高等数学简明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

（第2版）

策划编辑：金颖杰

责任编辑：边丽新

封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-7078-2

9 787563 570782 >

定价：45.00元

高等数学简明教程（第2版）

北京邮电大学出版社

W01

（第2版）

高等数学简明教程

GAODENG SHUXUE JIANMING JIAOCHENG

主编 乔正明 郭 蕾

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书在保证科学性和系统性的基础上,注重概念、定理的阐述,减少论证过程,力求简洁、通俗.全书主要内容包括函数、极限与连续,导数与微分,微分中值定理及导数的应用,不定积分,定积分及其应用,微分方程等.

本书可作为高职高专院校非数学专业数学基础课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程 / 乔正明,郭蕾主编. -- 2 版. -- 北京:北京邮电大学出版社,2023.12
ISBN 978-7-5635-7078-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①乔… ②郭… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 243139 号

策划编辑: 金颖杰 **责任编辑:** 边丽新 **封面设计:** 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社
社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码: 100876
发 行 部: 电话:010-62282185 传真:010-62283578
E-mail: publish@bupt.edu.cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 三河市众誉天成印务有限公司
开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张: 13
字 数: 269 千字
版 次: 2017 年 5 月第 1 版 2023 年 12 月第 2 版
印 次: 2023 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-7078-2 定 价:45.00 元

第2版前言

党的二十大报告指出："加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设，加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科."高等数学是职业院校一门重要的公共基础课.学生学习高等数学可以为后续专业学习和职业发展打下坚实基础.

根据近年第1版教材使用情况的反馈意见，从高职学生的实际情况出发，遵循《"十四五"职业教育规划教材建设实施方案》和《高等学校课程思政建设指导纲要》等文件精神，编者对第1版教材进行了修订.

本书修订后体现了如下特色与创新.

1. 内容设计合理

在课程内容的编写上，以"适度、够用"为基本原则，选定"一元函数微积分"为内容主体，并保留了"一元函数微积分"的完整知识体系.教材无缝衔接初高中数学，降低了对学生数学理论储备的要求.另外，遵循"概念—计算—应用"这个清晰脉络组织极限、微分和积分的内容，最大化地满足了学生对"一元函数微积分"知识的学习需求.

2. 符合职业教育特色

适应国家职业教育教学改革需要，内容设计符合职业教育特色，将数学建模思想贯穿于书中，强化培养学生的数学应用能力.每章内容都以计算应用为主，以推证理论为辅.语言上，多采用描述性的定义和形象解释的结论，尽量减少推证的定理，更利于学生掌握.本书突出数学知识和实际问题的联系，有利于加强学生利用数学建模思想解决实际问题的意识，提升学生解决实际问题的创新能力.

3. 融入育人元素

为了贯彻执行《高等学校课程思政建设指导纲要》《关于加强和改进新形势下高校思想政治工作的意见》等文件要求，将思想政治教育贯穿人才培养体系，全面落实立德

树人根本任务.本书以党的二十大精神为指引,在修订过程中增加了“数学小故事”“数学趣谈”等栏目,并在其中融入了课程思政的相关内容,引导学生树立正确的世界观、人生观、价值观,加强对学生的理想信念教育.

4.配套教学资源

本书借助先进技术,增加了微课二维码作为补充教学资源,既能为教师线上线下混合教学提供资源,也能满足学生课后进行自我学习的需求,努力创设课堂和课后融合、线上与线下贯通的育人环境.

本书由常州纺织服装职业技术学院乔正明、郭蕾任主编,常州纺织服装职业技术学院裴琴娟、范荣荣参与了编写.

由于编者水平有限,书中难免存在不足和疏漏之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

第1版前言

高等数学课程是培养学生计算、逻辑推理、抽象思维和空间想象以及应用知识能力必不可少的一门课程，是高职高专各专业的一门重要公共基础课程. 本教材是根据教育部制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专院校在培养技术应用型人才方面的教学特点编写而成的.

在编写过程中，我们综合吸收了大量优质教材的特点，密切结合当前高职高专教学改革的实际，在保证科学性的基础上，注重讲清概念，减少论证，力求简洁、通俗，符合学生的学习心理，方便学生对高等数学的学习、理解和应用. 本教材主要具有以下特点.

(1)注重各专业培养目标对数学基础知识的需求和学生可持续发展的需要. 根据不同专业的需要与不同生源的情况选择与整合数学知识. 恰当把握教学内容的深度与广度，适度保持数学自身的系统性与逻辑性，以适合于高等职业院校学生的实际数学水平.

(2)考虑学习对象的状况及特点，在讲述基本公式、概念和定理的过程中，注意其几何图形的直观阐述；用实例引入抽象概念的讲解；例题的讲解清晰明了，并总结了不同类型题目的解题思路；对学生容易出错的地方，给出了“注意”予以提醒. 在理论阐述和习题编排中，有意识地培养学生的数学思维和数学修养. 不过分追求复杂的计算和理论上的严密论证，加强与实际应用联系较多的基础知识、基本方法、基本技能的训练.

(3)在每章开始都用简短语言提出了本章知识点，使学生一开始就明确各章的学习内容和主要目标. 书中的例题、习题的类型和数量配置合理. 每节后配有练习题，每章后配有复习题 A 组(基础层次)和 B 组(提高层次)，以便学生及时检测学习效果和归纳学

习内容.

另外,本教材中带有“*”的内容,读者可根据实际需要选学.

本书由乔正明担任主编,孙阿平和杨晓春担任副主编.

由于编者水平有限,衷心地希望广大读者对书中的不足之处给予批评与指正.

编　者

目录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，是高等数学中重要的概念之一；极限是高等数学中研究问题的基本方法，而函数的连续则是研究的条件. 本章在复习函数基础知识的基础上，着重介绍函数的极限和函数的连续性等基本概念、性质及运算法则.

第一节　函　　数

在自然界、社会经济现象及工程技术中存在着许多不同的变量，并且它们之间存在着某种联系，这里研究的函数即是对这种量与量之间相互依存关系的描述.

一、函数的概念

引例 1　设圆的面积为 S，半径为 r，则这两个变量之间的相互依存关系由公式

$$S=\pi r^2$$

确定.

分析　当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，根据上述公式，变量 S 都有唯一确定的值和它对应.

引例 2　某厂每天最多生产某种产品 2 000 件，设备和管理费用等固定成本为 10 000 元，每生产一件产品，成本增加 50 元，则每天的生产成本 C 与日产量 x 之间的对应关系由式

$$C=10\ 000+50x$$

确定.

分析　当日产量 x 在集合 $\{0,1,2,\cdots,2\ 000\}$ 内任取一值时，根据上式，生产成本 C 都有唯一确定的值和它对应.

