

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

**(第2版)**

# 新编高等数学学习指导

主编 陈金涛 黄涛 白余

**(第2版)**

## 新编高等数学学习指导

XINBIAN GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

「十四五」职业教育国家规划教材配套用书

新编高等数学学习指导

**(第2版)**

主编 陈金涛 黄涛 白余

北京邮电大学出版社



ISBN 978-7-5635-6970-0



9 787563 569700 >

定价: 38.60元



北京邮电大学出版社  
www.buptpress.com

策划编辑: 金颖杰  
责任编辑: 高宇  
封面设计: 刘文东

“十四五”职业教育国家规划教材配套用书

# 新编高等数学学习指导

## (第2版)

主 编 陈金涛 黄 涛 白 余  
副主编 毛 鑫 张丽春 商 颖



北京邮电大学出版社  
[www.buptpress.com](http://www.buptpress.com)

## 内 容 简 介

本书是“十四五”职业教育国家规划教材《新编高等数学》(第2版)的配套用书,全书共分为10章,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数.每章包含3个部分,分别为基本要求、内容提要、章节测验.

本书可作为高等职业院校高等数学课程的配套用书,也可供相关人员参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学学习指导 / 陈金涛, 黄涛, 白余主编. -- 2版. -- 北京: 北京邮电大学出版社, 2023. 8  
(2025. 1 重印)

ISBN 978-7-5635-6970-0

I. ①新… II. ①陈… ②黄… ③白… III. ①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 IV. ①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 143822 号

策划编辑: 金颖杰 责任编辑: 高 宇 封面设计: 刘文东

出版发行: 北京邮电大学出版社

社 址: 北京市海淀区西土城路 10 号

邮政编码: 100876

发 行 部: 电话: 010-62282185 传真: 010-62283578

E-mail: publish@bupt. edu. cn

经 销: 各地新华书店

印 刷: 三河市众誉天成印务有限公司

开 本: 787 mm×1 092 mm 1/16

印 张: 12. 75

字 数: 264 千字

版 次: 2023 年 8 月第 2 版

印 次: 2025 年 1 月第 3 次印刷

ISBN 978-7-5635-6970-0

定 价: 38. 60 元

• 如有印装质量问题, 请与北京邮电大学出版社发行部联系 •

服务电话: 400-615-1233



# 前 言

高等数学是高等职业教育重要的基础课程,高等数学的思想和方法越来越多地应用于各个学科和领域.党的二十大报告指出,“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设,加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科”.高等数学是高等职业教育各专业的公共基础课程,如何快速掌握其基本内涵和其所蕴含的思想、方法是相关教育部门与各个教学单位正在认真思考、仔细研究、积极应对的问题.

本书根据现阶段我国职业教育教学改革的需要,在充分总结一线教师教学经验的基础上编写而成,旨在满足教师教学和学生学习的需要.本书是教材《新编高等数学》(第2版)的配套用书.全书按照教材的章节进行编排,每章包含以下三部分内容.

(1)基本要求.本部分列出了每章的学习要求,使学生能够清楚地了解每章的学习目标,便于学生对知识点进行把握,分清主次.

(2)内容提要.本部分对教材中对应章节的主要内容从基本概念、重要结论、方法与技巧等方面进行归纳总结,便于学生查找复习.

(3)章节测验.本部分提供了针对每章知识点的练习题,供学生练习使用,以便学生巩固所学知识.

此外,本书在最后提供了5套综合训练试卷,学生可将其作为测试试卷使用.

