第 1 单元　三角公式及应用

1.1　两角和与差的三角函数公式

学习目标

1. 理解两角和与差的正弦公式、余弦公式和正切公式.

2. 已知两个角的三角函数值及它们的取值范围，会求这两个角的和(或差)的三角函数值及进行简单的三角函数式的计算.

知识点归纳

本节主要介绍了两角和与差的三角函数公式.

(1)两角和与差的余弦公式：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

(2)两角和与差的正弦公式：

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$.

(3)两角和与差的正切公式：

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$;

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

巩固练习

1. 填空题：

(1)已知点 $P(a,-5)$,$Q(0,10)$,且 $|PQ|=17$,则 $a=$________.

(2)在△ABC 中,$\cos A=\dfrac{12}{13}$,$\sin B=\dfrac{3}{5}$,则 $\sin C$ 的值为________.

(3)已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\tan\alpha+\tan\beta+\sqrt{3}\tan\alpha\tan\beta$ 的值为________.

2. 选择题：

(1)已知点 $A(1,2)$,$B(3,4)$,$C(5,0)$,则△ABC 是(　　).

A. 直角三角形　　B. 等腰三角形

C. 等边三角形　　D. 不确定

(2)已知 $\tan\alpha=2$,$\tan(\beta-\alpha)=3$,则 $\tan(\beta-2\alpha)$的值为(　　).

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{5}{7}$　　D. $\dfrac{1}{7}$

3. 计算下列各式的值：

(1)$\sin 13°\cos 343°+\sin 77°\sin 17°$;

(2)$\cos 75°\cos 15°+\sin 255°\sin 15°$;

(3) $\cos 22^\circ \cos 337^\circ - \sin 22^\circ \sin 23^\circ$；

(4) $\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ}$.

4. 不用计算器，求下列三角函数的值：

(1) $\sin 105^\circ$；

(2) $\cos 285^\circ$；

(3) $\cos \frac{5\pi}{12}$；

(4) $\tan \frac{7\pi}{12}$.

5. 化简：

(1) $\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha$；

(2) $\dfrac{\sin 10^\circ-\sqrt{3}\cos 10^\circ}{\cos 40^\circ}$；

(3) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+\alpha\right)$；

(4) $\tan(\frac{\pi}{6}-\alpha)+\tan(\frac{\pi}{6}+\alpha)+\sqrt{3}\tan(\frac{\pi}{6}-\alpha)\tan(\frac{\pi}{6}+\alpha)$.

6. 已知 $\tan(\alpha+\beta)=3$，$\tan(\alpha-\beta)=5$，求 $\tan 2\alpha$，$\tan 2\beta$ 的值.

7. 求函数 $y=\sin(4x+\frac{\pi}{3})+\cos(4x-\frac{\pi}{3})$ 的最大值及取得最大值时 x 的集合.

自我检测

1. 选择题:

(1)在$\triangle ABC$中,已知$\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B\geqslant 1$,则$\triangle ABC$是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 等腰非直角三角形

(2)$\sin^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{\pi}{12}$的值为(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)已知$\sin\theta=\frac{4}{5}$,$\sin\theta\cos\theta<0$,则$\sin 2\theta$的值为(　　).

A. $-\frac{24}{25}$　　B. $-\frac{12}{25}$　　C. $-\frac{4}{5}$　　D. $\frac{24}{25}$

(4)化简$\sin(x+y)\sin(x-y)+\cos(x+y)\cos(x-y)$的结果是(　　).

A. $\sin 2x$　　B. $\cos 2y$　　C. $-\cos 2x$　　D. $-\cos 2y$

(5)已知$\cos 2\theta=\frac{\sqrt{2}}{3}$,则$\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值为(　　).

A. $\frac{13}{18}$　　B. $\frac{11}{18}$　　C. $\frac{7}{9}$　　D. -1

(6)已知$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,则$\cos\alpha\cos\beta$的值为(　　).

