan x$ 的导数.

解　因为 $y = \arctan x$ 是 $x = \tan y$ 的反函数，$x = \tan y$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内单调、可导，且 $\frac{dx}{dy} = \sec^2 y \neq 0$，所以

$$y' = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

即
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

同理可得
$$(\text{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

为了便于查阅,我们将常数和基础初等函数的导数公式归纳如下:

(1)$(C)'=0$(C 为常数);　　(2)$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}(\mu\in\mathbf{R})$;

(3)$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;　　(4)$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(5)$(a^x)'=a^x\ln a(a>0,a\neq 1)$;　　(6)$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;

(7)$(\sin x)'=\cos x$;　　(8)$(\cos x)'=-\sin x$;

(9)$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$;　　(10)$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$;

(11)$(\sec x)'=\sec x\tan x$;　　(12)$(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13)$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;　　(14)$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

(15)$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;　　(16)$(\mathrm{arccot}\,x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

微课

复合函数的求导法则

3.2.3　复合函数的求导法则

在实际问题中遇到的函数多是由几个基本初等函数复合而成的复合函数.因此复合函数的求导法则是求导运算中经常应用的一个重要法则.关于复合函数的求导有下面的定理.

定理 3.4(链式法则)　若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导,函数 $y=f(u)$ 在点 $u=\varphi(x)$ 处可导,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处可导,且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\text{ 或 }\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

显然,复合函数求导法可以推广到含有多个中间变量的情形.例如,设 $y=f(u)$,$u=\varphi(v)$,$v=\psi(x)$ 都可导,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\text{ 或 }y'=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$$

例 3-11　求 $y=\sin\sqrt{x}$ 的导数.

解　函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 由函数 $y=\sin u$ 与 $u=\sqrt{x}$ 复合而成,根据复合函数的求导法则,得 $y'=(\sin u)'(\sqrt{x})'=\cos u\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

例 3-12　设 $y=\mathrm{e}^{x^3}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解　可将 $y=\mathrm{e}^{x^3}$ 视为由基本初等函数 $y=\mathrm{e}^u$,$u=x^3$ 复合而成,因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^u\cdot 3x^2=3x^2\cdot\mathrm{e}^{x^3}$$

例 3-13　求函数 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 的导数.

解　因为 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$,所以

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+x}(1+x)'-\frac{1}{1-x}(1-x)'\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$
$$= \frac{1}{1-x^2}$$

对复合函数的分解与复合函数的求导法则比较熟练后，就可以不用写中间变量，只要认清函数的复合层次并默记在心，然后由外向内逐层求导就可以了，关键是必须清楚每一步对哪个变量求导.

复合函数求导法则对某些实际问题也有直接的应用，现举例说明如下.

* **例 3-14**　如果将空气以 100 cm^3/s 的速度注入球状的气球，假定气体的压力不变，那么，当半径为 10 cm 时，气球半径增加的速度是多少？

解　设在 t 时刻气球的体积与半径分别为 V 和 r，显然

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, r = r(t)$$

所以 V 通过中间变量 r 与时间 t 发生联系，是一个复合函数

$$V = \frac{4}{3}\pi[r(t)]^3$$

由题意知，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$，要求$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{r=10\ \mathrm{cm}}$的值. 根据复合函数求导法则，得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{3}\pi \times 3[r(t)]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi[r(t)]^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

将已知数据代入上式，得

$$100 = 4\pi \times 10^2 \times \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

所以$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4\pi}$ cm/s，即在 $r = 10$ cm 这一瞬间，半径以$\frac{1}{4\pi}$ cm/s 的速度增加.

3.2.4　隐函数的求导法则

前面研究的函数都可以表示为 $y = f(x)$ 的形式，如 $y = x + x^2$，$y = \arctan(\ln x)$ 等. 用这种方式表达的函数叫作**显函数**.

在实际问题中，常常碰到一些函数是由方程 $F(x,y) = 0$ 确定的. 例如，方程 $3x + y^2 + 5 = 0$ 表示 一个函数. 这样的函数称为**隐函数**.

把一个隐函数化成显函数，叫作**隐函数的显化**. 例如，从方程 $3x + y^2 + 5 = 0$ 解出 $y = \pm\sqrt{-5-3x}$，就把隐函数化成显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的. 例如，$e^y = y + x$ 在 x 的一定变化范围内虽然也能确定一个隐函数 $y = f(x)$，却无法将它显化. 因此有必要介绍隐函数的求导方法.

