

第 1 章 函 数

1.1 基 本 要 求

- (1) 认知函数的概念, 知道反函数的定义.
- (2) 理解函数的性质, 包括有界性、单调性、奇偶性和周期性.
- (3) 熟知基本初等函数, 理解复合函数和初等函数.
- (4) 能用函数解决实际问题.

1.2 内 容 提 要

1.2.1 函数及其性质

1. 函数的概念

函数是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x \in D$, 变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应, 则称 y 是 x 的**函数**, 记为

$$y=f(x), x \in D$$

其中, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, 数集 D 称为这个函数的**定义域**.

对于每个 $x \in D$, 按照对应法则 f , 总有确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数在点 x 处的函数值, 记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种依赖关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 内的所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**, 记为 M , 即

$$M = \{y | y = f(x), x \in D\}$$

函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.

函数的常用表示法有以下三种.

- (1) **列表法**. 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.
- (2) **图像法**. 在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.
- (3) **公式法(解析法)**. 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法.

2. 反函数

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$, 其定义域为 D , 值域为 M . 如果对于任意 $y \in M$, 由函数关系式 $y = f(x)$ 恰好唯一确定出一个 $x \in D$ 与之对应, 那么认为 x 是 y 的函数, 记作 $x = g(y)$, 我们称上述的 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为**反函数**, 习惯上将 $x = g(y)$ 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

由于习惯上常用 x 表示自变量, y 表示因变量, 故常把 $y = f(x)$ 的反函数写作

$$y = f^{-1}(x)$$

由反函数的定义可知, 在定义区间上单调的函数必有反函数.

定理 1.1 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M . 若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的, 则在 M 上 $f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(x)$ 存在, 且 $f^{-1}(x)$ 在 M 上也是单调增加或单调减少的.

对于分段函数求其反函数, 只需分别求出与各自定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

3. 函数的性质

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 区间 I 为函数 $f(x)$ 的整个定义域或其定义域的一部分, 则函数一般具有下列几种特性.

1) 有界性

如果存在正数 M , 使得对任意的 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有界, 否则称 $y = f(x)$ 在区间 I 上无界.

2) 单调性

若对任意的 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ 或 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调增加或单调减少. 区间 I 称为单调增区间或单调减区间; 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数; 单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在定义区间 I 上关于原点对称, 若对任意的 $x \in I$, 都有 $f(-x) = f(x)$,

则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的偶函数;若对任意的 $x \in I$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的奇函数;若函数既不是奇函数也不是偶函数, 则称其为非奇非偶函数.

4) 周期性

如果存在不为零的正实数 T , 使得对于任意的 $x \in I, x+T \in I$, 都有 $f(x+T) = f(x)$, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 是 $f(x)$ 的一个周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

练习 1.1

1. 选择题.

(1) 下列各组中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一样的是().

A. $f(x) = x, g(x) = \sqrt[3]{x}$

B. $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$

C. $f(x) = x-3, g(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$

D. $f(x) = 2\ln x, g(x) = \ln x^2$

(2) 下列函数中, 不是奇函数的是().

A. $y = \tan x + x$

B. $y = x$

C. $y = (x-2)(x+2)$

D. $y = \frac{2}{x} \cdot \sin^2 x$

(3) 下列函数中, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且单调递增的是().

A. $y = \arcsin x$

B. $y = \arccos x$

C. $y = \arctan x$

D. $y = \operatorname{arccot} x$

(4) 函数 $y = \sqrt{16-x^2} + \frac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域是().

A. $(0, 1)$

B. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

C. $(0, 4)$

D. $[-4, 1) \cup (1, 4]$

(5) 函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2 - 1, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$ 的定义域是().

- A. $[-2, 2]$
 B. $[-2, -1] \cup (-1, 2]$
 C. $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$
 D. $[-2, 1) \cup (1, 2]$

2. 填空题.

(1) 函数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 在_____单调递减, 在_____单调递增.

(2) 函数 $f(x) = \sqrt{x+3} + \arcsin \frac{x+1}{2}$ 的定义域为_____.

(3) 函数 $y = \frac{4^x}{4^x + 1}$ 的反函数是_____.

(4) 函数 $y = \sin px$ 是以_____为周期的函数.

3. 已知 $f(x) = x^2 - 3x + 1$, 求 $f(0), f(-2x), f\left(\frac{1}{x}\right), f(x+2)$.

4. 求下列函数的反函数.

(1) $y = \lg(x+3) + 1$;

(2) $y = 2\sin 4x$.

1.2.2 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常量函数. $y = C$ (C 为常数), 该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 图像为过点 $(0, C)$ 且

平行于 x 轴的直线.

(2) 幂函数. $y=x^a$ (a 为实数), 该函数的定义域因 a 的取值不同而不同, 但无论 a 为何值, 它在区间 $(0, +\infty)$ 内总有定义, 且图像过点 $(1, 1)$.

(3) 指数函数. $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, a 为常数), 该函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. 当 $a>1$ 时, 函数单调增加; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少, 图像过点 $(0, 1)$.

(4) 对数函数. $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$, a 为常数), 该函数的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$. 当 $a>1$ 时, 函数单调增加; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少, 图像过点 $(1, 0)$. 在科学计数法中常用到以 e 为底的对数函数, 称为自然对数, 记作 $y=\ln x$.

(5) 三角函数. $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ 统称为三角函数.