以上两例表明，在一个问题中往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是直接或间接地相互联系且相互制约. 它们之间这种相互依赖的关系表现

了客观世界中事物变化的内在规律,这种规律用数学进行描述就是函数关系.

定义 1 设 x,y 是两个变量,D 是给定的非空数集,如果变量 x 在 D 内任取一个确定的数值时,变量 y 按照一定的法则 f 都有唯一确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的**函数**,记为

$$y=f(x), x\in D,$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**(或**函数**),数集 D 称为函数的**定义域**,f 称为函数的**对应法则**.

当 x 取确定数值 $x_0\in D$ 时,通过法则 f,函数有唯一确定的值 y_0 与之对应,则称 y_0 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记为

$$y_0=y\Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

由全体函数值构成的集合称为函数的**值域**,记为 M,即 $M=\{y\mid y=f(x), x\in D\}$.

由函数的定义可以看出,定义域和对应法则是确定函数的两个必不可少的要素,也就是说,如果两个函数的对应法则和定义域都相同,那么这两个函数就是相同的函数.

例 1 函数 $y=x+1$ 与函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 是否表示同一函数?

解 否,它们表示两个不同的函数. 前者的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,后者的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. 因为定义域不同,所以函数不同.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的,如引例 1 中,函数 $S=\pi r^2$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$;引例 2 中,函数 $C=10\,000+50x$ 的定义域为 $D=\{0,1,2,\cdots,2\,000\}$. 但在数学上做一般性研究时,对于只给出表达式而没有说明实际背景的函数,规定:函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的取值范围,一般考虑以下几个方面.

(1) 分式函数的分母不能为零.

(2) 偶次根式的被开方式必须大于或等于零.

(3) 对数函数的真数必须大于零.

(4) 三角函数与反三角函数要符合其定义.

(5) 如果函数表达式中含有上述几种函数,则应取各部分定义域的交集.

例 2 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\ln(x+1)$.

解 (1) 由 $x^2-1\neq 0$，得 $x\neq\pm 1$，所以函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 因为 $\begin{cases}1-x>0,\\x+1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<1,\\x>-1,\end{cases}$ 所以函数的定义域为 $(-1,1)$.

在函数的定义中，对定义域 D 内的每一个 x 值，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对定义域 D 内的每一个 x 值，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=R^2$ 给出. 显然，对每个 $x\in[-R,R]$，由方程 $x^2+y^2=R^2$ 可确定出对应的 y 值：当 $x=R$ 或 $-R$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-R,R)$ 内任一值时，对应的 y 有两个值. 所以这个方程确定了一个多值函数.

多值函数是单值函数的复杂表现，只要把单值函数研究透彻了，多值函数的问题也就迎刃而解了. 所以本书主要讨论单值函数，今后如不加声明，函数均指单值函数.

二、函数的基本性质

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义（区间 I 为函数 $f(x)$ 的定义域或定义域的一部分），则函数一般具有下列几种性质.

1. 单调性

微课

函数的基本性质

定义 2 若对任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**（或**单调减少**）. 区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）；单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**；单调增区间和单调减区间统称为**单调区间**.

例如，$y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0]$ 内单调减少. 又如，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

2. 周期性

定义 3 如果存在不为零的实数 T，使得对任意的 $x\in I$，$x+T\in I$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是**周期函数**，T 是 $y=f(x)$ 的一个**周期**. 通常所说的周期函数的周期是指它的**最小正周期**.

例如，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

3. 奇偶性

定义 4 设区间 I 关于原点对称，若对任意的 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称函数

$f(x)$ 是区间 I 上的**偶函数**;若对任意的 $x \in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的**奇函数**;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称其为**非奇非偶函数**.

例如,$y=x^2$ 与 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是偶函数,$y=x^3$ 与 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,$y=x+1+\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是非奇非偶函数.

4. 有界性

定义5 如果存在正数 M,使对任意的 $x \in I$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上**有界**,否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**.

例如,$y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为 $|\sin x| \leqslant 1$ 对任何 $x \in (-\infty,+\infty)$ 都成立;而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(-1,1)$ 上无界,因为不存在正数 M,使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right| \leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 上的一切 x 都成立,如图1-1所示.

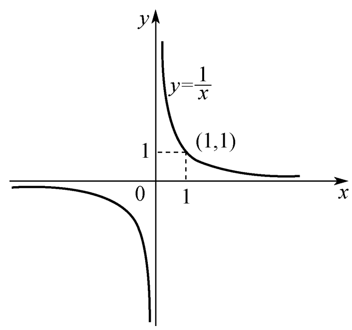


图1-1

三、反函数

在研究两个变量之间的函数关系时,可根据问题的实际需要选定其中一个变量为自变量,选定另一个变量为函数.

例如,在商品销售中,已知某种商品的价格为 $p(p>0)$,设其销售量为 x,销售收入为 y. 当已知销售量 x 时,根据关系式

$$y=px$$

可求得销售收入 y,这里 y 是 x 的函数;反之,若已知销售收入 y,求对应的销售量 x 时,根据 $y=px$ 可解得

$$x=\frac{y}{p},$$

这时 y 是自变量,x 是因变量,x 是 y 的函数,称 $x=\dfrac{y}{p}$ 为 $y=px$ 的反函数.

定义 6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每个数 y，在 D 中都有唯一确定的数 x 与之对应，且使 $y=f(x)$ 成立，则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$，其定义域为 M，值域为 D.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中的 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in M$.

相对于反函数 $y=f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**. 把直接函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-2 所示.

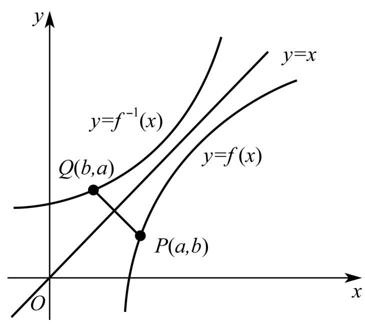


图 1-2

求反函数的一般步骤是：先由 $y=f(x)$ 解出 x，得 $x=\varphi(y)$，看它是否能成为函数；如果它是一个函数，再将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 x，y 分别换为 y，x，即得 $y=f(x)$ 的反函数 $y=\varphi(x)$.

例 3 求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解得 $x=y^3-1$. 当 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任取一值时，有唯一确定的 x 值与之对应，所以它是一个函数. 将 x，y 分别换为 y，x，得

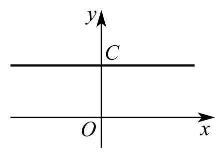
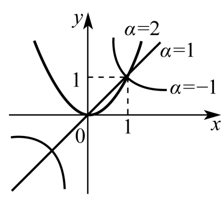
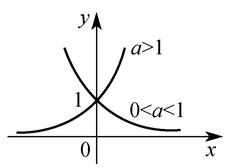
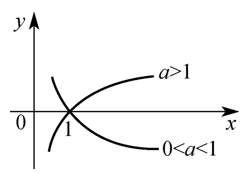
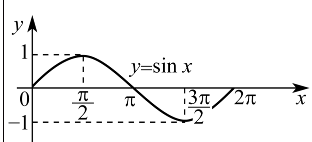
$$y=x^3-1,$$

即函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 的反函数为 $y=x^3-1$.

