第 1 章　函数、极限与连续

函数是高等数学主要研究的对象，是现实世界中变量之间的依赖关系在数学中的反映. 极限理论是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，因此掌握、运用好极限方法是学好微积分的关键. 连续是函数的一个重要形态. 本章将介绍函数、函数极限与函数连续性等基本概念，以及它们的一些性质.`

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

人们常常会碰到两种不同的量：一种量在研究过程中始终保持不变，称为**常量**；另一种量在研究过程中取值会发生变化，称为**变量**. 在自然界、社会经济现象及工程技术中都存在着许许多多不同的变量，并且它们之间存在着某种联系.

引例 1　已知圆半径为 r，则其面积 $S=\pi r^2$，其中 π 是圆周率. 当半径 r 给定一个数值时，式中 S 就有一确定的数值与其对应.

引例 2　某工程每天生产某种产品 x 件，设备和管理费用等固定成本为 10 000 元，每生产一件该产品成本为 100 元，则每天生产成本 C 与日产量 x 之间的对应关系由式 $C=10\,000+100x$ 确定. 当日产量 x 在 $(0,+\infty)$ 内任取一值时，根据上式，成本 C 都有唯一确定的值与其对应.

以上两例表明，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立存在，而是直接或间接地相互联系又相互制约的. 它们之间这种相互依赖的关系刻画了客观世界中事物变化的内在规律，这种规律用数学进行描述就是函数关系.

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是给定的非空数集，如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值，变量 y 按照一定的法则 f 都有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**，记作

$$y=f(x),x\in D,$$

其中，变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**因变量（或函数）**，数集 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时，通过法则 f，函数有唯一确定的值 y_0 与之相对应，称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作

$$y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**，记作 M，即

$$M = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义知，函数是由定义域和对应法则确定的. 因此把函数的定义域和对应法则称为函数的**两个要素**. 若两个函数具有相同的定义域和对应法则，则称它们是相等的.

例 1 下列各组函数是否相等？为什么？

(1) $y = |x|$ 与 $u = \sqrt{v^2}$；

(2) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$；

(3) $y = x + 1$ 与 $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$；

(4) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$；

(5) $y = \cos x$ 与 $y = \sqrt{1 - \sin^2 x}$；

(6) $y = \ln 5x$ 与 $y = \ln 5 \cdot \ln x$.

解 因为(1)与(2)中两函数的两要素分别相同，所以是相同的函数；(3)与(4)中两函数的定义域不同，所以是不同的函数；(5)与(6)中两函数的对应法则不同，所以是不同的函数.

函数的定义域通常分以下两种情况考虑：

(1)对于实际问题，根据问题的实际意义确定；

(2)由解析式表示的函数，其定义域就是使表达式有意义的一切实数组成的集合.

例 2 求函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3 - x^2}} + \arcsin\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)$ 的定义域.

解 由所给函数可知，要使函数有意义，必须有

$$\begin{cases} 3 - x^2 > 0 \\ \left|\dfrac{x}{2} - 1\right| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases},$$

即 $0 \leqslant x < \sqrt{3}$. 因此，所给函数的定义域为 $[0, \sqrt{3})$.

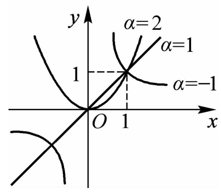
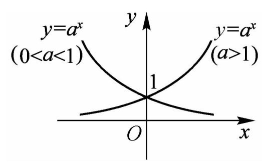
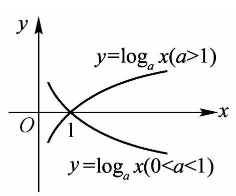
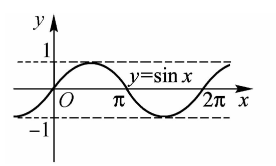
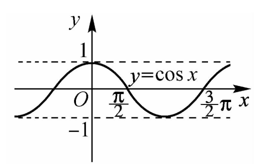
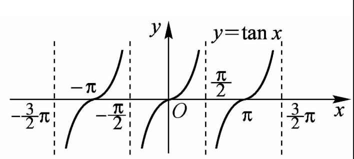
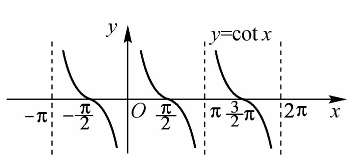
1.1.2 函数关系

函数关系的表示上又分为图像法、表格法和解析式法，下面先介绍解析式函数关系的几种常见类型.

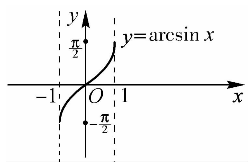
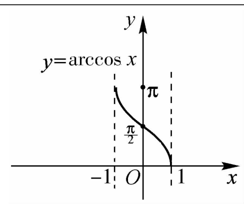
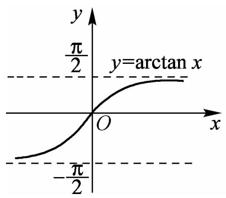
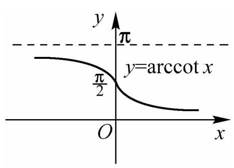
1. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数，见表 1-1.

表　1-1

函　　数	图　　像	定义域和值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）		定义域：随 α 的不同而不同，但不论 α 取何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义. 值域：随 α 不同而不同	若 $\alpha>0$，x^{α} 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加； 若 $\alpha<0$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	$a^{0}=1$； 若 $a>1$，a^{x} 单调增加；若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少；直线 $y=0$ 为函数图像的水平渐近线
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0$ 且 $a\neq1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	$\log_a 1=0$； 若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加；若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少；直线 $x=0$ 为函数图像的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数；在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加； 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ 上单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$；奇函数
余弦函数 $y=\cos x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数，在 $[(2k-1)\pi,2k\pi]$ 上单调增加，在 $[2k\pi,(2k+1)\pi]$ 上单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$；偶函数
正切函数 $y=\tan x$		$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数，在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加；奇函数；直线 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图像的垂直渐进线 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$
余切函数 $y=\cot x$		$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	以 π 为周期的函数，在 $(k\pi,k\pi+\pi)k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少，奇函数；直线 $x=k\pi$ 为函数图像的垂直渐近线 $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