设函数 $y = f(x)$ 是由 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数，则 $F[x, f(x)] = 0$. 由于此式左端是将$y = f(x)$ 代入 $F(x,y)$ 所得到的复合函数，因此，根据**链式法则**将等式两边对 x 求导，便可得到所求的导数.

我们通过几个例子来说明这种方法.

例 3-15　求方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 的导数.

解　方程两端同时对 x 求导，并注意到 y 是 x 的函数，得

$$y+xy'-e^x+e^y y'=0$$

解得
$$y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}$$

例 3-16 求双曲线$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$在点$(4\sqrt{2},3)$处的切线方程和法线方程.

解 方程两端同时对 x 求导得

$$\frac{1}{8}x-\frac{2}{9}yy'=0$$

解得
$$y'=\frac{9x}{16y}$$

则
$$y'\big|_{x=4\sqrt{2}}=\frac{9\times4\sqrt{2}}{16\times3}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

故所求切线方程为
$$y-3=\frac{3\sqrt{2}}{4}(x-4\sqrt{2})$$

法线方程为
$$y-3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}(x-4\sqrt{2})$$

下面,我们来介绍一种重要的求导方法 —— **对数求导法**,这是一种利用对数的性质与隐函数的求导法则来简化导数计算的方法.它适合于由几个因子通过乘、除、乘方、开方所构成的比较复杂的函数的求导.这种方法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数,得到隐函数 $\ln y=\ln f(x)$;然后按照隐函数求导数的思路,求出 y 对 x 的导数.

例 3-17 求函数 $y=x^x(x>0)$ 的导数.

解 这是幂指函数,求导数时,既不能用幂函数的导数公式,也不能用指数函数的导数公式.

对等式两边取对数,得

$$\ln y=x\ln x$$

两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$$

解得
$$y'=y(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

*3.2.5 参数方程所确定的函数的导数

函数关系除了用显式和隐式表示外,还可以用**参数方程**来表示.

一般地,如果参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha<t<\beta)$ 确定 y 与 x 之间的函数关系,则称此函数关系所表示的函数为由参数方程所确定的函数.

对于参数方程所确定的函数的求导,通常不需要由参数方程消去参数 t 化为 y 与 x 之间的直接函数关系后再求导.

如果函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 都可导,$\varphi'(t)\neq0$ 且 $x=\varphi(t)$ 存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,则 y 为 x 的复合函数.根据复合函数求导法则,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\psi'(t)[\varphi^{-1}(x)]'=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

以后把上式作为参数方程所确定函数的导数公式.

例 3-18　求椭圆$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$$(0\leqslant t<2\pi)$ 在点$(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的切线的斜率.

解　因为$\frac{dx}{dt}=-a\sin t$,$\frac{dy}{dt}=b\cos t$,根据参数方程所确定函数的导数公式,得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t$$

故所求斜率为

$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{b}{a}$$

例 3-19　已知抛射体的运动轨迹的参数方程为

$$\begin{cases}x=v_1 t\\ y=v_2 t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

求抛射体在时刻 t 的运动速度的大小和方向.

解　先求速度的大小. 由于速度的水平分量为

$$\frac{dx}{dt}=v_1$$

垂直分量为
$$\frac{dy}{dt}=v_2-gt$$

所以抛射体的运动速度的大小为

$$v=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{v_1^2+(v_2-gt)^2}$$

再求速度的方向,也就是轨道的切线方向. 设 α 是切线的倾斜角,则根据导数的几何意义,得

$$\tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{v_2-gt}{v_1}$$

所以,在抛射体刚射出(即 $t=0$) 时

$$\tan\alpha\,|_{t=0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{v_2}{v_1}$$

当 $t=\frac{v_2}{g}$ 时

$$\tan\alpha\,|_{t=\frac{v_2}{g}}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{v_2}{g}}=0$$

这时,运动方向是水平的,即抛射体达到最高点(见图3-2).

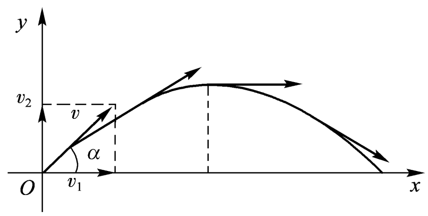

图 3-2

习题 3.2

1. 用导数的四则运算法则求下列函数的导数.