A. 0　　B. $\frac{4}{5}$　　C. 0或$\frac{4}{5}$　　D. 0或$\pm\frac{4}{5}$

(7)已知$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{4}{5}$,$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{5}$,则$\cos(\alpha-\beta)$的值为(　　).

A. $\frac{9}{25}$　　B. $\frac{16}{25}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

(8)$\cos^2 75°+\cos^2 15°+\cos 75°\cos 15°$的值是(　　).

A. $\frac{5}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $1+\frac{\sqrt{2}}{3}$

2. 填空题:

(1)已知$\alpha,\beta\in\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$,$\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$,$\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{12}{13}$,则$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$________.

(2)$\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=$________.

(3)若$\cos\alpha=a$,则$\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=$________.

3.求下列各式的值：

(1)$\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}$；

(2)$\cos 70°\cos 10°+\sin 70°\sin 10°$.

4.化简下列各式：

(1)$\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$；

(2) $\cos(35^\circ - x)\cos(25^\circ + x) - \sin(35^\circ - x)\sin(25^\circ + x)$；

(3) $\cos(61^\circ + 2\alpha)\cos(31^\circ + 2\alpha) + \sin(61^\circ + 2\alpha)\sin(31^\circ + 2\alpha)$.

5. 已知在$\triangle ABC$中，$\cos A = \dfrac{5}{13}$，求 $\sin 2A$.

6. 已知 $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$，$\cos(\alpha + \beta) = -\dfrac{5}{13}$，$\alpha$，$\beta$ 都是锐角，求 $\cos \beta$.

7. 已知 $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $90^\circ<\beta<180^\circ$，求 $\sin(60^\circ-\beta)$.

8. 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{1}{4}$，且 α 为第一象限角，β 为第二象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

9. 已知 $\sin\beta+\cos\beta=\sqrt{2}$，求证：$\sin^3\beta+\cos^3\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. 已知 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$，$x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.

(1)求 $\sin x$ 的值；

(2)求 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

1.2　二倍角的三角函数公式

学习目标

1. 理解并掌握二倍角的三角函数公式.

2. 了解公式间的内在联系，会选择合适的公式来解决问题.

知识点归纳

(1)以两角和与差的三角函数公式为基础，可以得到二倍角的三角函数公式，即二倍角公式：

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-2\tan^2\alpha}$.

(2)二倍角公式可以起到升幂的作用. 在应用二倍角公式时，要分清角之间的相对关系. 如 2α 是 α 的倍角，4α 是 2α 的倍角.

巩固练习

1. 填空题：

(1) $\sin\alpha=2\sin$ ________ $\cos$ ________ , $2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}=\sin$ ________.

(2) $\cos^2 3\alpha=\frac{1+\cos\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{2}$, $\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{2}$.

(3) $\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\tan$ ________ , $\tan\frac{\alpha}{4}=\frac{1-\cos\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{\sin\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}$.

2. 计算下列各式的值：

(1) $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$；

(2) $\sin^2\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}$；

(3) $\frac{1}{1-\tan\frac{\pi}{8}}-\frac{1}{1+\tan\frac{\pi}{8}}$；

(4) $\left(\sin\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}\right)\left(\sin\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}\right)$.

3. 化简：

(1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$；

(2) $\dfrac{4\sin^2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$；

(3) $\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\dfrac{6}{1-\tan^2\alpha}$；

(4) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

4. 已知 $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$ 的值.

5. 已知 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$, $\alpha\in(0,\pi)$, 求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 的值.

6. 已知等腰三角形的一个底角的正弦值为$\frac{3}{5}$，求其顶角的正弦、余弦和正切值.

自我检测

1. 填空题：

(1)已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\sin 2\alpha=$________.

(2)已知 $\alpha\in\left(\frac{5\pi}{2},3\pi\right)$，化简 $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=$________.

(3)不用计算器求值：$\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ=$________.

2. 选择题：

(1)已知 $\cos\alpha=\frac{1}{9}$，$\alpha\in(\pi,2\pi)$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$(　　).