续表

<table>
<tr><th>函　　数</th><th>图　　像</th><th>定义域和值域</th><th>主要性质</th></tr>
<tr><td>反正弦函数
$y=\arcsin x$</td><td>
</td><td>$x\in[-1,1]$
$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$</td><td>单调增加,奇函数</td></tr>
<tr><td>反余弦函数
$y=\arccos x$</td><td>
</td><td>$x\in[-1,1]$
$y\in[0,\pi]$</td><td>单调减少,非奇非偶函数</td></tr>
<tr><td>反正切函数
$y=\arctan x$</td><td>
</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$</td><td>单调增加;直线 $y=-\frac{\pi}{2}$ 与 $y=\frac{\pi}{2}$ 为函数图像的水平渐近线;奇函数</td></tr>
<tr><td>反余切函数
$y=\mathrm{arccot}\, x$</td><td>
</td><td>$x\in(-\infty,+\infty)$
$y\in(0,\pi)$</td><td>单调减少;直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图像的水平渐近线;非奇非偶函数</td></tr>
</table>

2. 复合函数

定义 2 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明:

(1)复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形;

(2)将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内,逐层分解;

(3)并不是任意两个函数都能构成复合函数.

例 3 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成.

(1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$;

(2) $y=3^{\tan^2 x}$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{(1+2x)^2}$ 可以看作由 $y=u^{\frac{2}{3}}$,$u=1+v$,$v=2x$ 复合而成.

(2) $y=3^{\tan^2 x}$ 可以看作由 $y=3^u$,$u=v^2$,$v=\tan x$ 复合而成.

3. 初等函数

定义 3　由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的，并且可以用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

例如 $f(x)=x\sin x$，$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$f(x)=\mathrm{e}^{5x+1}\sin x$ 等都是初等函数. 但分段函数一般不是初等函数，如 $f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数，而 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个解析式表示，故不是初等函数.

4. 分段函数

我们把在不同的定义域区间所对应的函数解析式不同的函数统称为**分段函数**. 如邮资函数、电话费用函数、个人收入所得税函数等，还有高等数学课程中会涉及的如下几个分段函数：

符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$；

取整函数 $y=[x]=n, x\in[n,n+1), n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$.

这里符号函数和取整函数都是非初等函数，但绝对值函数 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 也可以用一个解析式表示，是初等函数.

5. 反函数

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量、x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，记作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$，并称函数 $y=f^{-1}(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的**矫形反函数**，而称 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的**直接反函数**.

在同一坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示变量 x 与 y 之间的同一关系，它们的图像是同一条曲线；函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(见图 1-1).

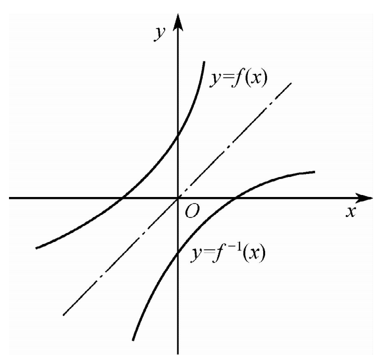


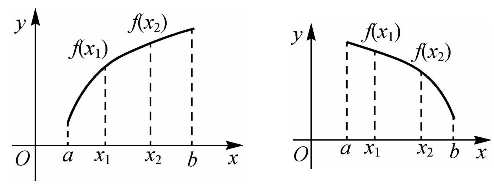
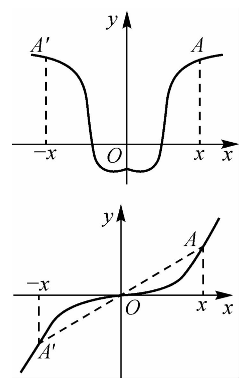
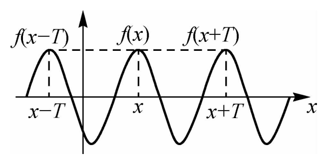
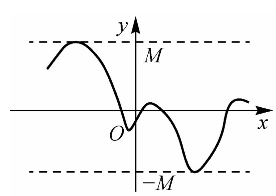
图 1-1

注意：只有单调函数才有反函数，且其反函数也单调.

1.1.3　函数的性质

函数的几种常用性质对比几何意义罗列如表 1-2 所示(D 为函数 $f(x)$的定义域).

表 1-2

性质	定　　义	几何意义
单调性	设区间 $I\subseteq D$,若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加;若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调减少	
奇偶性	设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,对任意的 $x\in D$,若有 $f(-x)=f(x)$,则函数 $f(x)$为偶函数;若有 $f(-x)=-f(x)$,则函数 $f(x)$为奇函数	
周期性	若存在常数 $T\neq 0$,使对任意的 $x\in D$,有 $x+T\in D$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$为周期函数	
有界性	设区间 $I\subseteq D$,对任意的 $x\in I$,存在正数 M,有 $\|f(x)\|\leqslant M$ 成立,则称 $f(x)$在区间 I 上有界	

习题 1.1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{3}$；　　(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\lg(4-x)$；

(3) $f(x)=\begin{cases} -x, & -1\leqslant x\leqslant 0 \\ \sqrt{3-x}, & 0<x<2 \end{cases}$.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} \sin x, & -2<x<0 \\ 0, & 0\leqslant x<2 \end{cases}$，求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

3. 试作出函数 $f(x)=\begin{cases} 3x, & |x|>1 \\ x^2, & |x|<1 \\ 3, & |x|=1 \end{cases}$ 的图像.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=x^2-x^3$；　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 下列函数中，哪些是周期函数？对于周期函数，求出它的周期.

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$.

6. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sin 3x$；　　(2) $y=e^{\cos x^2}$；

(3) $y=\ln[\ln(\ln x)]$；　　(4) $y=[\lg(x^2+2)]^3$；

(5) $y=\sqrt{1+\sin^2 x}$；　　(6) $y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$.

1.2　函数的极限

极限概念是深入研究函数变化形态最基本的一个概念，极限方法是数学中最重要的一种思想方法. 它是在求某些实际问题的精确解的过程中而产生的，是微积分学的基础. 本节将给出极限的概念，并研究它的性质及运算.