本书由昆明铁道职业技术学院陈金涛、黄涛、白余任主编,毛鑫、张丽春、商颖任副主编.具体编写分工如下:白余编写第1章和第2章,张丽春和商颖共同编写第3章,毛鑫编写第4章,黄涛编写第5章、第6章,



陈金涛编写第7章、第8章、第10章、综合训练,并与黄涛共同编写第9章.全书由陈金涛统稿.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编者



# 目 录

|                          |    |
|--------------------------|----|
| <b>第 1 章 函数</b> .....    | 1  |
| 1.1 基本要求 .....           | 1  |
| 1.2 内容提要 .....           | 1  |
| 1.3 章节测验 .....           | 7  |
| <b>第 2 章 极限与连续</b> ..... | 11 |
| 2.1 基本要求 .....           | 11 |
| 2.2 内容提要 .....           | 11 |
| 2.3 章节测验 .....           | 23 |
| <b>第 3 章 导数与微分</b> ..... | 26 |
| 3.1 基本要求 .....           | 26 |
| 3.2 内容提要 .....           | 26 |
| 3.3 章节测验 .....           | 36 |
| <b>第 4 章 导数的应用</b> ..... | 40 |
| 4.1 基本要求 .....           | 40 |
| 4.2 内容提要 .....           | 40 |
| 4.3 章节测验 .....           | 52 |
| <b>第 5 章 不定积分</b> .....  | 56 |
| 5.1 基本要求 .....           | 56 |

|             |                |     |
|-------------|----------------|-----|
| 5.2         | 内容提要           | 56  |
| 5.3         | 章节测验           | 66  |
| <b>第6章</b>  | <b>定积分及其应用</b> | 69  |
| 6.1         | 基本要求           | 69  |
| 6.2         | 内容提要           | 69  |
| 6.3         | 章节测验           | 83  |
| <b>第7章</b>  | <b>多元微积分</b>   | 87  |
| 7.1         | 基本要求           | 87  |
| 7.2         | 内容提要           | 87  |
| 7.3         | 章节测验           | 103 |
| <b>第8章</b>  | <b>常微分方程</b>   | 107 |
| 8.1         | 基本要求           | 107 |
| 8.2         | 内容提要           | 107 |
| 8.3         | 章节测验           | 119 |
| <b>第9章</b>  | <b>无穷级数</b>    | 122 |
| 9.1         | 基本要求           | 122 |
| 9.2         | 内容提要           | 122 |
| 9.3         | 章节测验           | 136 |
| <b>第10章</b> | <b>线性代数</b>    | 139 |
| 10.1        | 基本要求           | 139 |
| 10.2        | 内容提要           | 139 |
| 10.3        | 章节测验           | 155 |
| <b>附录</b>   |                | 158 |
| 附录 I        | 综合训练           | 158 |
| 附录 II       | 参考答案           | 180 |

# 第 1 章 函 数

## 1.1 基 本 要 求

- (1) 认知函数的概念, 知道反函数的定义.
- (2) 理解函数的性质, 包括有界性、单调性、奇偶性和周期性.
- (3) 熟知基本初等函数, 理解复合函数和初等函数.
- (4) 能用函数解决实际问题.

## 1.2 内 容 提 要

### 1.2.1 函数及其性质

#### 1. 函数的概念

函数是描述变量之间相互依赖关系的一种数学模型.

**定义 1.1** 设  $x$  和  $y$  是两个变量,  $D$  是一个给定的非空数集. 若对于每个  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定法则  $f$  总有确定的数值与它对应, 则称  $y$  是  $x$  的函数, 记为

$$y=f(x), x \in D$$

其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量, 数集  $D$  称为这个函数的定义域.

对于每个  $x \in D$ , 按照对应法则  $f$ , 总有确定的值  $y$  与之对应, 这个值称为函数在点  $x$  处的函数值, 记为  $f(x)$ . 因变量与自变量的这种依赖关系通常称为函数关系.

当自变量  $x$  取遍  $D$  内的所有数值时, 对应的函数值  $f(x)$  的全体所构成的集合称为函数  $f(x)$  的值域, 记为  $M$ , 即

$$M=\{y|y=f(x), x \in D\}$$



函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.

函数的常用表示法有以下三种.

(1)列表法:将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2)图像法:在坐标系中用图像来表示函数关系的方法.

(3)公式法(解析法):将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法.