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

(2)已知 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$，则$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=$(　　).

A. 3　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

3. 计算下列各式的值：

(1)$\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$；　　(2)$\frac{1-\tan^2 420^\circ}{3\tan 420^\circ}$；

(3) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$；

(4) $1+2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$.

4. 化简：$\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

5. 已知 $\sin(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1}{6}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，求 $\sin 4\alpha$ 的值.

6. 已知 $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{1}{4}$，$\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{15}{4}$，求下列各式的值：

(1) $\tan(\alpha-\beta)$；

(2) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$.

7. 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+1, x\in \mathbf{R}$.

(1)求函数的最小正周期；

(2)求函数的最大值及取得最大值时 x 的集合.

8. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{12}{13}, \alpha\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$,求$\frac{\cos 2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}$.

1.3 三角函数的积化和差与和差化积

学习目标

1. 理解三角函数的积化和差公式与和差化积公式.

2. 能够利用三角函数的积化和差公式与和差化积公式简化、计算复杂的三角函数式.

知识点归纳

(1)三角函数的积化和差公式为

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

(2)三角函数的和差化积公式为

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(3)三角函数的积化和差公式与和差化积公式可以实现三角函数积形式与和或差形式的相互转化.

巩固练习

1.把下列各式化成和或差的形式：

(1)$2\sin 64^\circ\cos 10^\circ$；

(2)$\cos 22^\circ\sin 73^\circ$；

(3)$\sqrt{2}\sin 2\sin 1.2$；

(4)$\cos 84^\circ\sin 132^\circ$.

2.将下列各式化成积的形式：

(1)$\sin 6^\circ-\sin 18^\circ$；

(2)$\cos 2.1+\cos 3.7$；

(3)$\sin 42^\circ+\sin 24^\circ$；

(4)$\cos 55^\circ-\cos 13^\circ$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\cos\frac{7\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{6}$；　　(2) $\sin\frac{5\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}$；

(3) $\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$；　　(4) $\cos 37.5^\circ\cos 22.5^\circ$.

4. 已知 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{3}$，$\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{3}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$.

5. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\beta-\cos\alpha)$，$\alpha\in(0,\pi)$，$\beta\in(0,\pi)$，求角 $\alpha-\beta$ 的大小.

6. 已知 A，B，C 是$\triangle ABC$ 的内角，求证：$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

自我检测

1. 把下列各式化成和或差的形式：

(1)$5\sin 15^\circ\cos 51^\circ$；

(2)$\sin 27^\circ\cos 119^\circ$；

(3) $3\cos 2\sin 0.2$；

(4) $\cos 58^\circ \cos 92^\circ$.

2. 将下列各式化成积的形式：

(1) $\sin 25^\circ - \sin 62^\circ$；

(2) $\cos 35^\circ + \cos 129^\circ$；

(3) $\sin 5.5 + \sin 0.9$；

(4) $\cos 42^\circ - \cos 78^\circ$.

3. 求下列各式的值：

(1) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$；

(2) $\cos 75^\circ - \sin 105^\circ$；

(3) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$.

4. 已知在$\triangle ABC$中，$\sin A \sin B = \cos^2 \dfrac{C}{2}$，试判断$\triangle ABC$的形状.

5. 求函数 $y=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos x$ 的最大值及取得最大值时 x 的集合.

1.4 正弦型函数

学习目标

1. 掌握正弦型函数的图像和性质，会求正弦型函数的最大值和最小值并取得最值时自变量的取值.

2. 掌握正弦型曲线的“五点法”作图.

3. 了解正弦型函数在电学和物理学中的应用.

知识点归纳

(1)**正弦型函数**:形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$的函数称为**正弦型函数**. 正弦型函数主要有以下性质：

①定义域为 $\mathbf{R}$；

②周期为 $T=\frac{2\pi}{\omega}$；

③值域为$[-A,A]$，即最大值为 A，最小值为 $-A$.