图文
极限发展史

1.2.1　数列的概念与极限

1. 数列的概念

定义 1　将自变量为正整数的函数 $u_n=f(n)$ 的函数值按自变量 n 由小到大的顺序排成的一列数

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$$

称为**数列**,记为$\{u_n\}$. 其中,$u_n = f(n)$为数列$\{u_n\}$的**通项**或**一般项**. 由于一个数列$\{u_n\}$完全由其一般项 u_n 所确定,因此有时也将数列$\{u_n\}$简写成 u_n.

定义 2　对于数列$\{u_n\}$,若存在一个常数 $M>0$,使得$|u_n| \leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$恒成立,则称数列 u_n 为**有界数列**,或称**数列有界**.

如果数列$\{u_n\}$有界,也可理解为存在两个数 M 和 m,使得 $m \leqslant u_n \leqslant M$,也称 M 为数列的**上界**,m 为数列的**下界**.

定义 3　对于数列$\{u_n\}$,若数列的各项满足 $u_n \leqslant u_{n+1}$,则称数列$\{u_n\}$为**单调增加的数列**;若数列的各项满足 $u_n \geqslant u_{n+1}$,则称数列$\{u_n\}$为**单调减少的数列**. 单调增加的数列或单调减少的数列统称为**单调数列**.

下面通过几个实例说明数列单调的情况:

$\{u_n\}$:$\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}, \cdots$为单调减少的数列.

$\{v_n\}$:$0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots$为单调增加的数列.

$\{w_n\}$:$0, \dfrac{3}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}, \cdots, \dfrac{n+(-1)^n}{n}$是有界数列,但不是单调数列.

2. 数列的极限

看下面 3 个无穷数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \cdots, (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$$

为了直观,我们把这三个数列的前 n 项分别表示在数轴上,如图 1-2 至图 1-4 所示.

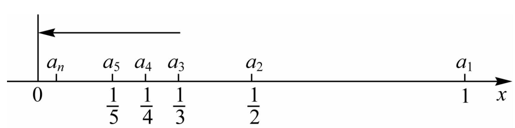


图 1-2

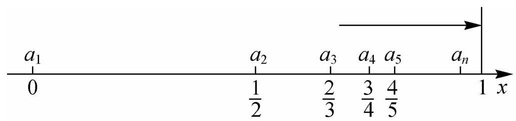


图 1-3

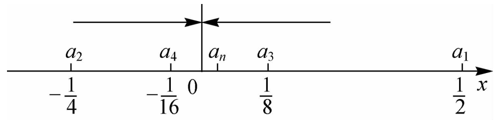


图 1-4

由图 1-2 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的右侧无限接近于 0. 由图 1-3 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $a_n=\dfrac{n-1}{n}$ 的点逐渐密集在 $x=1$ 的左侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=1$ 的左侧无限接近于 1. 由图 1-4 可以看出，当 n 无限增大时，数列 $(-1)^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ 的点逐渐密集在 $x=0$ 的左、右两侧，即数列 $\{a_n\}$ 从 $x=0$ 的左、右两侧无限接近于 0.

以上三个数列有一个共同的特点：当 n 无限增大时，$a_n=f(n)$ 无限接近于某一个常数 a. 一般地，有如下定义：

定义 4　如果当 n 无限增大($n\to\infty$)时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的项 a_n 趋近于某个确定的常数 a($|a_n-a|$ 无限地接近于 0)，那么，就说这个确定的常数 a 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或当 $n\to\infty$ 时，$a_n\to a$.

根据定义 4 可将上述三个数列的极限分别记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1;\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0.$$

例 1　观察下列数列的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=\dfrac{1}{n^2}$；　(2) $a_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$；　(3) $a_n=1$.

解　列出数列的前几项(见表 1-3)，考察当 $n\to\infty$ 时，数列的点逐渐密集的位置.

表 1-3

n	1	2	3	4	5	…	$\to\infty$
$a_n=\dfrac{1}{n^2}$	1	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{25}$	…	$\to 0$
$a_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{16}$	$\dfrac{1}{64}$	$\dfrac{1}{256}$	$\dfrac{1}{1\ 024}$	…	$\to 0$
$a_n=1$	1	1	1	1	1	…	$\to 1$

由表 1-3 中三个数列的变化趋势及定义 4 可知：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0;\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0;\lim_{n\to\infty}1=1.$$

1.2.2 函数极限的概念

引例 1(割圆术) 我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)创造了“割圆术”,即利用圆内接正多边形的面积来推算圆的面积,他认为不断增加圆内接正多边形的边数,“割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣.”对于圆的面积的计算,先从圆内接正六边形算起,依次将边数加倍,如果把圆内接正 $6\times 2^{n-1}$ 边形的面积记为 A_n,显然,正多边形的边数 n 越大,则正多边形的面积 A_n 就和圆的面积越接近,当 n 无限增大时,圆内接正多边形的面积就无限接近于圆的面积.

引例 2(单摆运动) 单摆离开垂直位置一定的距离后,在重力作用下左右摆动,如果不施加外力作用,那么,单摆在摩擦力和空气阻力作用下,其振幅会不断减小,时间越长,振幅也就越小,当时间无限延长时,那么单摆的振幅就无限接近于零.

若在自变量的某个变化过程中,函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为函数 $f(x)$ 在该变化过程中的极限.下面就自变量的不同变化趋势,分别介绍函数的极限.

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 5 对于函数 $f(x)$,当自变量 x 的绝对值无限增大时,如果对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 A **为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty).$$

当自变量 x 的绝对值无限增大时,如果对应函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称极限不存在,或称极限为无穷大,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

特别地,当自变量 x 取正值方向无限增大时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 A **为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty).$$

当自变量 x 取负值方向无限增大时,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于唯一确定的常数 A,则称 A **为函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限**,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to-\infty).$$

例如,对于函数 $y=\mathrm{e}^x$,当自变量 x 取负值无限增大时,即当 $x\to-\infty$ 时,对应函数值无限接近于常数零,即 $\mathrm{e}^x\to 0\ (x\to-\infty)$,对于函数 $y=\arctan x$,当 $x\to-\infty$ 时,对应的函数值无限接近于常数 $-\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;当 $x\to+\infty$ 时,对应的函数值无限接近于常数 $\frac{\pi}{2}$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

注意: 对于极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,自变量的变化方向包括 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式,只有当 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两种方式下函数 $f(x)$ 的极限都存在而且相等时,函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限存在,否则,$f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限不存在.