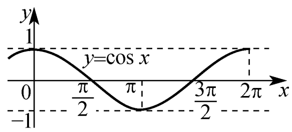
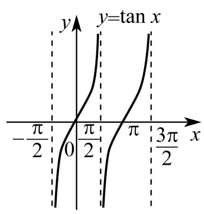
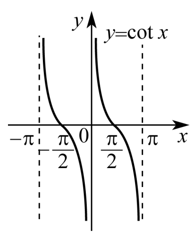
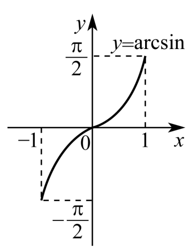
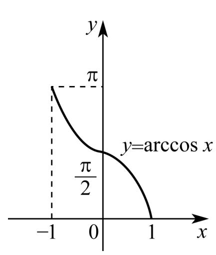
四、基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**. 为方便后面的学习，现将这六类初等函数的表达式、定义域、值域、图形、性质等列表表示出来（见表 1-1）.

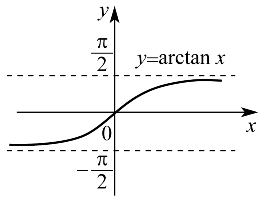
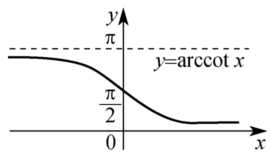
表 1-1

函　　数	定义域和值域	图　　形	性　　质
常数函数 $y=C$ (C 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$		(1) 有界; (2) 偶函数
幂函数 $y=x^{\alpha}$ (α 为实数)	定义域和值域由 α 的取值决定		(1) 图形过点(1,1); (2) 在第一象限内,当 $\alpha>0$ 时,单调增加;当 $\alpha<0$ 时,单调减少
指数函数 $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		(1) 图形过点(0,1); (2) 图形在 x 轴上方; (3) 当 $0<a<1$ 时,单调减少;当 $a>1$ 时,单调增加
对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq1$, a 为常数)	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		(1) 图形过点(1,0); (2) 图形在 y 轴右侧; (3) 当 $0<a<1$ 时,单调减少;当 $a>1$ 时,单调增加
三角函数　正弦函数 $y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		(1) 图形过原点; (2) 奇函数; (3) 有界; (4) 周期为 2π,在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 内单调增加,在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ 内单调减少($k\in\mathbf{Z}$)

续表

函数		定义域和值域	图形	性质
三角函数	余弦函数 $y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		(1) 偶函数； (2) 有界； (3) 周期为 2π，在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]$ 内单调增加，在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	正切函数 $y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		(1) 奇函数； (2) 无界； (3) 周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	余切函数 $y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		(1) 奇函数； (2) 无界； (3) 周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		(1) 图形过原点； (2) 奇函数； (3) 有界； (4) 单调增加
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		(1) 有界； (2) 单调减少

续表

函数		定义域和值域	图形	性质
反三角函数	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$		(1) 图形过原点; (2) 奇函数; (3) 有界; (4) 单调增加
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		(1) 有界; (2) 单调减少

五、复合函数

事物与事物的关系,通常是相互关联、错综复杂的. 例如,某水库的水位是随着时间的变化而改变的,而水库的蓄水量又是由水库的水位决定的. 因此,水库的蓄水量与时间之间也存在着联动关系. 将这种相互连带关系抽象为数学的概念,就是复合函数.

定义7 设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,其中 u 称为**中间变量**.

例如,$y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 可复合成 $y=\sin^2 x$.

复合函数还可以有多个中间变量,如 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

注意 并不是任意两个函数都能构成复合函数. 例如,$y=\sqrt{1-u^2}$ 和 $u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 因为对函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 而言,必须要求变量 $u\in[-1,1]$,而 $u=x^2+2\geqslant 2$,所以对任何 x 值,y 都得不到确定的对应值.

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,也能将一个较复杂的函数分解成几个简单的函数,这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例4 将下列复合函数进行分解.

(1) $y=\ln\cos x$; (2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$; (3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$.

解 (1) $y=\ln\cos x$ 是由 $y=\ln u, u=\cos x$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt[3]{\sin x}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=\sin x$ 复合而成的.

(3) $y=3^{\arccos(3x+2)}$ 是由 $y=3^u, u=\arccos v, v=3x+2$ 复合而成的.

六、初等函数与分段函数

定义 8 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成并用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

例如,$y=\ln\cos x, y=\dfrac{x(x+\sqrt{x^2+1})}{x-1}, y=\cos^2 x+2$ 等都是初等函数.

定义 9 在自变量的不同变化范围内,对应法则用不同的式子表示的函数,称为**分段函数**.

分段函数仍旧是一个函数,而不是几个函数. 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

例如,符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 就是一个分段函数,其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<3,\end{cases}$ 求 $f(0), f\left(\dfrac{1}{2}\right), f(2)$ 及函数的定义域.

解 $f(0)=2^0=1, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}, f(2)=1$,函数的定义域为$(-1,3)$.

分段函数一般不是初等函数,如函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 不能用一个式子表示. 但少数例外,如绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是初等函数.

习题 1-1

1. 下列各组函数是不是相同的函数?

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$;　　(2) $y=|x|$ 与 $u=\sqrt{v^2}$;

(3) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$;　　(4) $y=1$ 与 $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{5}{x^2+2}$;　　(2) $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\ln(4-x)$;

(3) $y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{2-x}, & 0<x<2.\end{cases}$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+1, & -1<x<0,\\ 0, & 0\leqslant x<2,\end{cases}$ 求 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=3x^2-x^6$;　　(2) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

(3) $y=\mathrm{e}^{-x^2}+x$;　　(4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=2x-3$;　　(2) $y=\ln(x-1)+1$.

6. $f(x)=(x+1)^2$,$g(x)=\mathrm{e}^x$,求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

7. 指出下列复合函数的复合过程.

(1) $y=\cos 4x$;　　(2) $y=\ln(1+2x)$;

(3) $y=\sin^2(\sqrt{x}+1)$;　　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

8. 王先生到郊外散步,以 2 km/h 的速度匀速步行 1 h 后,发现一骑车人的自行车坏了,便花 1 h 帮人把车修好,随后加快速度,以 3 km/h 的速度匀速步行 1 h 后到达终点,然后又匀速折返,耗时 2 h 返回出发点. 试求出发点与终点的距离 y 与步行时间 x 之间的函数关系.