(2)对于函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$：

A——振幅；

φ——初相；

$\omega x+\varphi$——相位；

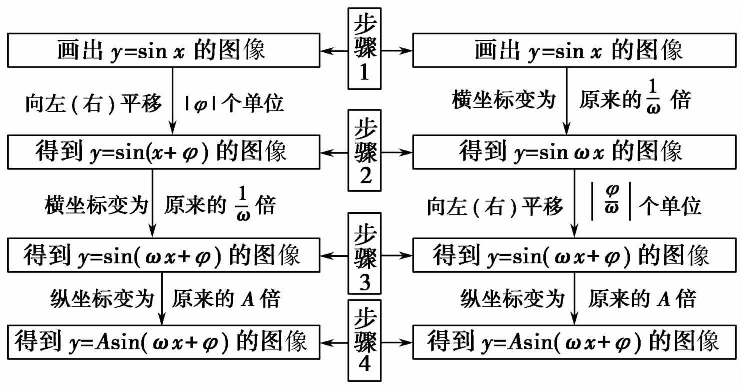
$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$——周期；

$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$——频率；

函数的最大值为 A，最小值为 $-A$.

(3)“五点法”作函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像. 用“五点法”作 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图，主要是通过变量代换，设 $z=\omega x+\varphi$，由 z 取 $0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3}{2}\pi,2\pi$ 来求出相应的 x，通过列表，计算得出五点坐标，描点后得出图像.

(4)函数 $y=\sin x$ 的图像变换得到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像的步骤：



(5)**交流电**：在电学中，电流强度的大小和方向都是随时间变化的电流称为**交流电流**. 简称**交流电**. 最简单的是简谐交流电，其电流强度的大小和方向随时间而变化，可以用以下函数来表示：

$$I=I_m\sin(\omega x+\varphi_0)\ (I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi).$$

其中，I_m 是电流的最大值，称为简谐交流电的**峰值**，ω 称为**角频率**，单位为 rad/s；$(\omega x+\varphi_0)$称为**相位**；φ_0 称为**初相位**，简称**初相**；$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$称为简谐交流电的变化周期，表示交流电完成一次周期性变化所需要的时间，单位为 s；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数称为**频率**，用 f 表示，单位为 Hz(赫兹).

峰值、频率和初相位是简谐交流电的三要素，它们从不同的方面描述了简谐交流电的物理特征.

在物理学中，用 $s=A\sin(\omega t+\varphi)$表示简谐振动，$s$ 表示**位移**，A 称为**振幅**，$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$称为简谐振动的**变化周期**，$f=\dfrac{1}{T}$称为简谐振动的**变化频率**，$(\omega t+\varphi)$称为**相位**；φ 称为**初相位**.

一般的，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0)$ 中，A 称为**振幅**（或**峰值**），ω 称为**角频率**，φ 称为**初相位**.

巩固练习

1. 已知函数 $y=\frac{1}{2}\sin(\frac{2}{3}x-\frac{\pi}{4})$.

(1)这个函数的周期 T 为________.

(2)当 $x=$________时，$y_{max}=$________；当 $x=$________时，$y_{min}=$________.

(3)当 $x=\frac{3\pi}{2}$时，$y=$________；当 $x=\frac{3\pi}{8}$时，$y=$________.

2. 选择题：

(1)函数 $y=2\sin(4x-\frac{2\pi}{3})$的图像是(　　).

A. 关于原点对称　　B. 关于 x 轴对称

C. 关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$对称　　D. 关于点$(\frac{\pi}{6},0)$对称

(2)函数 $y=\sin\frac{x}{3}$的图像与函数 $y=\sin x$ 的图像相比，(　　).

A. 周期变为原来的 3 倍，纵坐标不变

B. 周期变为原来的$\frac{1}{3}$，纵坐标不变

C. 纵坐标伸长为原来的 3 倍，周期不变

D. 纵坐标缩短为原来的$\frac{1}{3}$，周期不变

3. 已知函数 $y=3\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$.

(1)用“五点法”作函数在一个周期内的图像；

(2)求此函数的单调区间.