定理 1　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例如，对于函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，当 $x=1$ 时函数无意义，但是，当自变量 x 从 1 的左右两侧无限接近于 1 时，对应的函数值无限接近于唯一确定的常数 2.

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

首先介绍邻域的概念.

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，实数集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$ 称为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 由于不等式 $|x-x_0|<\delta\Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta\Leftrightarrow x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，所以邻域 $U(x_0,\delta)$ 实质上表示以点 x_0 为中心、长度为 2δ 的开区间(见图 1-5). 即

$$U(x_0,\delta)=\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

其中 x_0 称为**邻域中心**，δ 称为**邻域半径**. 有时还要用到去掉中心的邻域，叫作**去心邻域**. 点 x_0 的去心 δ 邻域记作 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，即

微课
函数 $f(x)$ 的极限

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

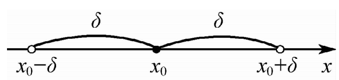


图 1-5

定义 6　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内有定义. 若当自变量 x 在该邻域内无限接近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（读作"x 趋近于 x_0"）时的**极限**. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

注意：(1)当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限是否存在与函数在 $x=x_0$ 处是否有定义无关；(2)在函数极限的定义中，$x\to x_0$ 的方式是任意的，即同时从 x_0 的左右两侧无限接近 x_0.

定义 7　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左半邻域 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义，当 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时(记作 $x\to x_0^-$)，函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，则称 A 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**，记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-) \text{ 或 } f(x_0-0)=A.$$

类似地可以给出函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限定义，右极限记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+) \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

定理 2　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ 1, & x=0\\ x, & x>0\end{cases}$，讨论 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

解　由图 1-6 知，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-x)=0$，

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$.

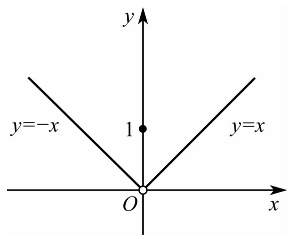


图 1-6

例 3　讨论下列极限是否存在.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解　(1)由图 1-7 知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，由定理 1，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

(2)由图 1-8 知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=1$.

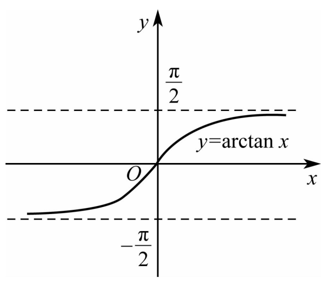


图 1-7

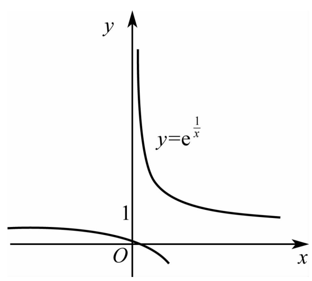


图 1-8

1.2.3　函数极限的性质

数列极限是函数极限的特殊情形，都归结为在自变量的某一变化过程中，函数值无限接近于某一确定的常数，因而它们具有共同的性质. 下面以 $x\to x_0$ 的情形为例来叙述.

性质 1(唯一性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质 2(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则必存在 x_0 的某一去心邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且在 x_0 的某一去心邻域内，函数 $f(x)\geqslant0$（或 $f(x)\leqslant0$），则

$A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

性质 4(夹逼准则)　如果函数 $g(x)$，$f(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内，满足下列条件：

(1) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

则函数 $f(x)$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

习题 1.2

1. 判别下列函数在给定的自变量变化趋势下极限是否存在. 若存在，值为多少？

(1) $x \to +\infty, f(x) = \arctan x$；　(2) $x \to 0^-, f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $x \to \dfrac{1}{2}, f(x) = x^2$；　(4) $x \to 1, f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$；

(5) $x \to 0, f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$；　(6) $x \to +\infty, f(x) = x(1+\sin x)$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$，讨论当 $x \to 0$ 时，$f(x)$的极限是否存在.

3. 求 $f(x) = \dfrac{x}{x}$，$g(x) = \dfrac{|x|}{x}$，当 $x \to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x \to 0$ 时的极限是否存在.

1.3　极限的运算

1.3.1　极限的四则运算法则

在自变量 x 的同一变化趋势下，设函数 $f(x)$和 $g(x)$的极限都存在，分别用 $\lim f(x)$和 $\lim g(x)$表示.

此处省略了自变量 x 的变化趋势，表示在下面的讨论中，对于 $x \to x_0$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$中的任何一种情形，结论都成立(下同).

法则 1　$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$(可推广至有限多个).

法则 2　$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$(可推广至有限多个).

推论 1　$\lim[C \cdot f(x)] = C \cdot \lim f(x)$($C$ 为常数).

推论 2　$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$.

法则 3　$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$($\lim g(x) \neq 0$).

上面的法则可以简单叙述为:若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限都存在,则它们代数和的极限等于极限的代数和,乘积的极限等于极限的乘积,商的极限等于极限的商(此时分母的极限不为 0). 关于数列的极限,也有类似的四则运算法则.

1.3.2 复合函数的极限运算法则

法则 4 设函数 $y=f[\varphi(x)]$ 由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成,且在点 x_0 的去心邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且在点 x_0 的去心邻域内有 $\varphi(x)\neq u_0$,则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

法则 4 表示,如果两个函数 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 满足相应的条件,则可以做变量代换 $u=\varphi(x)$,从而将求 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 的问题转化为求 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+1)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4x+1)=3\lim\limits_{x\to 2}x^2-4\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1$

$=12-8+1=5.$

利用极限的运算法则,不难得出如下结论:

设多项式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,则有

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=a_nx_0^n+a_{n-1}x_0^{n-1}+\cdots+a_1x_0+a_0.$$

即多项式的极限可以直接代入求解.

一般地,设多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

$$Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0.$$

则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}\quad (Q(x_0)\neq 0).$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}$.

解 由于分母的极限不为零,因此

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+6x-1}{3x^2+5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+6x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+5x+6)}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}.$$

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$.