第二节　极　　限

极限概念是高等数学的重要概念,极限方法是高等数学的基本方法. 所谓极限方法,就是通过考察变量的无限趋向来解决初等数学所不能解决的问题. 高等数学中的许多概念都是以极限为基础建立起来的,因此,本节内容十分重要.

一、数列的极限

引例 3　中国古代哲学家庄周在《庄子·天下篇》中引述惠施的话:“一尺之棰,日取

其半，万世不竭.”

分析 这句话的意思是指一尺的木棒，第一天取它的一半，即$\frac{1}{2}$尺；第二天再取剩下的一半，即$\frac{1}{4}$尺；第三天再取第二天剩下的一半，即$\frac{1}{8}$尺；这样一天天地取下去，而木棒是永远也取不完的.

尽管木棒永远取不完，可到了一定的时候，还能看得见吗?看不见意味着什么?不就是快没了吗?终极的时候，就近乎没有了.它的终极状态就趋于零.

事实上，假设木棒为一个单位长，用x_n表示第n天截取之后所剩下的长度，可得

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=\frac{1}{4},x_3=\frac{1}{8},\cdots,x_n=\frac{1}{2^n},\cdots,$$

这样$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$构成一列有次序的数.设想$n$无限增大(记为$n\to\infty$)，在这个过程中，$x_n$无限接近于一个确定的数值(零)，这个确定的数值(零)在数学上称为上面这列有次序的数(所谓数列)$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$当$n\to\infty$时的极限.

先说明数列的概念.数列就是按照一定顺序排成的一列数，一般记为$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$，简记为$\{x_n\}$，其中$x_n$称为数列的**通项**.

例如，数列$1,2,3,4,5,\cdots$的通项是$x_n=n$，可以记为$\{n\}$；数列$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\cdots$的通项是$x_n=\frac{1}{n}$，可以记为$\left\{\frac{1}{n}\right\}$；数列$2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots$的通项是$x_n=2^n$，可以记为$\{2^n\}$.

数列$\{x_n\}$也可看成自变量为正整数n的函数：$x_n=f(n)$，其定义域是全体正整数.当自变量n依次取$1,2,3,\cdots$一切正整数时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

引例3蕴含了数列极限思想，现把数列极限的定义描述如下.

定义10 对于数列$\{x_n\}$，若当n无限增大时，通项x_n无限接近于某个确定的常数A，则常数A称为数列$\{x_n\}$的**极限**，此时也称数列$\{x_n\}$收敛于A，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A(n\to\infty)$.若数列$\{x_n\}$的极限不存在，则称数列$\{x_n\}$**发散**.

注意 数列极限是一个动态概念，是变量无限运动渐进变化的过程，是一个变量(项数为n)无限运动的同时另一个变量(对应的通项为x_n)无限接近于某个确定常数的过程，这个常数(极限)就是这个无限运动变化的最终趋势.

例1 写出下列数列的极限.

(1) $\{x_n\}=\left\{\frac{n+1}{n}\right\}$：$2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\cdots,\frac{n+1}{n},\cdots$；

(2) $\{x_n\}=\left\{\frac{1}{3^n}\right\}$: $\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$;

(3) $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$: $-1,1,-1,1,\cdots,(-1)^n,\cdots$.

解 当 $n\to\infty$ 时,数列(1) 的通项 $x_n=\frac{n+1}{n}$ 越来越接近于常数 1;而数列(2) 的通项 $x_n=\frac{1}{3^n}$ 越来越接近于常数 0;数列(3) 的通项 $x_n=\{(-1)^n\}$ 在 -1 与 1 之间交替出现而不趋于任何确定的常数,所以

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 不存在.

二、函数的极限

数列是一种特殊形式的函数,将数列的极限进行推广可得到函数的极限. 根据自变量的变化过程,分两种情况讨论函数的极限.

1. $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 11 设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,若当 $|x|$ 无限增大时,相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一确定的常数 A,则 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty),$$

其中 $x\to\infty$ 表示 x 的绝对值无限增大.

若当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$) 时,函数趋近于某一确定的常数 A,则记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

从图 1-1 中容易看出,$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$.

不难证明,函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限与在 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时的极限有如下关系.

定理 1 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例 2 讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解 由反正切函数的图形知,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

由定理 1 知，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

首先介绍邻域的概念.

设 $x_0,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 **δ 邻域**，记为 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

点 x_0 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**(见图 1-3).

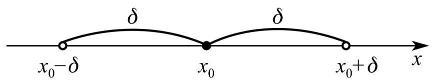


图 1-3

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉. 点 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

为了方便，有时把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为点 x_0 的**左 δ 邻域**，把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**右 δ 邻域**.

下面介绍当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限.

定义 12 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，当自变量 x 无限趋近于点 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0),$$

其中 $x\to x_0$ 表示 x 既可以从大于 x_0 的方向趋近于点 x_0，也可以从小于 x_0 的方向趋近于点 x_0.

注意 极限研究的是一种变化趋势，它要求 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，至于在点 x_0 处的情况如何(有定义或无定义)，对于求点 x_0 处的极限无任何影响. 如图 1-4 所示，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=x+1$ 无限趋近于 2；如图 1-5 所示，当 $x\to 1$ 时，$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 无限趋近于 2.

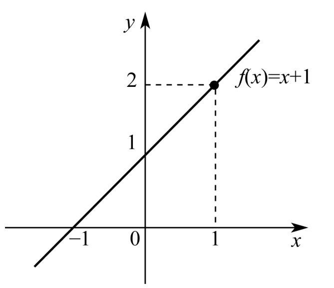


图 1-4

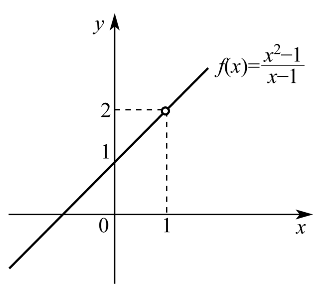


图 1-5

在讨论 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限问题时,对 $x \to x_0$ 的过程,若限制 $x < x_0$ 或 $x > x_0$,便可引出单侧极限的概念.

定义 13 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某左(或右)δ 邻域内有定义,当自变量 x 从点 x_0 的左(或右)侧无限趋近于点 x_0 时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A,则称 A 为 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的**左(或右)极限**,记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A\left(\text{或} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A\right).$$

显然,下面的结论成立.

定理 2 极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

例 3 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$,$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$,并讨论 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 是否存在.

解 由图 1-6 知,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 1) = 2, \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1) = 0,$$

由定理 2 知,$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在.

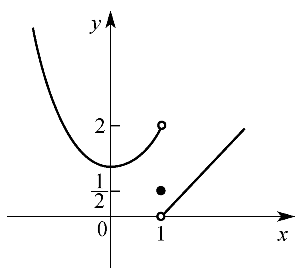


图 1-6

三、极限的性质

虽然数列极限是函数极限的特殊情形,但是它们都可归结为在自变量的某一变化过程中,函数值无限接近于某一确定的常数,因而它们具有共同的性质. 下面以 $x \to x_0$ 的情形为例来说明.