(1) $y=2x^3-x+2+x^{-3}$；　(2) $y=\dfrac{1+x}{1-x}$；　(3) $y=x\ln x$；

(4) $y=3e^x\cdot\ln x$；　(5) $y=\ln x^2+x^3\ln x$；　(6) $y=x^2\arctan x$；

(7) $y=\sqrt{1+\ln x}$；　(8) $y=e^{\cos x}$；　(9) $y=e^x\sin e^x+\cos e^x$；

(10) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

2. 求下列方程所确定的隐函数的导数$\dfrac{dy}{dx}$.

(1) $3x^2+2y^3-5=0$；　(2) $\ln y=xy+\cos x$.

3.3　高阶导数

3.3.1　高阶导数的概念

已知变速直线运动的速度 $v(t)$ 是位移函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即 $v=\dfrac{ds}{dt}$，而加速度 a 又是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的变化率，即速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数，因此

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) \text{ 或 } a=v'(t)=[s'(t)]'$$

这种导数的导数$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)$或$[s'(t)]'$叫作 s 对 t 的二阶导数，记作$\dfrac{d^2s}{dt^2}$或 $s''(t)$. 故变速直线运动的加速度就是位移函数 s 对时间 t 的二阶导数.

定义 3.4　若函数 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 仍是 x 的可导函数，则称 $f'(x)$ 的导数为 $f(x)$ 的**二阶导数**，记作 y''，$f''(x)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$或$\dfrac{d^2f}{dx^2}$.

类似地，二阶导数的导数叫作**三阶导数**，记作 y''' 或$\dfrac{d^3y}{dx^3}$；三阶导数的导数叫作**四阶导数**，记作 $y^{(4)}$ 或$\dfrac{d^4y}{dx^4}$. 一般地，$n-1$ 阶导数的导数叫作 $f(x)$ 的 n **阶导数**，记作 $y^{(n)}$ 或$\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

二阶或二阶以上的导数统称为**高阶导数**. 相应地，函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 叫作函数

$f(x)$ 的一阶导数. 显然,求高阶导数就是多次连续求导.

例 3-20　求指数函数 $y = a^x$ 的 n 阶导数.

解　$y' = a^x \ln a, y'' = a^x \ln^2 a, y''' = a^x \ln^3 a$,依此类推,$y^{(n)} = a^x \ln^n a$,即

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$$

特别地

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$$

例 3-21　设 $y = \sin x$,求 $y^{(n)}$.

解　$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

$y''' = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$,

…

$y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}_+)$.

同理可得

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}_+)$$

* 3.3.2　二阶导数的物理意义

设质点沿直线运动,在直线上给定原点和单位点(表示实数 1 的点),使直线成为数轴. 另外,再取定一个时刻为计时的零点. 质点于时刻 t 在直线上的位置的坐标记为 s,这样,质点的运动完全由某个函数 $s = s(t)$ 所确定.

在最简单的匀速直线运动的情形中,质点经过的路程与所用的时间成正比,即 $v = \frac{s}{t}$. 如果是非匀速直线运动,取从 t_0 时刻到 $t_0 + \Delta t$ 这样一段时间间隔,在 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 上质点所走过的路程 s 有相应增量 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$,这段区间上的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

若令 $t \to t_0$,即 $\Delta t \to 0$,那么 $\bar{v}$ 的极限值就精确地反映了质点在时刻 t_0 这一瞬间运动的快慢程度. 因此,在 $t = t_0$ 时,瞬时速度即为

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0)$$

一般地,变速直线运动的速度 $v(t)$ 就是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数,即

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t},\text{或 } v = s'$$

而加速度 $a(t)$ 是速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的变化率,即速度函数 $v(t)$ 对时间 t 的导数,即

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right),\text{或 } a = (s')' = s'' = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

习题 3.3

求下列函数的二阶导数.

(1) $y=\ln(1+x^2)$；　(2) $y=\sin 2x\cdot e^x$；　(3) $y=x\cos x$；

(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$；　(5) $y=x^2e^x$；　(6) $y=\cos x\ln x$；

(7) $y=x\ln x$；　(8) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　(9) $y=e^{-x}\cdot\sin x$；

(10) $y=e^{2x-1}$.