解 当 $x\to 2$ 时,分子与分母的极限均为 0,极限为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式,此时不能直接利用商的运算法则,但由于分子和分母都有公因子 $(x-2)$,当 $x\to 2$ 时,$x-2\neq 0$,因此可以约去这个非零因子,所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

例 4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，分子与分母的极限都不存在，为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型的未定式，此时也无法用商的运算法则. 可先将分子与分母同时除以 x 的最高次幂，使分子和分母的极限都存在，再用相应的法则求解.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-1}{6x^2-2x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}=\frac{5+0-0}{6-0+0}=\frac{5}{6}.$$

用同样的方法，可以得到如下结论：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\infty, & m<n\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & m=n\\ 0, & m>n\end{cases}.$$

例 5　求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解　该极限为“$\infty-\infty$”型的未定式，可以先通分，然后化成极限存在的形式，再用相应的运算法则求解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1}{1-x}\right)&=\lim_{x\to 1}\frac{3-(1+x+x^2)}{(1-x)(1+x+x^2)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2+x}{1+x+x^2}=1.\end{aligned}$$

例 6　求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$.

解　该极限为“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式，此时不能直接利用商的运算法则，但由于分母中带有根号，因此可以先将分母有理化，再用相应的运算法则求解.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x+5}+3)=6.\end{aligned}$$

例 7　已知 $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-a}{x^2+5x+6}=b$，求常数 a,b.

解　因为当 $x\to -3$ 时，有 $x^2+5x+6\to 0$，所以分子 $x-a$ 也趋近于 0，即 $-3-a=0$，得 $a=-3$，则

$$原式=\lim_{x\to -3}\frac{x-(-3)}{x^2+5x+6}=\lim_{x\to -3}\frac{x+3}{(x+3)(x+2)}=-1.$$

所以 $b=-1$.

例 8(电路电阻) 把一个 5Ω 的电阻与一个电阻为 r 的可变电阻器并联,则电路的总电阻为

$$R=\frac{5r}{5+r}.$$

当含有可变电阻器 r 的这条支路突然断路时,求电路的总电阻.

解 当含有可变电阻器 r 的这条支路突然断路时,电路的总电阻为

$$R=\lim_{r\to+\infty}\frac{5r}{5+r}=5.$$

习题 1.3

1. 选择题

(1) 函数在一点附近有界是函数在该点有极限的( )条件.

A. 充分　　B. 必要

C. 充要　　D. 无关

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4(1+a)+bx^3+2}{x^3+x^2-1}=-2$,则 a,b 的值分别为( ).

A. $a=-3,b=0$　　B. $a=0,b=-2$

C. $a=-1,b=0$　　D. $a=-1,b=-2$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n}=$( ).

A. $\frac{3}{2}$　　B. -3

C. ∞　　D. 0

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=$( ).

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. 0　　D. ∞

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x+k}{x-2}=7$,则 $k=$( ).

A. 0　　B. -10

C. 10　　D. 不存在

(6) 若 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x\leqslant 0\\ ax+b, & x>0\end{cases}$ 在分段点 $x=0$ 处的极限为 1,则 $b=$( ).

A. -1　　B. 1

C. 0　　D. 2

2. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2-2x, & 0<x\leqslant 2\\ 3x+6, & x>2\end{cases}$，讨论当 $x\to 0$ 及 $x\to 2$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在，并且求 $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

4. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求 a,b 的值.

5. 设某企业生产 x 个汽车轮胎的成本(单位：元)为

$$C(x)=200+\sqrt{2+2x+x^2}$$

生产 x 个汽车轮胎的平均成本为 $\overline{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$，当生产量很大时，每个轮胎的成本大致为 $\lim\limits_{x\to +\infty}\overline{C}(x)$，试求这个极限.

1.4　两个重要极限

1.4.1　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

该重要极限可以解决一些与三角函数有关的极限，它在形式上有以下特征：

(1) 它是“$\dfrac{0}{0}$”型；

(2) 极限的形式可写成 $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$（$\square$ 表示同一个变量）；

(3) 极限的变形公式为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$.

例 1　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{5x}\cdot\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 5x}=\dfrac{3}{5}$.

(4)令 $t=\sin x$，当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$.

1.4.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

关于该极限，不做理论推导，只通过列出 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的数值表(表 1-4)来观察其变化趋势.

表 1-4

x	1	2	3	4	5	10	100	1 000	10 000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…

从表 1-4 可看出 x 增大时函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 变化的大致趋势. 这证明，当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的极限确实存在，并且是一个无理数，其值为 $\mathrm{e}=2.718\,281\,828\cdots$，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

这个极限的特征如下：

(1)它是“1^∞”型的极限，只有满足此类型才可考虑用该重要极限；

(2)该极限可形象地表示为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}\ (\square\text{代表同一变量}).$$

(3)在 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 中，若令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to 0$，于是又可得

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e},$$

或记作

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}.$$

例 2　求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x}$；

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x}$.

解　(1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot 3} = \lim\limits_{x \to \infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3} = \mathrm{e}^{3}$.

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-2x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-2x} = \left[\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-2} = \mathrm{e}^{-2}$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3+3} = \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3} \cdot \lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{3} = \mathrm{e}$.

习题 1.4

求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$；

(3) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$；

(4) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$；

(5) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}$；

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+5}$；

(7) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}$；

(8) $\lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{1}{1+t}\right)^{\frac{1}{3t}}$.

1.5　无穷小与无穷大

1.5.1　无穷小量

1. 无穷小量的定义

定义 1　若在 x 的某一变化趋势下，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称函数 $f(x)$ 为 x 的这种变化趋势下的**无穷小量**，简称无穷小.

微课
无穷小与无穷大

例如，函数 $f(x)=2x-4$ 是 $x\to 2$ 时的无穷小；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意：(1)无穷小是一个以零为极限的变量. 它表达的是量的变化状态，而不是量的大小，一个量无论多么小都不是无穷小，0 是唯一可看成无穷小的常数.

(2)无穷小与自变量的变化趋势有关. 称一个函数是无穷小，必须明确指出自变量的变化趋势，因为对于同一个函数，在自变量的不同变化趋势下，其极限值不同.