性质 1(唯一性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则极限值唯一.

性质 2(有界性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在,则在点 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3(保号性) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且 $A > 0$(或 $A < 0$),则必存在点 x_0 的某一去心

邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在点 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)\geqslant 0$（或 $f(x)\leqslant 0$），则 $A\geqslant 0$（或 $A\leqslant 0$）.

四、无穷小与无穷大

1. 无穷小的定义

定义 14 在自变量的某一变化过程中，以零为极限的变量称为该变化过程的**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，所以 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小. 又如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小.

注意 （1）无穷小是个变量，常数中只有零是无穷小.

（2）一个变量是无穷小，必须指明其变化过程. 例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 是无穷小；但当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 不是无穷小.

2. 无穷小的性质

性质 4 有限个无穷小的和也是无穷小.

例如，当 $x\to 0$ 时，x 与 $\sin x$ 都是无穷小，所以 $x+\sin x$ 也是无穷小.

无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}_{n个}=1$.

性质 5 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

例如，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小，而 $|\sin x|\leqslant 1$，即 $\sin x$ 是有界函数，所以 $\dfrac{1}{x}\sin x$ 是无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

3. 无穷小与函数极限的关系

定理 3 函数 $\lim f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$（其中 $\lim\alpha=0$）.

注意 定理 3 中没有标明自变量变化过程的记号“lim”是指自变量 x 的变化过程可以是 $x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 中的任何一种.

例如，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=4$，则 $f(x)=4+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to 1}\alpha=0$. 又如，因为$\dfrac{1+2x}{x}=\dfrac{1}{x}+2$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x}{x}=2$.

4. 无穷大的定义

定义 15 在自变量的某一变化过程中，绝对值无限增大的变量称为该变化过程的**无穷大量**，简称**无穷大**.

例如，因为$\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$，所以 x^2 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大；因为$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，所以 $\ln x$ 是当 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

注意 无穷大不趋向于任何确定的常数，所以无穷大的极限不存在. 但为了叙述函数的这一性态，也说“函数的极限是无穷大”，并记为$\lim f(x)=\infty$.

5. 无穷小与无穷大的关系

定理 4 在自变量的同一变化过程中，

(1) 如果函数 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

(2) 如果函数 $f(x)$ 是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势，并写出它们的极限.

(1) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$；　　(2) $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}$；

(3) $x_n=\dfrac{3+2^n}{2^n}$；　　(4) $x_n=n+\dfrac{1}{n}$.

2. 利用函数的图形求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\tan x$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$；

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 1,\\ 3x, & x<1,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，并判定极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是否存在.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 讨论当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}-ax, & x\geqslant 2,\\ x^2, & x<2,\end{cases}$ 当 a 取何值时，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在？

6. 下列哪些是无穷小？哪些是无穷大？

(1) $y=\ln x$，当 $x\to 1$ 时；　　(2) $y=\cot x$，当 $x\to 0$ 时；

(3) $y=\mathrm{e}^{-x}$，当 $x\to +\infty$ 时；　　(4) $y=2^x$，当 $x\to -\infty$ 时.

7. 利用无穷小的性质求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x\right)$.

第三节　极限的运算

利用极限的定义只能计算一些很简单的函数极限，而实际问题所涉及的函数要复杂得多. 本节介绍的极限的四则运算法则、两个重要极限和无穷小的比较，都有助于完成极限运算.

一、函数极限的运算法则

定理 5(极限的四则运算法则)　设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

注意　极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数的极限均存在；且法则(3)还必须满足分母的极限不为零，否则，不能直接使用该法则.

法则(1)和法则(2)均可推广到有限个函数的情形，并有如下推论.

推论 1　$\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$(C 为常数).

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

例 1　求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-8)$；　(2) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)(3-x)$；　(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x-8}{8x+4}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2x-8)=\lim\limits_{x\to 1}(3x^2)+\lim\limits_{x\to 1}(2x)-\lim\limits_{x\to 1}8=3\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x-\lim\limits_{x\to 1}8$

$$=3(\lim_{x\to 1}x)^2+2\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}8=3\times 1^2+2\times 1-8=-3.$$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(2x+1)(3-x)=\lim\limits_{x\to1}(2x+1)\cdot\lim\limits_{x\to1}(3-x)=3\times2=6$.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to2}(8x+4)=20\neq0$,所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2+x-8}{8x+4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2}(3x^2+x-8)}{\lim\limits_{x\to2}(8x+4)}=\dfrac{3}{10}$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 由于$\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)=0$,故不能直接使用法则(3)求解. 当 $x\to3$ 时,$x\neq3$,故可约去公因子 $x-3$,得

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 因为$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}$和$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2}{1-x^2}$的极限均不存在(无穷大),故不能直接使用极限的四则运算法则,可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

解 当 $x\to2$ 时,$\lim\limits_{x\to2}(x-2)$和$\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{x+2}-2)$的极限均为零,不能直接使用极限的四则运算法则,可先对分母有理化,再求极限.

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2)-4}$$

$$=\lim_{x\to2}(\sqrt{x+2}+2)=4.$$

例 5 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x-7}{2x^2+5}$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3+3}$; (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x+3}{3x^2-1}$.

解 (1) 当 $x\to\infty$ 时,分子、分母的极限均不存在(无穷大),故不能直接使用极限的四则运算法则. 先将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^2,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-x-7}{2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}}{2+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{1}{x}-\frac{7}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{5}{2}.$$

(2) 先将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{1}=0.$$

(3) 先将分子、分母同除以 x 的最高次幂 x^3,再求极限.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+3}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}},$$

由于分子的极限为 1,分母的极限为 0,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+3}{3x^2-1}=\infty.$$

一般地,当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m,n$ 为非负整数时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时}.\end{cases}$$

利用这个结论可以方便地求解有理分式当 $x\to\infty$ 时的极限.

二、两个重要极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

列表考察当 $x\to 0$ 时,函数$\frac{\sin x}{x}$的变化趋势,如表 1-2 所示.

表 1-2

x/rad	± 0.5	± 0.4	± 0.1	± 0.01	± 0.001	…
$\frac{\sin x}{x}$	0.958 851 1	0.973 545 9	0.998 334 2	0.999 983 3	0.999 999 8	…

从表 1-2 可以看出,不管 $x\to 0^+$,还是 $x\to 0^-$,$\frac{\sin x}{x}$ 都无限趋近于常数 1,即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

该极限的基本特征是:分子、分母的极限值均为零,且分母中的变量与分子正弦函数中的变量相同. 因此,该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square\text{ 代表同一变量}).$$

例 6 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$； (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=5\times 1=5$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\cdot\dfrac{3x}{4x}\right)=\dfrac{3}{4}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 4x}=\dfrac{3}{4}$.