3.4　函数的微分

前面介绍的导数是描述函数在某点处的变化率. 有时还需要考虑某点处当自变量有较小改变时，函数值相应的增量大小，而要精确计算函数值的增量往往很复杂，于是引入微分的概念.

下面我们来看一个实例.

一个正方形，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$(见图 3-3)，问此正方形的面积改变了多少？

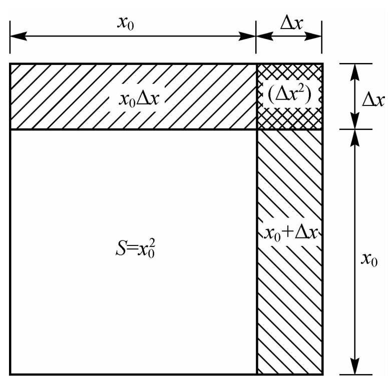

图 3-3

解　由题知，正方形边长为 x_0，面积为 S，则 S 是 x_0 的函数：$S=x_0^2$. 正方形受边长变化影响时面积的改变量可以看成是当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 S 相应的增量为 ΔS，即

$$\Delta S=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

从上式可以看出，ΔS 分成两部分，第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 ΔS 的线性函数，即图 3-3 中带有斜线的两个矩形的面积之和，而第二部分 $(\Delta x)^2$ 在图 3-3 中是带有交叉斜线的小正方形的面积，当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$.

由此可见，如果边长改变量很微小，即 $|\Delta x|$ 很小时，面积的改变量 ΔS 可近似地用第一部分来代替(第一部分也称为 ΔS 的线性主要部分).

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，则函数的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数，因此，$A\Delta x$ 是 Δy 的线性函数，且它与 Δy 之差 $\Delta y - A\Delta x = o(\Delta x)$ 是 Δx 的高阶无穷小，所以，当 $A \neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，我们就可近似地用 $A\Delta x$ 来代替 Δy.

3.4.1　微分的概念

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内有定义，x_0 及 $x_0 + \Delta x$ 在该区间内，如果函数的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，并称 $A \cdot \Delta x$ 为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的**微分**，记为 $\mathrm{d}y|_{x=x_0}$，即

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = A \cdot \Delta x$$

下面讨论可微与可导之间的关系.

定理 3.5　函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微的充分必要条件是函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，且当 $f(x)$ 在点 x_0 处可微时，其微分为

$$\mathrm{d}y|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$$

证明　(1) 必要性. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，即 $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$，有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A$$

即 $A = f'(x_0)$.

(2) 充分性. 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$，根据函数极限与无穷小的关系，有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \beta$，其中 β 是当 $\Delta x \to 0$ 时的无穷小，即 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \beta\Delta x$，可见 $\beta\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小，由微分定义得到函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，且 $\mathrm{d}y|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

例 3-22　求函数 $y = 1 + 3x^2$ 在 $x = 1$，$\Delta x = 0.01$ 时的增量及微分.

解　$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 3x^2 = 3 \times 1.01^2 - 3 = 0.0603$，

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1 \\ \Delta x=0.01}} = y'|_{x=1} \cdot \Delta x = 6 \times 0.01 = 0.06.$$

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为**函数的微分**，记为 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$$

为了统一记号，通常把自变量 x 的增量称为**自变量的微分**，记为 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x = \Delta x$，于是函数 $y = f(x)$ 的微分又可记为

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$$

所以有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$，即函数的导数等于函数的微分与自变量的微分的商. 因此，导数又称为**“微商”**.

例 3-23　求函数 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ 的微分.

解 因为 $y' = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$，所以

$$dy = y'dx = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}dx$$

3.4.2 微分的几何意义

如图 3-4 所示，过曲线 $y = f(x)$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 作切线 MT，倾角为 α，则 $\tan\alpha = f'(x_0)$.

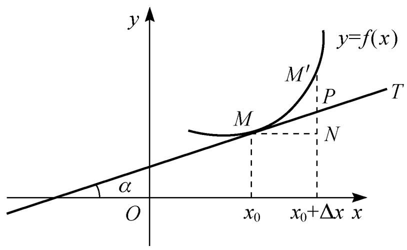

图 3-4

当自变量 x 有微小增量 Δx 时，得到曲线上另一点 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，于是 $MN = \Delta x, NM' = \Delta y$，则 $NP = MN \cdot \tan\alpha = \Delta x \cdot f'(x_0)$，即 $dy = NP$.