4.已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小值为-2,其图像最高点与最低点横坐标之差是 3π,且图像经过点(0,1),求函数解析式.

自我检测

1.选择题:

(1)已知简谐运动 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像经过点(0,1),则该简谐运动的最小正周期 T 和初相 φ 分别为(　　).

A. $T=6,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $T=6,\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $T=6\pi,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $T=6\pi,\varphi=\frac{\pi}{3}$

(2)下列函数在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上是增函数的是(　　).

A. $y=\sin x$　　B. $y=\cos x$

C. $y=\sin 2x$　　D. $y=\cos 2x$

(3)函数 $f(x)=\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$ 的最小正周期和振幅分别是(　　).

A. π,1　　B. π,2　　C. 2π,1　　D. 2π,2

(4)函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x$ 的最大值是(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

(5)函数 $y=2-3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的最大值为(　　).

A. -1　　B. 3　　C. 2　　D. 5

(6)下列函数中,最小正周期为 π 的函数是(　　).

A. $y=\cos 3x$　　B. $y=\sin 2x$

C. $y=\cos x$　　D. $y=\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$

2. 填空题:

(1)函数 $f(x)=2\cos^2\frac{x}{2}+\sin x$ 的最小正周期是________.

(2)已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的图像上的两个相邻的最高点和最低点的距离为 $2\sqrt{2}$,则 $\omega=$________.

(3)函数 $y=\cos^2x-\sin^2x+2\sin x\cos x$ 的最小值是________.

(4)函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$($A,\omega,\varphi$ 为常数,$A>0,\omega>0$)在闭区间$[-\pi,0]$上的图像如图 1-1所示,则 $\omega=$________.

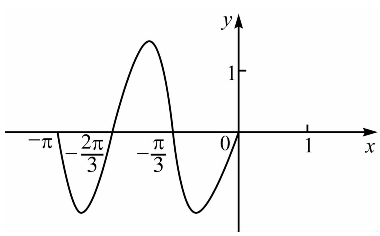


图 1-1

3. 用“五点作图法”作下列函数的图像:

(1)$y=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$;

(2) $y=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;

(3) $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)$;

(4) $y=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{2}{5}x+\frac{\pi}{6}\right)$.

4. 已知函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，求它的振幅、周期、初相位、最大值和最小值.

5. 设函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2 x$，求函数 $f(x)$ 的最大值和最小正周期.

6. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\sin(x+\pi)$，求 $f(x)$ 的最小正周期.

7. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图像如图 1-2 所示. 求$f(x)$的最小正周期及解析式.

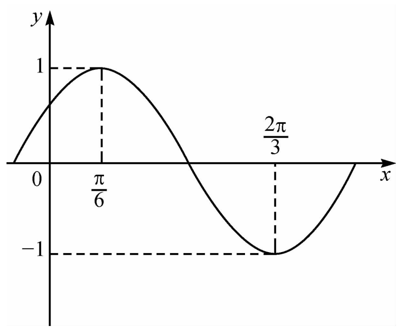


图 1-2

8. 已知函数 $f(x)=A\sin(x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi,x\in\mathbf{R})$的最大值是 1,其图像经过点 $M\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$. 求 $f(x)$的解析式.

9. 已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+n$ 的最大值为 4，最小值为 0，最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$，直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 是其图像的一条对称轴，若 $A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，求函数的解析式.

10. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\sin\varphi+\cos^2 x\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)(0<\varphi<\pi)$，其图像过点 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$.

(1)求 φ 的值；

(2)将函数 $y=f(x)$ 的图像上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，求函数 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

1.5　正弦定理与余弦定理

学习目标

1. 掌握正弦定理与余弦定理.

2. 会利用正弦定理与余弦定理解决简单的实际问题.

知识点归纳

(1)正弦定理:在一个三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等,即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,其中$R$是三角形外接圆的半径.

(2)余弦定理:$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

余弦定理可以变形为:$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$,$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

(3)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$($R$是三角形外接圆的半径,$r$是三角形内切圆的半径),并可由此计算$R$,$r$.