例 7 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

列表考察当 $x\to\infty$ 时,函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的变化趋势,如表 1-3 所示.

表 1-3

x	…	$-1\ 000\ 000$	$-10\ 000$	-10	1	10	10 000	1 000 000	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	…	2.718 28	2.718 42	2.867 97	2	2.593 74	2.718 15	2.718 28	…

从表 1-3 可以看出,当 $x\to\infty$ 时,函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的大致变化趋势,由此可以证明,函数 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的值无限趋近于一个确定的无理数 2.718 28…,我们把它记为 e,即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

若令 $t=\dfrac{1}{x}$,则当 $x\to\infty$ 时,$t\to 0$,于是又可得到

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}.$$

该极限的基本特征是：底数的极限值为 1，指数的极限是无穷大，且指数与底数中的第二项互为倒数. 因此，该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square\text{ 代表同一变量})$$

或

$$\lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}(\square\text{ 代表同一变量}).$$

例 8 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{3}}\right)^{\left(-\frac{x}{3}\right)\cdot(-3)}=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{x}{3}}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 2}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2}=\mathrm{e}^{2}$.

例 9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{x}$.

解 方法 1：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^{-1}=\mathrm{e}$.

方法 2：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}$.

三、无穷小的比较

由无穷小的性质知，有限个无穷小的和、积依然是无穷小，而两个无穷小的商不一定是无穷小. 例如，当 $x\to 0$ 时，$2x$，x^2，$\sin x$ 都是无穷小，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0,\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x^2}=\infty,\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

以上不同的结果，反映了不同的无穷小趋于零的“快慢”程度不同. 为了比较两个无穷小变化速度的快慢，下面引入无穷小阶的概念.

定义 16 设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α **高阶的无穷小**，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α **低阶的无穷小**;

(3) 如果 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$,则称 β 与 α 是**同阶无穷小**,特别地,当 $c=1$ 时,称 β 与 α 是**等价无穷小**,记为 $\alpha\sim\beta$.

例如,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x},\dfrac{3}{x},\dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小,因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,所以当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x^2}$ 是比$\dfrac{1}{x}$ 高阶的无穷小;由于$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}=3$,所以当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{3}{x}$ 与$\dfrac{1}{x}$ 是同阶无穷小.

等价无穷小对化简极限计算非常有用,当 $x\to 0$ 时,常用的等价无穷小有:

$$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x.$$

关于等价无穷小在求极限中的应用,有下面的定理.

定理 6 在自变量的同一变化过程中,α,α',β 和 β' 都是无穷小,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,如果 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,那么

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

根据定理 6,在求分式函数的极限时,分子或分母的无穷小因式可用其等价无穷小代换.这种方法可将某些复杂的极限化简.

例 10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin 4x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\ln(1+3x)}$; (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)\sin x}{\arcsin 2x}$.

解 (1) 因为当 $x\to 0$ 时,$\arctan x\sim x,\sin 4x\sim 4x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{4x}=\frac{1}{4}.$$

(2) 因为当 $x\to 0$ 时,$\tan x\sim x,\ln(1+3x)\sim 3x$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)\sin x}{\arcsin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+2)x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2}{2}=1.$

注意 相乘(除)的无穷小都可用各自的等价无穷小代换,但相加(减)的无穷小的项不能做等价代换,如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0.$

习题 1-3

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3+x^2-x-1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+1}{x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+x}{4x^2-1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^4-x^2+2}{3+x^4}$;

(8) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-x+1}{x+2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+x+2}{7x^5+3}$;

(10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-1)^2(1-3x)^8}{(3x-1)^{10}}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x(x+5)}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{2x}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x+1}$.

3. 利用等价无穷小代换求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+2x}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\tan x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{4}}-1}{\sin^2 x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 3x}$.

4. 假定某种疾病流行 t 天后,感染的人数 N 由下式给出:

$$N=\frac{1\ 000\ 000}{1+5\ 000\mathrm{e}^{-0.1t}}.$$

如果不加控制,那么将有多少人感染上这种疾病?

第四节　函数的连续性

前面学习了极限. 现在,通过极限理论进一步考察函数的变化关系,可以发现,自然界中的许多现象,如植物的生长、气温的变化、河水的流动等都是连续变化的. 就植物的生长来看,当时间变化很微小时,植物的变化也是很微小的,这种现象反映在函数关系上就是函数的连续性. 本节将用极限的方法讨论函数的连续性.

一、函数连续的概念

为了描述函数的连续性,先引入增量的概念.

定义 17　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,当自变量由 x_0 变到 x(x 仍在该邻域内)时,称差 $x-x_0$ 为自变量在点 x_0 处的**增量**,记为 Δx,即 $\Delta x=x-x_0$. 相应地,函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x)$,称差 $f(x)-f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**增量**,记为 Δy,即

$$\Delta y=f(x)-f(x_0) \text{ 或 } \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

注意　增量记号 $\Delta x,\Delta y$ 是不可分割的整体,且增量可正、可负.

函数增量的几何意义如图 1-7 所示.

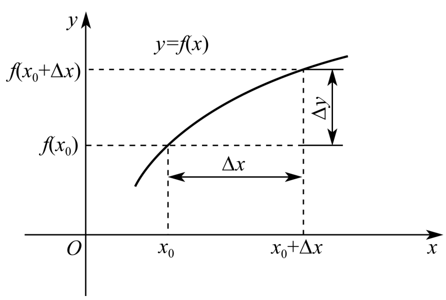


图 1-7

例 1　设函数 $y=f(x)=x^2$.

(1) 当 x 从 2 变到 1 时,求自变量的增量与函数的增量;

(2) 当 x 从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时,求函数的增量.

解　(1) 自变量的增量为 $\Delta x=1-2=-1$,函数的增量为

$$\Delta y=f(1)-f(2)=1^2-2^2=-3.$$

(2) $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = (2x_0+\Delta x)\Delta x$.

从自变量的增量与函数的增量的关系出发，下面给出函数在某点处连续的定义.

定义 18 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若当自变量的增量 $\Delta x = x - x_0$ 趋于零时，对应的函数增量也趋于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0,$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处**连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

若令 $x_0+\Delta x = x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$x\to x_0$，则有

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)] = 0,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

于是，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义又可叙述如下.

定义 19 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**连续**.

根据上述定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，必须同时满足以下三个条件.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = f(x_0)$.

例 2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & x\neq 3,\\ 1, & x=3\end{cases}$ 在点 $x=3$ 处是否连续.

解 首先，函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处有定义，且 $f(3)=1$. 其次，求极限

$$\lim_{x\to 3}f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3} = 1.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 3}f(x) = f(3)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 处连续.