由此可见，对可微函数 $y = f(x)$ 而言，当 Δy 是曲线 $y = f(x)$ 上点的纵坐标的增量时，dy 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量.当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y - dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小很多，因此在点 M 附近，可用切线段近似代替曲线段.

微课
微分的运算

3.4.3 微分的运算

按照微分的定义，求函数的微分，只要求出它的导数 $f'(x)$，再乘以自变量的微分 dx 即可. 所以，由导数的基本公式与运算法则，可得到如下的微分基本公式与运算法则.

1. 微分基本公式

(1) $d(C) = 0$ （C 为常数）；

(2) $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx$ （α 为任意实数）；

(3) $d(a^x) = a^x \ln a dx$；

(4) $d(e^x) = e^x dx$；

(5) $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x\ln a}dx$；

(6) $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}dx$；

(7) $d(\sin x) = \cos x dx$；

(8) $d(\cos x) = -\sin x dx$；

(9) $d(\tan x) = \sec^2 x dx$；

(10) $d(\sec x) = \sec x \tan x dx$；

(11) $d(\cot x) = -\csc^2 x dx$；

(12) $d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$；

(13) $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(14) $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$；

(15) $d(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2}dx$；

(16) $d(\text{arccot} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

2. 微分运算法则

(1) $d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$；

(2) $\mathrm{d}[u(x)v(x)] = v(x)\mathrm{d}u(x) + u(x)\mathrm{d}v(x)$；

(3) $\mathrm{d}[Cu(x)] = C\mathrm{d}u(x)$ （C 为常数）；

(4) $\mathrm{d}\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right] = \dfrac{v(x)\mathrm{d}u(x) - u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)} (v(x) \neq 0)$；

(5) $\mathrm{d}[f(g(x))] = f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x$.

这里，公式(5) 是**复合函数的微分法则**.

因为 $\mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$，所以复合函数 $y = f[g(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$$

由此可见，无论 u 是自变量还是中间变量，微分形式 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$ 保持不变. 这一性质称为**微分形式的不变性**. 有时，利用一阶微分形式的不变性求复合函数的微分比较方便.

例 3-24 设 $y = \cos(2x+3)$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}\cos(2x+3) = -\sin(2x+3)\mathrm{d}(2x+3) = -2\sin(2x+3)\mathrm{d}x$

例 3-25 设 $y = \ln(1+\mathrm{e}^x)$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $\mathrm{d}y = \mathrm{d}[\ln(1+\mathrm{e}^x)] = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

3.4.4 微分在近似计算中的应用

根据微分的概念可知，如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，且 $|\Delta x|$ 较小时，Δy 近似等于 $\mathrm{d}y$，即

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

则

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

在上式中，令 $x = x_0 + \Delta x$，即

$$\Delta x = x - x_0$$

得

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

如果 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 都容易求得，那么可利用公式进行近似计算.

微课
微分在近似计算中的应用

例 3-26 利用微分计算 $\sin 44°$ 的近似值.

解 令 $f(x) = \sin x$，则由公式得

$$\sin x \approx \sin x_0 + (x - x_0)\cos x_0$$

令 $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$，$x = 44° = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{180}$，于是

$$\sin 44° \approx \sin\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{180} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.694\,8$$

例 3-27 利用微分计算 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

解 令 $f(x) = \sqrt[3]{x}$，则由公式得

$$\sqrt[3]{x} \approx \sqrt[3]{x_0} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x_0^{-2}}(x - x_0)$$

令 $x_0 = 1$，$x = 1.02$，于是

$$\sqrt[3]{1.02} = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1^{-2}}(1.02 - 1) \approx 1 + 0.006\,7 = 1.006\,7$$

特别地，当 $x_0 = 0$，$|x|$ 很小时，有

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

利用上面的式子,可以推导出一些常用的近似公式.当 $|x|$ 很小时,有:

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$;

(2)$\sin x \approx x$(x 用弧度作单位来表达);

(3)$\tan x \approx x$(x 用弧度作单位来表达);

(4)$e^x \approx 1 + x$;

(5)$\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 取 $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$,于是

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = \frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0} = \frac{1}{n}$$

代入公式

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

得

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x$$

其他几个公式也可以用类似的方法证明.