例如，当 $x \to 0$ 时，函数 $\sin x$ 是无穷小量；但当 $x \to 1$ 时，函数 $\sin x$ 不是无穷小量.

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，即 $x \to x_0$ 时，$f(x) - A \to 0$. 若记 $\alpha = f(x) - A$，则当 $x \to x_0$ 时，α 为无穷小量，且 $f(x) = A + \alpha$，于是得到极限的变量与无穷小量的关系：

定理 1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha$ $(\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0)$.

定理 1 对自变量 x 的变化过程其他任何一种情形（$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to \infty$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$）仍然成立.

例 1 证明 $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

证明 因为 $\sin \dfrac{1}{x}$ 为有界函数，且当 $x \to 0$ 时，x 为无穷小，所以当 $x \to 0$ 时，$x \sin \dfrac{1}{x}$ 为无穷小. 故有

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

2. 无穷小的运算性质

根据极限的性质和四则运算法则，可以证明下列有关无穷小的性质：

性质 1 有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量.

性质 2 有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

推论 1 常数与无穷小量的乘积也是无穷小量.

推论 2 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

例 2 计算 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \right)$.

解 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\frac{1}{2} n(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}$.

1.5.2 无穷大量

1. 无穷大量的定义

定义 2 在 x 的某一变化趋势下，若函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大，则称函数 $f(x)$ 为 x 的这种变化趋势下的**无穷大量**，简称无穷大. $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 的无穷大，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

例如，当 $x \to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 的绝对值无限增大，故 $\dfrac{1}{x-1}$ 是当 $x \to 1$ 时的无穷大量，即 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$；当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x$ 取负值但其绝对值无限增大，故 $\ln x$ 为 $x \to 0^+$ 时的负无穷大量，即 $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

注意：(1)无穷大量是一个绝对值无限大.

(2)无穷大量不趋向于任何确定的常数，所以无穷大量的极限不存在. $\lim\limits_{x \to ()} f(x) = \infty$ 只是一种记号，表示当 $x \to (\quad)$ 时，$|f(x)|$ 无限增大($x \to (\quad)$ 指自变量的任何一种变化趋势).

2. 无穷小量与无穷大量的关系

定理 2 在自变量的同一变化过程中，

(1)如果函数 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大量；

(2)如果函数 $f(x)$ 是无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小量.

例 3　计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^3-x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x}}=0$.

所以，由定理 2 可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2-2}{x^2+3}=\infty.$$

1.5.3　无穷小量阶的比较

前面讨论了两个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量，而两个无穷小量的商不一定是无穷小量. 商的极限出现几种不同情况，反映了无穷小量趋于零的速度的差异. 为了比较无穷小量趋于零的快慢，引入如下概念.

定义 3　设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小量.

(1)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta=o(\alpha)$.

(2)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(4)如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha\sim\beta$.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{x}=5$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 所以，当 $x\to 0$ 时，$x^2=o(x)$，x 是比 x^2 低阶的无穷小，$5x$ 与 x 是同阶无穷小，$\sin x\sim x$.

可以证明：当 $x\to 0$ 时，有如下常见的几个等价无穷小量.

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,\arcsin x\sim x,\arctan x\sim x,$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x.$$

等价无穷小在求两个无穷小之比的极限时，具有重要的作用. 对此有如下定理.

定理 3　设在自变量的同一变化过程中，$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}=A$（或 ∞），则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A\text{（或 }\infty\text{）}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$.

解 因为 $x\to 0$ 时，$\tan 5x \sim 5x$，$\sin 3x \sim 3x$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{3x}=\dfrac{5}{3}$.

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$.

解 因为 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim \dfrac{1}{2}x^2$，于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

习题 1.5

1. 下列各题中,哪些是无穷小量？哪些是无穷大量？

(1) $y=\cot x$，当 $x\to 0$ 时；　(2) $y=\mathrm{e}^{-x}$，当 $x\to+\infty$ 时；

(3) $y=\ln|x|$，当 $x\to 0$ 时；　(4) $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$，当 $x\to\infty$ 时.

2. 下列函数在什么情况下是无穷小量？在什么情况下是无穷大量？

(1) $y=\dfrac{x+2}{x-1}$；　(2) $y=\lg x$；　(3) $y=\dfrac{x+3}{x^2-1}$.

3. 证明当 $x\to 0$ 时，x^3+2x^2 是比 x 高阶的无穷小量.

4. 利用等价无穷小的性质,求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos 2x)}{x^4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{1-\cos x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2-2(1-\cos^2 x)}{3x^3+4\tan^2 x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$（$n$ 为自然数）；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$.

1.6 函数的连续性

在自然界中有许多现象,如季节的变化、地壳的变迁、冰川的融化等都是连续地变化着的.在很短的时间内,它们的变化都是很微小的,这种现象在函数关系上的反映,就是所谓的函数的连续性.本节将利用函数极限的概念讨论函数的连续性概念与间断点的分类.

1.6.1　函数连续性的概念

函数的连续性是与函数的极限密切相关的重要概念，我们可以用极限来给出函数连续性的定义. 下面先引入增量的概念，然后再引出函数连续性的定义.

微课

函数的连续性

1. 增量的概念

设函数 $y=f(x)$在点 x_0的附近有定义. 当自变量 x 从 x_0变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数值 y 相应地从 $f(x_0)$变到 $f(x_0+\Delta x)$（见图 1-9），因此函数 y 的对应增量为

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

其中，Δx 称为自变量的增量，Δy 称为函数值的增量.

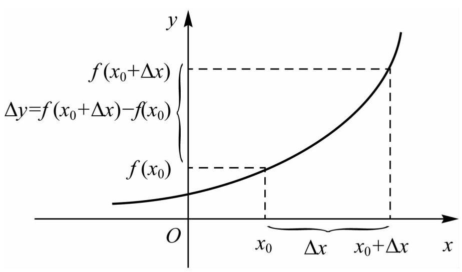


图 1-9

注意：增量 Δx、Δy 可以是正，也可以是负.

2. 连续的定义

从自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$与函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$的关系出发，我们给出函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续的定义.

定义 1　设函数 $y=f(x)$在点 x_0的附近有定义，如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续.