由函数的左、右极限的定义，相应地可以得到函数左连续及右连续的定义.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**左连续**；如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**. 显然，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件是它在点 x_0 处既左连续又右连续.

例 3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x<1,\\ x^2+1, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性.

解 因为 $f(1)=2$，且

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+1)=2=f(1),\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2x=2=f(1),$$

所以 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处左连续且右连续,从而 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续.

若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内的每一点处都连续,则称函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内**连续**,或称 $f(x)$ 是区间(a,b)内的**连续函数**;若函数 $f(x)$ 在区间(a,b)内连续,且在左端点 a 处右连续,在右端点 b 处左连续,则称函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上**连续**,此时也称 $f(x)$ 是闭区间$[a,b]$上的**连续函数**.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

二、函数的间断点

定义 20 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**间断**,称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

由函数连续的定义可知,满足下列条件之一的点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处没有定义.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

定义 21 设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点. 如果左极限和右极限都存在,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第一类间断点**;否则,称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**第二类间断点**.

第一类间断点分为以下两类.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**可去间断点**.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**跳跃间断点**.

例如,函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,故 $x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 的可去间断点. 若补充定义,令 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则函数在点 $x=0$ 处连续. 又如,$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}-x-1, & x>0,\\ -x+1, & x\leqslant0\end{cases}$ 的跳跃间断点,因为

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(-x-1)=-1,\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(-x+1)=1,$$

从而,$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$,即 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在,如图 1-8 所示.

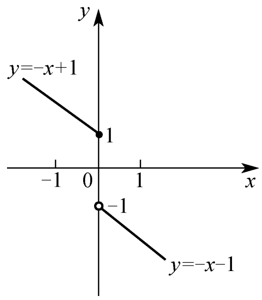


图 1-8

第二类间断点也分为以下两类.

(1) 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**无穷间断点**.

(2) 若当 $x \to x_0$ 时,$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 震荡性的不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的**震荡间断点**.

例如,函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在点$x = 0$处无定义,且$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$,所以 $x = 0$ 是函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 的无穷间断点. 又如,函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 处无定义,且$\lim\limits_{x \to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ 不存在,所以 $x = 0$ 是 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的第二类间断点. 又因为当 $x \to 0$ 时,函数 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 在 -1 和 1 之间做无限次震荡(见图 1-9),所以 $x = 0$ 是 $y = \sin\dfrac{1}{x}$ 的震荡间断点.

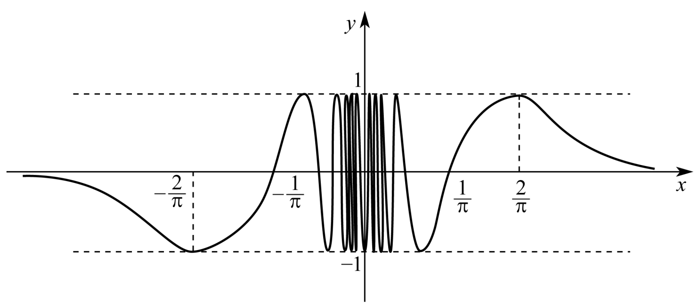


图 1-9

三、连续函数的运算与初等函数的连续性

由函数在某点处连续的定义和极限的四则运算法则,可得出下面的定理.

定理 7 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续,则它们的和(差)$f(x) \pm g(x)$、积 $f(x) \cdot g(x)$、商$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$ 在点 x_0 处连续.

定理 8 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,$y = f(u)$ 在点 $u_0 = \varphi(x_0)$ 处连续. 若复

合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

这表明在定理 8 的条件下求复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的极限时,极限符号和函数符号可以交换次序,即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f(u_0).$$

根据上述定理及初等函数的定义,可得如下重要结论.

定理 9 初等函数在其定义区间(包含在定义域内的区间)上都是连续函数.

由定理 9 知,初等函数在其定义区间内某点处的极限等于该点处的函数值.

例 4 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin 2x}{x}}$; (2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2-\dfrac{\sin 2x}{x}}=\sqrt{2-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}}$

$$=\sqrt{2-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}}=\sqrt{2-2}=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln\sin\dfrac{\pi}{2}=\ln 1=0.$

四、闭区间上连续函数的性质

定义在闭区间上的连续函数在理论和应用中有很多重要的性质.

定义 22 对于在区间 I 上有定义的函数 $f(x)$,如果有 $x_0\in I$,使得对任一 $x\in I$ 都有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\ (f(x)\geqslant f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**(**最小值**).

定理 10(最值定理) 闭区间上的连续函数在该区间上一定存在最大值和最小值.

推论(有界性定理) 闭区间上的连续函数在该区间上一定有界.

定理 11(介值定理) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,C 为介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何数,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=C$.

介值定理的几何意义是:对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个常数 C,直线 $y=C$ 与连续曲线 $y=f(x)$ 至少有一个交点,如图 1-10 所示.

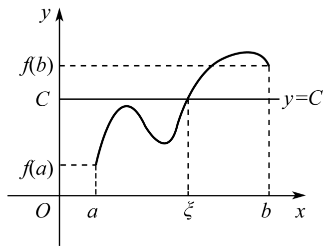


图 1-10

推论(零点定理) 设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

零点定理的几何意义是:若连续曲线 $y=f(x)$ 在$[a,b]$端点处的函数值异号,则该曲线与 x 轴至少有一个交点,如图 1-11 所示.

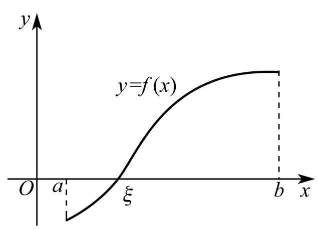


图 1-11

例 5 证明方程 $x-\sin x=1$ 在区间$(0,2\pi)$内有实根.

证 函数 $f(x)=x-\sin x-1$ 在闭区间$[0,2\pi]$上连续,又因为 $f(0)=-1<0$,$f(2\pi)=2\pi-1>0$,所以根据零点定理,在区间$(0,2\pi)$内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$. 因此,方程 $x-\sin x=1$ 在区间$(0,2\pi)$内至少有一个实根.

习题 1-4

1. 设函数 $y=x^3-x+2$,求适合下列条件的自变量的增量和相应的函数增量.

(1) 当 x 由 2 变到 3;　　(2) 当 x 由 2 变到 1;

(3) 当 x 由 2 变到 $2+\Delta x$.

2. 讨论下列分段函数在分段点处的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases}3\cos x, & x\geqslant 0,\\ 2+3x, & x<0;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 2a+x, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 试确定常数 a 的值,使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4. 求下列函数的间断点并判定其类型.

(1) $y=\dfrac{1}{x+1}$; (2) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=e^{\frac{1}{x}}$; (4) $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

5. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{e^{2x}+x^2+3}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^3)}$; (4) $\lim\limits_{t\to -2}\dfrac{e^t+1}{t}$.