习题 3.4

1. 已知 $y = x^2 - x$,计算当 $x = 2, \Delta x = 0.01$ 时的 Δy 及 dy.

2. 求下列函数的微分.

(1)$y = \frac{2}{x} + 2\sqrt{x}$;　(2)$y = (x-2)e^x$;　(3)$y = \sin^2(x^2+2)$;

(4)$y = 3x\sin 5x$;　(5)$y = [\ln(2+x)]^2$;　(6)$y = \ln[\ln(\ln x)]$;

(7)$y = \arctan(2+x^2)$;　(8)$y = \arcsin 2x^3$.

3. 计算下列各式的近似值.

(1)$\cos 29°$;　(2)$e^{-0.002}$.

3.5 应用示例——拐角问题

3.5.1 问题提出

在医院的外科手术室,往往需要将病人安置在活动病床上,沿走廊推到手术室或送到病房.然而有的医院的病房较窄,病床必须沿过道推到直角拐角(见图 3-5).我们想知道标准的病床能否顺畅地推过拐角.通过计算求出病床可以顺利通过的走廊的最小宽度.

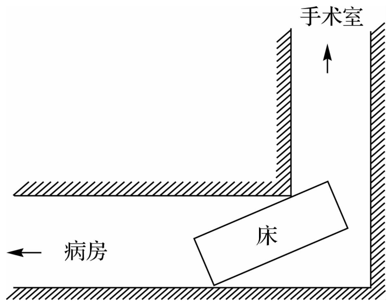

图 3-5

3.5.2 解题思路

首先，我们把问题进行简化，想象床缩成一根杆子. 把问题转化为要想让杆子绕过拐角，杆子的长度会受到多大限制？如图 3-6 所示，过道的宽度分别是 a 和 b. PQ 线段的长度即固定 θ 角时能安放的最大杆长 $l(\theta)$.

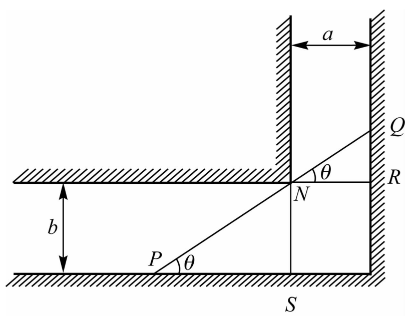

图 3-6

3.5.3 解答过程

第一步，设杆长为 $l(\theta)$. 通过观察，我们发现

$$l(\theta)=PN+NQ=SN\csc\theta+RN\sec\theta=b\csc\theta+a\sec\theta \tag{3-2}$$

$l(\theta)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的最小值，就是能顺利绕过拐角的最大杆长.

第二步，求出式(3-2) 对 θ 的导数. 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta}=a\sec\theta\tan\theta-b\csc\theta\cot\theta$$

第三步，求最值. 令

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\theta}=0$$

求得 $\tan^3\theta=\dfrac{b}{a}$，代入式(3-2) 得 $l(\theta)$ 的最小值为

$$l_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

这就是给定过道宽度 a 与 b，能顺利绕过拐角的最大杆长.

3.6　数学实验三:使用 MATLAB 求函数的导数

3.6.1　实验任务

学习利用数学软件 MATLAB 求函数的导数.

3.6.2　实验过程

1. 相关命令

MATLAB 中有关求函数导数的命令说明如表 3-1 所示.

表 3-1

命　　令	说　　明
diff(f,x)	求函数表达式 f 对自变量 x 的一阶导数
diff(f,x,2)	求函数表达式 f 对自变量 x 的二阶导数
diff(f,x,n)	求函数表达式 f 对自变量 x 的 n 阶导数

2. 操作实例

操作实例 1　　求下列函数的一阶导数.

(1) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\cos(\ln x)}$.