巩固练习

1. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对应的边分别为a,b,c,且$b^2+c^2=bc+a^2$,求角A的大小.

2. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别是a,b,c. 若$c=2,C=\frac{\pi}{3}$，且$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，求a,b的值.

3. 如图1-3所示，两座相距60 m的建筑物AB,CD的高度分别为20 m、50 m，BD为水平面，则从建筑物AB的顶端A看建筑物CD的张角$\angle CAD$的大小是多少？

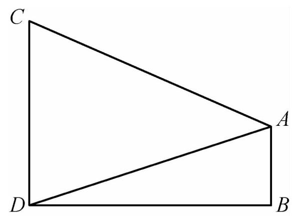


图 1-3

4. 2012年10月29日，超级风暴"桑迪"袭击美国东部，如图1-4所示，在灾区的搜救现场，一条搜救狗从A处沿正北方向行进x m到达B处发现一处生命迹象，然后向右转105°，行进10 m到达C处发现另一处生命迹象，这时它向右转135°后继续前行回到出发点，那么$x=$________.

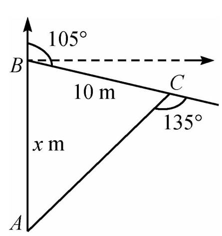


图 1-4

自我检测

1. 选择题：

(1)在△ABC中，若$b=2a\sin B$，则A等于(　　).

A. 30°或60°　　B. 45°或60°　　C. 120°或60°　　D. 30°或150°

(2)在△ABC中，下列各式中符合余弦定理的是(　　).

①$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$；

②$c^2=a^2-b^2-2bc\cos A$；

③$b^2=a^2-c^2-2bc\cos A$；

④$\cos C=a^2+b^2+c^2-2ab$.

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

(3)在△ABC中，若$(a+c)(a-c)=b(b+c)$，则$\angle A=$(　　).

A. 90°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

(4)在△ABC中，已知$a=4$，$b=6$，$C=120°$，则边c的长是(　　).

A. $\sqrt{9}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{19}$

(5)在△ABC中，$a=15$，$b=10$，$A=60°$，则$\cos B=$(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

(6)在△ABC中，若$\angle A=60°$，$\angle B=45°$，$BC=3\sqrt{2}$，则$AC=$(　　).

A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7)在△ABC中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，则A等于(　　).

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

(8)在△ABC中，若$a=18$，$b=24$，$A=45°$，则此三角形有(　　).

A. 无解　　B. 两个解

C. 一个解　　D. 解的个数不确定

2. 填空题：

(1)在△ABC中，若$\sin A>\sin B$，则A一定大于B，对吗？________(填对或错).

(2)设△ABC的三个内角A，B，C所对的边分别是a，b，c，且$\frac{a}{\cos A}=\frac{c}{\sin C}$，那么$A=$________.

(3)在△ABC中，若$a=9$，$b=10$，$c=12$，则△ABC的形状是________.

(4)在△ABC中，已知$BC=1$，$B=\frac{\pi}{3}$，△ABC的面积为$\sqrt{3}$，则AC的长为________.

3. 在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$，求角C的大小.

单元自测题

一、选择题：

1. $\frac{\sin 47^\circ-\sin 17^\circ\cos 30^\circ}{\cos 17^\circ}$的值为(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. 若$\sin\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$\cos a=$(　　).

A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\right)=$(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 函数$y=2\cos 2x+1(x\in\mathbf{R})$的最小正周期为(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

5. 函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值是(　　).

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 0

6. 在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{3}$，$A=45^\circ$，$C=75^\circ$，则$BC=$(　　).

A. $3-\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $3+\sqrt{3}$

7. 在△ABC中，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=2$，则A等于（　　）.

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 75°

8. 函数$y=\begin{cases} kx+1, -2\leqslant x<0, \\ 2\sin(\omega x+\varphi), 0\leqslant x\leqslant \frac{8\pi}{3} \end{cases}$的图像如图 1-5 所示，则（　　）.