6. 证明方程 $x^3-3x-1=0$ 在(1,2)内至少有一个实根.

复 习 题 一

A 组

一、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln x$ 的定义域为________.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$ 的间断点是________.

3. 函数 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的图形关于________ 对称.

4. 设 $f(x)=2x$,$g(x)=\lg x$,则 $f[g(x)]=$ ________,$g[f(x)]=$ ________.

5. 设 $y=\dfrac{x-1}{x+1}$,则当 $x\to$ ________ 时,y 是无穷大;当 $x\to$ ________ 时,y 是无穷小.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0, \\ a, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则 $a=$ ________.

7. 设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=1$,则 $f(1)=$ ________.

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2, & x\neq 2, \\ 0, & x=2, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$ ________.

二、选择题

1. 函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & x\leqslant 1, \\ \sqrt{2x^2-1}, & x>1 \end{cases}$ 的定义域是( ).

A. $[-1,1]$　　B. $(-\infty,+\infty)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2. 设 $f(x)=|2x-3|$，则 $f[f(1)]=$(　　).

A. 2　　B. 1

C. 0　　D. 3

3. 设 $f(x)$ 是奇函数，且 $\varphi(x)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，则 $\varphi(x)$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 无定义

4. $x=0$ 是函数 $f(x)=\frac{\sqrt[x]{e}-1}{\sqrt[x]{e}+1}$ 的(　　).

A. 连续点　　B. 可去间断点

C. 跳跃间断点　　D. 无穷间断点

5. 当 $x\to0$ 时，与 $x\sin x$ 等价的无穷小是(　　).

A. $2x$　　B. $2x^2$

C. x^2　　D. x

6. 当 $x\to0$ 时，下列变量为无穷大的是(　　).

A. $\cot x$　　B. e^{-x}

C. $e^{\frac{1}{x}}$　　D. $\sin\frac{1}{x}$

7. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在是 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的(　　).

A. 充分条件且不是必要条件　　B. 必要条件且不是充分条件

C. 充要条件　　D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处间断，则(　　).

A. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在　　B. $f(x_0)$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$　　D. 以上三种情况至少有一种发生

三、综合题

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求极限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，并判定极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x$； (2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sqrt{3-\sin 2x}$； (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$； (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-1}{x+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$； (10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x+e^x}{(x+2)\ln(1+x)}$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+b, & x<0, \\ a, & x=0, \\ \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0. \end{cases}$

(1) 当 a,b 为何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处极限存在？

(2) 当 a,b 为何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续？

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} 1+x^2, & x<0, \\ 2x+b, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 试确定 b 的值，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续函数.

5. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x, & x>0 \end{cases}$ 的连续性，如有间断点，指出其类型.

6. 证明方程 $e^x-2=x$ 至少有一个不超过 2 的正根.

B 组

1. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$； (2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x^2-9)}{x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$； (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\tan x-\sin x)}{\sin x^4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{\sin^2 x}$； (6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}+5}$.

2. 若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^3+\dfrac{2x^2+1}{x+1}+2\lim\limits_{x\to 1}f(x)$，求 $f(x)$.

3. 已知极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a，b 的值.

4. 当 $x\to 0$ 时，无穷小 $1-\cos x$ 与 mx^n 等价，求 m，n 的值.

◎数学小故事

无穷思想与圆周率的推算

《庄子》一书中有“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的说法. 可见，我国人民很早就对无穷思想有了深刻的认识，并创造性地将其运用到数学中，其中最具代表性的是对圆周率 π 的推算.

我国对 π 推算的重大突破最早来自刘徽. 刘徽，魏晋时期数学家，是中国古典数学理论的奠基人之一. 刘徽思维敏捷，倡导以推理和直观相结合的逻辑推理方式来论证数学命题，其代表作有《九章算术》和《海岛算经》. 刘徽对数学的贡献极大，最为大家所熟知的是他提出的“割圆术”，他提出用增加圆内接正多边形边数的方法来逼近圆的面积，并阐述为“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”. 刘徽本着对无穷的深刻认识，以“割圆术”为理论基础，得出了“徽率”，即 π 的近似值为 3.141 024.

继刘徽之后，南北朝时期的祖冲之更是利用极限的思想进一步将 π 的近似值精确到小数点后 7 位. 祖冲之为求出最精确的圆周率在书房地板上画了一个直径为一丈(1 市丈＝3.333 3 m)的圆，逐次以圆内接正六边形、正十二边形、正二十四边形、正四十八边形……的边长之和为圆周长计算其与直径的比值，一直割圆到 24 567 边形，这时的内接正多边形已经和圆周紧密地贴合在一起，不能再割. 在推导过程中，祖冲之进行了包括加减乘除及开方在内的 130 多次的运算，最终得到结论：正 12 288 边形的边长之和为 3.141 592 51 丈，正 24 576 边形的边长之和为 3.141 592 61 丈，即圆周率 π 介于 3.141 592 6 和 3.141 592 7 之间. 这样的研究成果在当时处于世界领先地位.

2011 年 3 月 14 日，国际数学协会(International Mathematical Union，IMU)正式宣布，将每年的 3 月 14 日设为国际数学节，来源则是中国古代数学家祖冲之的圆周率。

◎数学趣谈

咖啡冷却问题

生活中也蕴含着很多有趣的数学问题，本章介绍了函数与极限，今天就利用指数函

数来解释一个有趣的生活问题:咖啡冷却问题.

大家有没有发现,冲泡好的咖啡在不同的季节,冷却的时间不尽相同,这种情况可以用和指数函数相关的算式来解释.咖啡的温度会随着时间的推移逐渐下降到接近室温,可以用算式表示如下.

$$t(\mathrm{min})\text{的瞬时温度}(T)=\text{室温}+(\text{咖啡的温度}-\text{室温})\times \mathrm{e}^{-0.5t}.$$

通过上述算式,我们知道在温度下降的瞬间,咖啡的温度和室温之间温度差的一种比例关系.设冬天的环境室温为 10 ℃,夏天的环境室温为 35 ℃,咖啡的最初温度为 90 ℃,则 5 min($t=5$)后的温度数值比较如下.

冬季 5 min 后的咖啡温度为

$$T=10+(90-10)\times \mathrm{e}^{-0.5\times 5}\approx 16.6.$$

夏季 5 min 后的咖啡温度为

$$T=35+(90-35)\times \mathrm{e}^{-0.5\times 5}\approx 39.5.$$

由此可见,当室温和咖啡温度之间的差值较大时,咖啡温度下降较快;相反,咖啡温度下降较慢.

其实,用类似的指数函数来表达自然现象和社会现象是很常见的,如细菌繁殖、细胞分裂、复利的本金与利息合计等,大家可以在课外进行相关查阅和探索.