(6) 反三角函数. $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$ 统称为反三角函数.

2. 复合函数和初等函数

定义 1.3 设 $y=f(u)$, 其中 $u=\varphi(x)$, 且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内, 则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数, 其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明.

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时, 一定要分清层次, 由外到内, 逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数.

练习 1.2

1. 选择题.

(1) 函数 $y=\sqrt[5]{\ln \sin^3 x}$ 的复合过程为().

A. $y=\sqrt[5]{u}, u=\ln v, v=w^3, w=\sin x$

B. $y=\sqrt[5]{u^3}, u=\ln(\sin x)$

C. $y=\sqrt[5]{\ln u^3}, u=\sin x$

D. $y=\sqrt[5]{u}, u=\ln v^3, v=\sin x$

(2) 如果 $f(\cos x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$, 则 $f(x)=($).

A. $\frac{1+x^2}{2x^2-1}$

B. $\frac{1-x^2}{2x^2+1}$

C. $\frac{1-x^2}{2x^2-1}$

D. $\frac{1+x^2}{2x^2+1}$

(3) 函数 $y=3^x+3$ 的反函数是().

A. $y=\log_3 x-3$

B. $y=\log_3(x-3)$

C. $y=\log_3 x+3$

D. $y=\log_3(x+3)$

2. 填空题.

(1) 函数 $y=f(x)$ 与 $y=-f(x)$ 的图形关于_____对称.

(2) 已知 $f(x)=\log_5 x$, 则 $f(x)+f(y)=$ _____.

(3) 设 $f(x)=5^x$, $g(x)=\sqrt{x}$, 则 $f[g(x)]=$ _____, $g[f(x)]=$ _____.

(4) 设 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ ($x<0$), 则 $f(x)=$ _____.

3. 将下列函数分解成基本初等函数.

(1) $y=\sin^2 \sqrt{x}$;

(2) $y=5^{\arcsin x}$.

4. 作出下列函数的图像.

(1) $y=2\ln x$;

(2) $y=e^{-x}$.

1.3 章节测验 1

1. 选择题.

(1) 函数 $y=(3m-1)x+n$ 在 \mathbf{R} 上是减函数, 则().

A. $m > \frac{1}{3}$

B. $m < \frac{1}{3}$

C. $m > -\frac{1}{3}$

D. $m < -\frac{1}{3}$

(2) 已知 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$, 则 $f(-1) = ()$.

A. -2

B. 0

C. 1

D. 2

(3) 函数 $y = \sqrt{4-x} + \ln(x-1)$ 的定义域是().

A. $(0, 4]$

B. $(1, 4]$

C. $(1, 4)$

D. $(1, +\infty)$

(4) 如果 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2 (x \neq 0)$, 则 $f(x) = ()$.

A. $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 (x \neq -1)$

B. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

C. $(1+x)^2$

D. $(1-x)^2$

(5) 函数 $y = -\sqrt{x-2}$ 的反函数是()。

A. $y = x^2 + 2 (-\infty < x < +\infty)$

B. $y = x^2 + 2 (x \geq 2)$

C. $y = x^2 + 2 (x \leq 2)$

D. $y = x^2 + 2 (x \leq 0)$

(6) 设 $f(x)$ 是奇函数, 且 $\varphi(x) = f(x) \left(\frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2} \right)$, 则 $\varphi(x)$ 是()。

A. 偶函数

B. 奇函数

C. 非奇非偶函数

D. 无定义

2. 填空题.

(1) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln x$ 的定义域为_____.

(2) $f(x) = 7^x, g(x) = x \ln x$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

(3) $f(x) = \sqrt{3+x^2}$, 则 $f(-1) =$ _____.

(4) 设 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 则 $f(x) =$ _____.

(5) 函数 $y = e^x + 1$ 与 $y = \ln(x-1)$ 的图形关于直线_____对称.

(6) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$, 则函数 $f[f(x)] =$ _____.

(7) 函数 $f(x) = 3 - 2\cos \frac{1}{2}x$ 的最小值是_____.

3. 设 $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 - x}{x^4 + 1} (x \neq 0)$, 求 $f(x)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对于任意的 $x, y, f(x) \neq 0$ 且 $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, 求 $f(2020)$.

5. 求由 $f(x) = \arcsin x$ 和 $\varphi(x) = \ln 2x$ 复合而成的函数 $\varphi[f(x)]$ 的定义域.

6. 判断函数 $f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + m^2}}{m}$ ($m > 0, -\infty < x < +\infty$) 的奇偶性.

7. 讨论函数 $f(x) = \frac{3x}{1+x}$ ($x \geq 0$) 的单调性和有界性.

8. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^4, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$, $g(x) = \ln x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

9. 要设计一个容积为 $V = 20\pi \text{ m}^3$ 的有盖圆柱形储油桶, 已知桶盖单位面积造价是侧面的 $1/2$, 而侧面单位面积造价又是底面的 $1/2$. 设桶盖造价为 a (单位: 元/ m^2), 试把储油桶总造价 p 表示为储油桶半径 r 的函数.

10. 旅客乘坐火车时随身携带的物品, 如果不超过 20 kg 免费, 超过 20 kg 的部分, 每千克收费 0.4 元, 超过 50 kg 的部分, 每千克再加收 40% . 试列出收费与物品质量的函数关系.