## 2. 反函数

**定义 1.2** 设函数  $y=f(x)$ , 其定义域为  $D$ , 值域为  $M$ . 如果对于任意  $y \in M$ , 由函数关系式  $y=f(x)$  恰好唯一确定出一个  $x \in D$  与之对应, 那么认为  $x$  是  $y$  的函数, 记作  $x=g(y)$ . 我们称上述的  $y=f(x)$  与  $x=g(y)$  互为反函数, 习惯上将  $x=g(y)$  记作

$$x=f^{-1}(y)$$

由于习惯上常用  $x$  表示自变量,  $y$  表示因变量, 故常把  $y=f(x)$  的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义可知, 在定义区间上单调的函数必有反函数.

**定理 1.1** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $M$ . 若  $f(x)$  在  $D$  上是单调增加或单调减少的, 则在  $M$  上  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$  存在, 且  $f^{-1}(x)$  在  $M$  上也是单调增加或单调减少的.

求分段函数的反函数, 只需分别求出与各自定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

## 3. 函数的性质

设函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 区间  $I$  为函数  $f(x)$  的整个定义域或其定义域的一部分, 则函数一般具有下列几种特性.

### 1) 有界性

如果存在正数  $M$ , 使得对任意的  $x \in I$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上有界, 否则称  $y=f(x)$  在区间  $I$  上无界.

### 2) 单调性

若对任意的  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$  或  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称函数  $y=f(x)$  在区间  $I$  上单调增加或单调减少. 区间  $I$  称为单调增区间或单调减区间; 单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数; 单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

### 3) 奇偶性

设函数  $f(x)$  在定义区间  $I$  上关于原点对称, 若对任意的  $x \in I$ , 都有  $f(-x) = f(x)$ ,

则称函数  $f(x)$  是区间  $I$  上的偶函数;若对任意的  $x \in I$ , 都有  $f(-x) = -f(x)$ , 则称函数  $f(x)$  是区间  $I$  上的奇函数;若函数既不是奇函数也不是偶函数, 则称其为非奇非偶函数.

#### 4) 周期性

如果存在不为零的正实数  $T$ , 使得对于任意的  $x \in I, x+T \in I$ , 都有  $f(x+T) = f(x)$ , 则称函数  $y = f(x)$  为周期函数,  $T$  是  $f(x)$  的一个周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

### 练习 1.1

#### 1. 选择题.

(1) 下列各组中, 函数  $f(x)$  与  $g(x)$  为相同函数的是( ).

- A.  $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$   
 B.  $f(x) = 1, g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$   
 C.  $f(x) = x - 3, g(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$   
 D.  $f(x) = 2 \ln x, g(x) = \ln x^2$

(2) 下列函数中, 不是奇函数的是( ).

- A.  $y = \tan x + x$   
 B.  $y = x$   
 C.  $y = (x - 2)(x + 2)$   
 D.  $y = \frac{2}{x} \cdot \sin^2 x$

(3) 下列函数中, 定义域为  $(-\infty, +\infty)$  且单调递增的是( ).

- A.  $y = \arcsin x$   
 B.  $y = \arccos x$   
 C.  $y = \arctan x$   
 D.  $y = \operatorname{arccot} x$

(4) 函数  $y = \sqrt{16 - x^2} + \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  的定义域是( ).

- A.  $(0, 1)$   
 B.  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$   
 C.  $(0, 4)$   
 D.  $[-4, 1) \cup (1, 4]$

(5) 函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & |x| < 1 \\ x^2-1, & 1 < |x| \leq 2 \end{cases}$  的定义域是( ).

- A.  $[-2, 2]$   
 B.  $[-2, -1] \cup (-1, 2]$   
 C.  $[-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2]$   
 D.  $[-2, 1) \cup (1, 2]$

2. 填空题.

(1) 函数  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  在\_\_\_\_\_单调递减, 在\_\_\_\_\_单调递增.

(2) 函数  $f(x) = \sqrt{x+3} + \arcsin \frac{x+1}{2}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(3) 函数  $y = \frac{4^x}{4^x+1}$  的反函数是\_\_\_\_\_.