如果设 $x=x_0+\Delta x$，则 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$. 又由于

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$$

所以 $\Delta y\to 0$ 就相当于 $f(x)\to f(x_0)$. 于是我们可得出下面的等价定义：

定义 2　设函数 $y=f(x)$在点 x_0的附近有定义，如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的极限存在，且等于它在点 x_0处的函数值 $f(x_0)$，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$在点 x_0处连续.

由定义 2 可知，函数 $f(x)$在点 x_0 处连续必须满足以下三个条件：

(1) $f(x)$在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$有意义.

(2) 极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

由定义 2 可以看出，求连续函数在某点的极限，只需求出函数在该点的函数值即可.

例如，函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，是因为 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$.

3. 左连续、右连续的概念

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0-0)=f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$ 存在且等于 $f(x_0)$，即 $f(x_0+0)=f(x_0)$，就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

显然，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，或者说函数 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 内的连续函数. 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点连续，并且在左端点 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处左连续，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，闭区间 $[a,b]$ 称为函数 $f(x)$ 的连续区间.

连续函数的图像是一条连续而不间断的曲线.

例 1 判定函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ 2x+1, & x\geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(2x+1)=1$，于是

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处左连续且右连续，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

例 2 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

证明 设 x 为区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点，则有

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

因为当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 是无穷小与有界函数的乘积，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

这就证明了函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点 x 处都是连续的.

同理可证，函数 $y=\cos x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的.

由函数在一点 x_0 处连续的定义及 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f\left(\lim_{x\to x_0}x\right)$$

也就是说，对于连续函数，极限符号与函数符号可以互换.

例如，求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$，因为 $y=\sin x$ 是连续函数，所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

1.6.2　函数的间断点

如果函数 $f(x)$在点 x_0 处不连续，则称 $f(x)$在点 x_0 处间断，称点 x_0 为 $f(x)$的间断点.

设函数 $f(x)$在点 x_0 的附近有定义. 在此前提下，如果函数 $f(x)$有下列三种情形之一：

(1)在 $x=x_0$ 处没有定义；

(2)虽在 $x=x_0$ 处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3)虽在 $x=x_0$ 处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$在点 x_0 处为不连续，而称点 x_0 为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

下面我们通过例子说明函数间断点的类型.

例 3　函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$在 $x=1$ 处没有定义，所以点 $x=1$ 是函数的间断点.

因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，如果补充定义 $f(1)=2$，则所给函数在 $x=1$ 处连续. 我们称 $x=1$ 为该函数的可去间断点. 做出其图像如图 1-10 所示.

例 4　设函数 $y=f(x)=\begin{cases}x, x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}, x=1\end{cases}$，因为$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}x=1$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq f(1)$，所以 $x=1$ 是函数 $f(x)$的可去间断点. 做出其图像如图 1-11 所示.

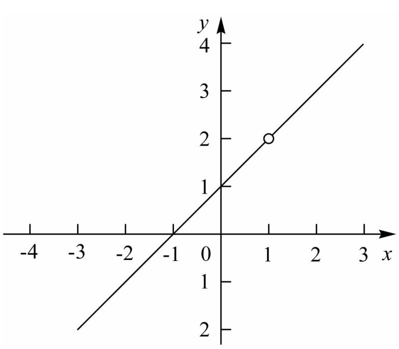


图 1-10

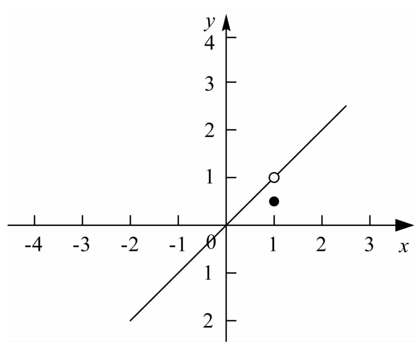


图 1-11

如果改变函数 $f(x)$在 $x=1$ 处的定义，令 $f(1)=1$，则函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续，我们也称 $x=1$ 为该函数的可去间断点.

例 5　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, x\geqslant 0\\ x-2, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0)$，所以 $f(x)$在点 $x=0$ 处右连续但不左连续，故 $f(x)$在点 $x=0$ 处不连续. 因为 $y=f(x)$的图形在 $x=0$ 处产生跳跃现象，所以我们称 $x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点.

例 6 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$处没有定义，所以点 $x=\frac{\pi}{2}$是函数 $\tan x$ 的间断点. 因为$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty$，故称 $x=\frac{\pi}{2}$为函数 $\tan x$ 的无穷间断点.

例 7 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$在点 $x=0$ 处没有定义，所以点 $x=0$ 是函数 $\sin\frac{1}{x}$的间断点.

当 $x\to 0$ 时，函数值在-1 与 1 之间变动无限多次，所以我们称点 $x=0$ 为函数 $\sin\frac{1}{x}$**的振荡间断点**.

就一般情况而言，通常把间断点分成两类：如果 x_0 是函数 $f(x)$的间断点，但左极限 $f(x_0-0)$及右极限 $f(x_0+0)$都存在，那么 x_0 称为函数 $f(x)$的**第一类间断点**. 不是第一类间断点的任何间断点，称为**第二类间断点**. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 无穷间断点和振荡间断点显然是第二类间断点.

1.6.3 初等函数的连续性

1. 连续函数四则运算的连续性

定理 1 若函数 $f(x)$和 $g(x)$均在点 x_0 处连续，则 $f(x)+g(x)$、$f(x)-g(x)$、$f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 处连续，若 $g(x_0)\neq 0$，则$\frac{f(x)}{g(x)}$在点 x_0 处也连续.

证明 仅证明 $f(x)\cdot g(x)$的情形，其余从略.

因为 $f(x)$和 $g(x)$在点 x_0 处连续，所以有$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$，由极限的运算法则可得

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)]\cdot\lim_{x\to x_0}[g(x)]=f(x_0)\cdot g(x_0),$$

因此，$f(x)\cdot g(x)$在点 x_0 处连续.

2. 复合函数的连续性

定理 2 设函数 $y=f(u)$在点 u_0 处连续，函数 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 处连续.

若 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$满足定理 2 的条件，则$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]$也可以看成$\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$，即

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

这说明，在求连续函数的复合函数的极限时，极限符号与函数的运算符号可以交换次序.