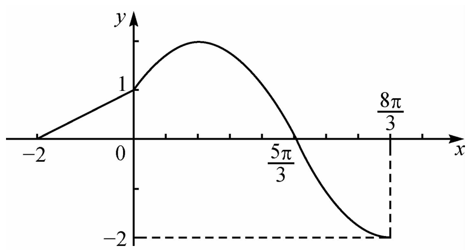


图 1-5

A. $k=\frac{1}{2}$，$\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $k=\frac{1}{2}$，$\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $k=-\frac{1}{2}$，$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $k=-2$，$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$

9. 函数$y=\sin 2x\cos 2x$的最小正周期是（　　）.

A. 2π　　B. 4π　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

10. 在锐角△ABC中，角A，B所对的边分别为a，b. 若$2a\sin B=\sqrt{3}b$，则角A等于（　　）.

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

二、填空题：

1. $\cos 43°\cos 77°+\sin 43°\cos 167°$的值为________.

2. 在△ABC中，已知$\sin A : \sin B : \sin C=2:3:4$，则$\cos C=$________.

3. 在△ABC中，角A，B，C所对边的长分别为a，b，c. 若$a=2$，$B=\frac{\pi}{6}$，$c=2\sqrt{3}$，则$b=$________.

4. 函数$f(x)=\cos x-\frac{1}{2}\cos 2x(x\in \mathbf{R})$的最大值等于________.

5. 某路边一树干被台风吹断后，与地面呈45°角，树干也倾斜为与地面呈75°角，树干底部与树尖着地处相距20 m，则折断点与树干底部的距离是________ m.

三、解答题：

1. 已知在$\triangle ABC$中，若$b=2$，$B=30^\circ$，$C=135^\circ$，求a的值.

2. 在$\triangle ABC$中，已知角A，B，C的对边分别为a，b，c，且满足$b\cos C+\frac{1}{2}c=a$. 求$\angle B$.

3. 在$\triangle ABC$中，已知$a=3$，$b=2\sqrt{6}$，$\angle B=2\angle A$. 求$\cos A$的值.

4. 已知函数 $f(x)=A\sin(3x+\varphi)(A>0,x\in(-\infty,+\infty),0<\varphi<\pi)$ 在 $x=\frac{\pi}{12}$ 时取得最大值 4.

(1)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2)求 $f(x)$ 的解析式.

5. 如图 1-6 所示，为了计算北江岸边两景点 B 与 C 的距离，由于地形的限制，需要在岸上选取 A 和 D 两个测量点，现测得 $AD\perp CD$，$AD=10$ km，$AB=14$ km，$\angle BDA=60^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，求两景点 B 与 C 的距离(假设 A,B,C,D 在同一平面内，测量结果保留整数；参考数据：$\sqrt{2}=1.414$，$\sqrt{3}=1.732$，$\sqrt{5}=2.236$).

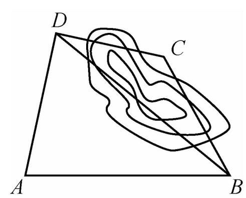


图 1-6

6. 已知一个圆锥台工件的锥度 $C=1:12$，圆锥长度 $L=50$ mm，小端直径 $d=22$ mm，求大端直径 D.

7. 如图 1-7 所示，渔船甲位于岛屿 A 的南偏西 $60°$方向的 B 处，且与岛屿 A 相距 12 海里，渔船乙以 10 海里/小时的速度从岛屿 A 出发沿正北方向航行，若渔船甲同时从 B 处出发沿北偏东 α 的方向追赶渔船乙，刚好用 2 小时追上.

(1)求渔船甲的速度；

(2)求 $\sin\alpha$ 的值.

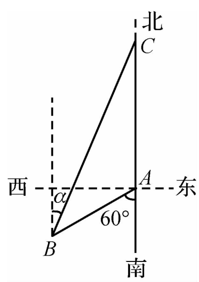


图 1-7