解

(1) 运行 MATLAB,在命令行窗口中输入:

```
>> syms x
>> y = 1/2 * log((1 + sin(x))/(1 - sin(x)));
>> y1 = diff(y,x)
```

按 Enter 键,得到如下计算结果:

```
y1 =
((sin(x) - 1) * (cos(x)/(sin(x) - 1) - (cos(x) * (sin(x) + 1))/(sin(x) - 1)^2))/
(2 * (sin(x) + 1))
```

可以发现,该结果十分烦琐,我们通过使用 simplify 命令可以对烦琐结果进行化简处理,继续在命令行窗口中输入:

```
>> y2 = simplify(y1)
```

按 Enter 键,得到如下化简结果:

```
y2 =
```

```
1/cos(x)
```

即 $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

(2) 在命令行窗口中输入：

```
>> f = diff(exp(sin(x))/cos(log(x)),x)
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
f =
(exp(sin(x)) * cos(x))/cos(log(x)) + (sin(log(x)) * exp(sin(x)))/(x * cos(log(x))^2)
```

即 $y' = \dfrac{e^{\sin x}(x\cos x \cdot \cos\ln x + \sin\ln x)}{x\cos^2\ln x}$.

操作实例 2　用 MATLAB 求下列函数的高阶导数.

(1) $y = e^{x^2} - \sin^2 x$，求 y''.

(2) $y = x^2 + \sqrt{1+x^2}$，求 y'''.

解

(1) 运行 MATLAB，在命令行窗口中输入：

```
>> syms x
>> y = exp(x^2) - sin(x)^2;y1 = diff(y,x,2)          % 定义函数，求其二阶导数 y1
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
y1 =
2 * exp(x^2) - 2 * cos(x)^2 + 2 * sin(x)^2 + 4 * x^2 * exp(x^2)
```

继续使用 simplify 命令化简计算结果，输入：

```
>> y2 = simplify(y1)
```

按 Enter 键，得到化简结果如下：

```
y2 =
2 * exp(x^2) - 2 * cos(2 * x) + 4 * x^2 * exp(x^2)
```

即 $y'' = 2e^{x^2}(1+2x^2) - 2\cos 2x$.

(2) 在命令行窗口中输入：

```
>> y = x^2 + sqrt(1 + x^2);y1 = diff(y,x,3)
```

按 Enter 键，得到如下计算结果：

```
y1 =
(3 * x^3)/(x^2 + 1)^(5/2) - (3 * x)/(x^2 + 1)^(3/2)
```

即 $y''' = \dfrac{3x^3}{\sqrt{(1+x^2)^5}} - \dfrac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

3.6.3　实验作业

求下列函数的一阶导数与二阶导数.

(1) $y = (3x^2 + 2x + 1)^2$；　　(2) $y = e^{\cos x}$.

复习题三

1. 选择题.

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$ (　　).

A. $-f'(x_0)$　　B. $f'(-x_0)$　　C. $f'(x_0)$　　D. $2f'(x_0)$

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续,是 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的(　　).

A. 必要不充分条件　　B. 充分不必要条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(3) 曲线 $y=2x^3-5x^2+4x-5$ 在点 $(2,-1)$ 处的切线斜率等于(　　).

A. 8　　B. 12　　C. -6　　D. 6

(4) 设 $y=\mathrm{e}^{f(x)}$ 且 $f(x)$ 二阶可导,则 $y''=$ (　　).

A. $\mathrm{e}^{f(x)}$　　B. $\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f''(x)$

C. $\mathrm{e}^{f(x)}[f'(x)f''(x)]$　　D. $\mathrm{e}^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

(5) 若 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{ax}, & x<0\\ b+\sin 2x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导,则 a,b 的值应为(　　).

A. $a=2,b=1$　　B. $a=1,b=2$

C. $a=-2,b=1$　　D. $a=2,b=-1$

2. 填空题.

(1) 设函数 $f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=$ ________.

(2) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$ 确定,则 $y'(0)=$ ________.

(3) 若函数 $y=\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)$,则 $\mathrm{d}y=$ ________.

(4) 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$ ________.

(5) 曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(\mathrm{e},1)$ 处的切线方程为________.

3. 已知 $y=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\sin 3x$;　　(2) $y=x^3\ln x^2$.

5. 已知 $y=x^2-x$,求在 $x=2$ 处,当 $\Delta x=0.1$ 时,Δy 和 $\mathrm{d}y$ 的值.

6. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性:

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

7. 已知 $y=x+x^x$,求 y'.

8. 设由方程 $\mathrm{e}^y+\sin(xy^2)=x+y$ 确定 y 是 x 的函数,求 y'.

9. 求曲线 $y=\mathrm{e}^x-3\sin x+1$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与法线方程.