(4) 函数  $y = \sin px$  是以\_\_\_\_\_为周期的函数.

3. 已知  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ , 求  $f(0), f(-2x), f\left(\frac{1}{x}\right), f(x+2)$ .

4. 求下列函数的反函数.

(1)  $y = \lg(x+3) + 1$ ;

(2)  $y = 2\sin 4x$ .

## 1.2.2 初等函数

### 1. 基本初等函数

(1) 常量函数:  $y = C$  ( $C$  为常数). 该函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 图像为过点  $(0, C)$  且

平行于  $x$  轴的直线.

(2) 幂函数:  $y=x^a$  ( $a$  为实数). 该函数的定义域因  $a$  的取值不同而不同, 但无论  $a$  为何值, 它在区间  $(0, +\infty)$  内总有定义, 且图像过点  $(1, 1)$ .

(3) 指数函数:  $y=a^x$  ( $a>0$  且  $a\neq 1, a$  为常数). 该函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 值域为  $(0, +\infty)$ . 当  $a>1$  时, 函数单调增加; 当  $0<a<1$  时, 函数单调减少. 图像过点  $(0, 1)$ .

(4) 对数函数:  $y=\log_a x$  ( $a>0$  且  $a\neq 1, a$  为常数). 该函数的定义域为  $(0, +\infty)$ , 值域为  $(-\infty, +\infty)$ . 当  $a>1$  时, 函数单调增加; 当  $0<a<1$  时, 函数单调减少. 图像过点  $(1, 0)$ . 在科学计数法中常用到以  $e$  为底的对数函数, 称为自然对数, 记作  $y=\ln x$ .

(5) 三角函数.  $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$  统称为三角函数.

(6) 反三角函数.  $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$  统称为反三角函数.

## 2. 复合函数和初等函数

**定义 1.3** 设  $y=f(u)$ , 其中  $u=\varphi(x)$ , 且函数  $u=\varphi(x)$  的值域包含在函数  $y=f(u)$  的定义域内, 则称  $y=f[\varphi(x)]$  为由  $y=f(u)$  和  $u=\varphi(x)$  复合而成的复合函数, 其中  $u$  叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明.

(1) 复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2) 将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时, 一定要分清层次, 由外到内, 逐层分解.

(3) 并不是任意两个函数都能构成复合函数.

### 练习 1.2

1. 选择题.

(1) 函数  $y=\sqrt[5]{\ln \sin^3 x}$  的复合过程为( ).

A.  $y=\sqrt[5]{u}, u=\ln v, v=w^3, w=\sin x$

B.  $y=\sqrt[5]{u^3}, u=\ln(\sin x)$

C.  $y=\sqrt[5]{\ln u^3}, u=\sin x$

D.  $y=\sqrt[5]{u}, u=\ln v^3, v=\sin x$

(2) 如果  $f(\cos x)=\frac{\sin^2 x}{\cos 2x}$ , 则  $f(x)=($  ).

A.  $\frac{1+x^2}{2x^2-1}$

B.  $\frac{1-x^2}{2x^2+1}$

C.  $\frac{1-x^2}{2x^2-1}$

D.  $\frac{1+x^2}{2x^2+1}$

(3) 函数  $y=3^x+3$  的反函数是( ).

A.  $y=\log_3 x-3$

B.  $y=\log_3(x-3)$

C.  $y=\log_3 x+3$

D.  $y=\log_3(x+3)$

2. 填空题.

(1) 函数  $y=f(x)$  与  $y=-f(x)$  的图形关于\_\_\_\_\_对称.

(2) 已知  $f(x)=\log_5 x$ , 则  $f(x)+f(y)=$ \_\_\_\_\_.

(3) 设  $f(x)=5^x$ ,  $g(x)=\sqrt{x}$ , 则  $f[g(x)]=$ \_\_\_\_\_,  $g[f(x)]=$ \_\_\_\_\_.

(4) 设  $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}(x<0)$ , 则  $f(x)=$ \_\_\_\_\_.

3. 将下列函数分解成基本初等函数.