3. 反函数的连续性

定理 3　若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单调且连续，则其反函数在对应的区间上也单调且连续，且它们的单调性相同.

4. 初等函数的连续性及连续函数极限运算

连续函数经过四则运算及复合运算后仍然是连续函数，根据初等函数的定义可得如下结论：

定理 4　初等函数在其定义域内都是连续的.

定理 4 说明，求初等函数在定义域内指定点处的极限时，只需计算该点处的函数值即可.

例 8　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{5-\sin 2x}$.

解　因为 $\sqrt{5-\sin 2x}$ 是初等函数，在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{5-\sin 2x}=\sqrt{5-\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}=2.$$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

解　因为 $\frac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$ 是初等函数，在点 $x=0$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\cos x}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{0^2+\cos 0}{e^0\sqrt{1+0^2}}=1.$$

例 10　计算 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$.

解　虽然 $\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$ 是初等函数，但在点 $x=4$ 处没有定义，不能直接代入；将分子与分母有理化后，可以消去零因子，从而转化为另一个初等函数的极限.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{2x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{(2x+1-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}.\end{aligned}$$

此时,初等函数$\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}$在点 $x=4$ 处有定义,则

$$\lim_{x\to4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{2x+1}+3}=\frac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{2\times4+1}+3}=\frac{4}{3}.$$

即$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}=\frac{4}{3}$.

1.6.4 闭区间上连续函数的性质

在闭区间上连续的函数有许多重要的性质,这些性质的证明涉及严密的实数理论,因此我们不予证明,仅做必要的几何解释.

定理 5(最值定理) 闭区间上连续的函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,它的最大值为 M,最小值为 m,则对任何 $x\in[a,b]$,都有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 若取 $K=\max\{|m|,|M|\}$,则对任意的$x\in[a,b]$,都有 $|f(x)|\leqslant K$,即 $f(x)$在$[a,b]$上有界,于是得

定理 6(有界性定理) 闭区间上连续的函数在该区间上一定有界.

定理 7(介值定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,μ 为介于 $f(a)$与 $f(b)$ 之间的任何数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=\mu$.

介值定理的几何意义是明显的. 当 $f(a)\neq f(b)$且μ 介于 $f(a)$与 $f(b)$ 之间时,连续曲线 $y=f(x)$ 的两端点$A(a,f(a))$与$B(b,f(b))$位于水平线$y=\mu$的两侧,因此曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\mu$ 必有交点(见图 1-12).

推论(零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$(见图 1-13).

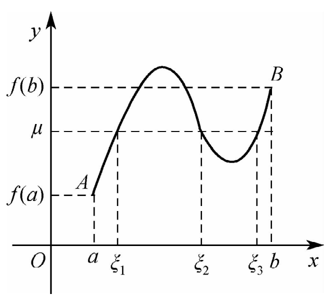


图 1-12

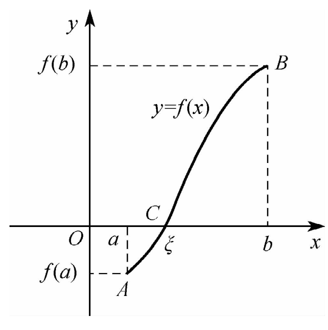


图 1-13

换句话说,在推论条件下,方程 $f(x)=0$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个实根.

例 11 证明方程 $\sin x-x+1=0$ 在 0 与 π 之间有实根.

证明 设 $f(x)=\sin x-x+1$,因为 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,所以 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且

$$f(0)=1>0, f(\pi)=-\pi+1<0,$$

因此由零点定理知，至少存在一点 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $\sin x-x+1=0$ 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个实根.

习题 1.6

1. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性. 若为间断点，判定其类型，并写出连续区间.

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$；　(2) $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ \sin x, & x\geqslant 0\end{cases}$；　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin 2x, & x<0\\ a, & x=0\\ x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x>0\end{cases}$，试确定常数 a,b 之值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}(a>0 \text{ 且 } a\neq 1)$；　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

4. 求下列函数的间断点并判定其类型；如果是可去间断点，则补充定义使函数在该点连续.

(1) $y=\dfrac{x}{x+1}$；　(2) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$；　(4) $y=\dfrac{x}{\sin x}$.

5. 证明方程 $x^5-3x=1$ 在区间(1,2)中至少有一个实根.

复习题 1

一、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ \ln(2-x), & 1<x<2\end{cases}$，则其定义域为__________.

2. 设 $f(x)=\dfrac{ax}{2x+3}$，且 $f[f(x)]=x$，则 $a=$ __________.

3. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=$ __________；$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=$ __________.

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)}{x}=\dfrac{2}{3}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=$ ______________.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$，则 $f(1)=$ ______________.

二、选择题

1. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$，则 $f(x)=($　　$)$.

A. $(1+x)^2$　　B. $(1-x)^2$　　C. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$　　D. $1+x$

2. 函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

3. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{kx}=\mathrm{e}^3$，则 $k=($　　$)$.

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

4. 对初等函数来说，其连续区间一定是(　　).

A. 开区间　　B. 闭区间　　C. $(-\infty,+\infty)$　　D. 其定义区间

5. $x=-1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的(　　)间断点.

A. 第一类跳跃　　B. 第一类可去

C. 第二类无穷　　D. 第二类震荡

三、计算题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\leqslant 1\\ x, & x>1\end{cases}$，求 $f[f(x)]$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ x+1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求：

(1)写出 $f(x)$ 的定义域；

(2)作出函数 $f(x)$ 的图形；

(3) $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 、$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 、$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$；

(4)讨论函数在 $x=0$ 处的连续性，若间断，指出间断点的类型.

3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

4. 已知 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+5}{x+2}=5$，求 a,b 的值.

5. 求出下列函数的间断点，并指出其类型.

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$；　(2) $y=\begin{cases} e^x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x, & x>0 \end{cases}$；　(3) $y=\cos\dfrac{1}{x^2}$.

6. 证明方程 $x-2\sin x=1$ 至少有一个小于 3 的正根.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x<0 \\ 2x+b, & x\geqslant 0 \end{cases}$，试确定 b 的值，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上成为连续函数.