(1)  $y=\sin^2 \sqrt{x}$ ;

(2)  $y=5^{\arcsin x}$ .

4. 作出下列函数的图像.

(1)  $y=2\ln x$ ;

(2)  $y=e^{-x}$ .

## 1.3 章节测验

1. 选择题.

(1) 函数  $y=(3m-1)x+n$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 则( ).

A.  $m > \frac{1}{3}$

B.  $m < \frac{1}{3}$

C.  $m > -\frac{1}{3}$

D.  $m < -\frac{1}{3}$

(2) 已知  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 且当  $x > 0$  时,  $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ , 则  $f(-1) = ( )$ .

A.  $-2$

B.  $0$

C.  $1$

D.  $2$

(3) 函数  $y = \sqrt{4-x} + \ln(x-1)$  的定义域是( ).

A.  $(0, 4]$

B.  $(1, 4]$

C.  $(1, 4)$

D.  $(1, +\infty)$

(4) 如果  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x+1}{x}\right)^2$  ( $x \neq 0$ ), 则  $f(x) = ( )$ .

A.  $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2$  ( $x \neq -1$ )

B.  $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

C.  $(1+x)^2$

D.  $(1-x)^2$

(5) 函数  $y = -\sqrt{x-2}$  的反函数是( ).

A.  $y = x^2 + 2 (-\infty < x < +\infty)$

B.  $y = x^2 + 2 (x \geq 2)$

C.  $y = x^2 + 2 (x \leq 2)$

D.  $y = x^2 + 2 (x \leq 0)$

(6) 设  $f(x)$  是奇函数, 且  $\varphi(x) = f(x) \left( \frac{1}{2^x+1} - \frac{1}{2} \right)$ , 则  $\varphi(x)$  是( ).

A. 偶函数

B. 奇函数

C. 非奇非偶函数

D. 无定义

2. 填空题.

(1) 函数  $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + \ln x$  的定义域为\_\_\_\_\_.

(2)  $f(x) = 7^x, g(x) = x \ln x$ , 则  $f[g(x)] =$ \_\_\_\_\_.

(3)  $f(x) = \sqrt{3+x^2}$ , 则  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_.

(4) 设  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_.

(5) 函数  $y = e^x + 1$  与  $y = \ln(x-1)$  的图形关于直线\_\_\_\_\_对称.

(6) 设函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ , 则函数  $f[f(x)] =$ \_\_\_\_\_.

(7) 函数  $f(x) = 3 - 2\cos \frac{1}{2}x$  的最小值是\_\_\_\_\_.

3. 设  $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^3 - x}{x^4 + 1} (x \neq 0)$ , 求  $f(x)$ .

4. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义, 对于任意的  $x, y, f(x) \neq 0$  且  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ , 求  $f(2020)$ .

5. 求由  $f(x) = \arcsin x$  和  $\varphi(x) = \ln 2x$  复合而成的函数  $\varphi[f(x)]$  的定义域.

6. 判断函数  $f(x) = \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + m^2}}{m}$  ( $m > 0, -\infty < x < +\infty$ ) 的奇偶性.

7. 讨论函数  $f(x) = \frac{3x}{1+x}$  ( $x \geq 0$ ) 的单调性和有界性.



8. 设函数  $f(x) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^4, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$ ,  $g(x) = \ln x$ , 求  $f[g(x)]$  和  $g[f(x)]$ .

9. 要设计一个容积为  $V = 20\pi$  立方米的有盖圆柱形储油桶, 已知桶盖单位面积造价是侧面的  $1/2$ , 而侧面单位面积造价又是底面的  $1/2$ . 设桶盖造价为  $a$  (单位: 元/平方米), 试把储油桶总造价  $p$  表示为储油桶半径  $r$  的函数.

10. 旅客乘坐火车时随身携带的物品, 如果不超过 20 kg 免费, 超过 20 kg 的部分, 每千克收费 0.4 元, 超过 50 kg 的部分, 每千克再加收 40%. 试列出收费与物品质量的函数关系.